Definition der Stufenfunktionen

Definition (6.1)

Als $\mathscr{A}$-Stufenfunktion bezeichnen wir eine nichtnegative, $\mathscr{A}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele reelle Werte annimmt. Die Menge der $\mathscr{A}$-Stufenfunktionen bezeichnen wir mit $E(\Omega, \mathscr{A})$.

Eigenschaften von Stufenfunktionen

Proposition (6.2)

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ ist genau dann eine $\mathscr{A}$-Stufenfunktion, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$, paarweise disjunkte Mengen $A_1, ..., A_n \in \mathscr{A}$ mit

$$\Omega \quad = \quad A_1 \cup ... \cup A_n$$

und $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}_+$ existieren, so dass $f = \sum_{i=1}^{n} u_i 1_{A_i}$ erfüllt ist.

Proposition (6.3)

Sind $f, g \in E(\Omega, \mathscr{A})$, dann sind auch die Funktionen $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ in $E(\Omega, \mathscr{A})$ enthalten.

Definition des μ-Integrals von Stufenfunktionen (Vorb.)

Lemma (6.4)

Sei $f \in E(\Omega, \mathscr{A})$, und seien

$$f \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{A_i} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j 1_{B_j}$$

zwei Darstellungen von f mit $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}_+$ sowie $A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n \in \mathscr{A}$, wobei $A_1, ..., A_m$ und $B_1, ..., B_n$ jeweils paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung jeweils Ω ergibt. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j).$$

Beweis von Proposition 6.4

geg: $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}_+$

$A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ mit

$A_1 \cup \dots \cup A_m = B_1 \cup \dots \cup B_n$, wobei A_i, A_j disjunkt für $i \neq j$ ist, und dasselbe für die Mengen B_k gilt

weitere Vor.: $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j 1_{B_j}$

z.zg.: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j)$

Es gilt $A_i = \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j)$ für $1 \le i \le m$,

ebenso $B_j = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cap B_j)$, und beide Zerlegungen ebenso $B_j = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cap B_j)$, und beide Zerlegungen

sind disjunkt $\Rightarrow \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j)$ und

$\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)$

Betrachte die Menge $S = \{ (i,j) \mid A_i \cap B_j \neq \emptyset \}$.

Ist $(i,j) \in S$ und $x \in A_i \cap B_j$, dann gilt einerseits $f(x) = \alpha_i$

andererseits $f(x) = \beta_j$, insgesamt also $\alpha_i = \beta_j$.

Setze $\gamma_{ij} = \alpha_i = \beta_j$ für alle $(i,j) \in S$.

Es folgt $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{(i,j) \in S} \gamma_{ij} \mu(A_i \cap B_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j)$

$\square$

Definition des μ-Integrals von Stufenfunktionen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition (6.5)

Das μ-Integral einer Funktion $f \in E(\Omega, \mathscr{A})$ der Form $f = \sum_{i=1}^{m} u_i 1_{A_i}$ mit $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}_+$ und paarweise disjunkten $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A}$ mit $\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ ist definiert durch

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \mu(A_i),$$

wobei wir $u_i \mu(A_i)$ im Fall $u_i = 0$, $\mu(A_i) = +\infty$ gleich Null setzen.

Rechenregeln für das μ-Integral

Proposition (6.6)

Für $A \in \mathscr{A}$, $f, g \in E(\Omega, \mathscr{A})$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gelten folgende Rechenregeln.

(i) $\int 1_A \, d\mu = \mu(A)$

(ii) $\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$

(iii) $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

(iv) $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Beweis von Proposition 6.6

geg. $f, g \in E(\Omega, \mathcal{A})$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $A \in \mathcal{A}$

<u>zu (i)</u> $\int 1_A \, d\mu = \mu(A)$ gilt nach Def.

(deutlicher: $1_A = \sum_{i=1}^{1} u_i 1_{A_i}$ mit $u_1 = 1$,

$A_1 = A \Rightarrow \int 1_A \, d\mu = \sum_{i=1}^{1} u_i \mu(A_i) =$

$u_1 \mu(A_1) = \mu(A)$)

<u>zu (ii)</u> $f \in E(\Omega, \mathcal{A}) \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}_0$, $u_1, \dots, u_m$

$\in \mathbb{R}_+$, $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ paarw. disjunkt

mit $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_m$ und $f = \sum_{i=1}^{m} u_i 1_{A_i}$

$\Rightarrow \alpha f = \sum_{i=1}^{m} \alpha u_i 1_{A_i} \longrightarrow$

$$\int(\alpha f)\,d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha u_i\, \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^{m} u_i\, \mu(A_i)$$

$$= \alpha \int f\,d\mu$$

<u>zu (iii)</u> z. zg. $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$

Stelle g in der Form $g = \sum_{j=1}^{n} v_j 1_{B_j}$ dar,

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}_+$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$

paarw. disj. und $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$

$$\overset{}{\underset{(**)}{\Longrightarrow}} f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i 1_{A_i \cap B_j}, \quad g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_j 1_{A_i \cap B_j}$$

denn: $A_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j)$ (disjunkt) $\Longrightarrow$

$$1_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_i \cap B_j}, \quad 1_{B_j} = \sum_{i=1}^{m} 1_{A_i \cap B_j}$$

=

+

=

<u>zu (i</u>

Veru

Set

u_{ij} =

$f \leq g$

$\int f\,d\mu$

$)$

$1_{A_i \cap B_j}$

$$\Rightarrow \int f \, d\mu + \int g \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i \, \mu(A_i \cap B_j)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_j \, \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j) \, \mu(A_i \cap B_j)$$

$= \int (f+g) \, d\mu$, wegen $f + g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j) \, 1_{A_i \cap B_j}$

<u>zu (iv)</u> Vor: $f \leq g$ z.zg. $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Verwende die Darstellungen (**) von f und g.

Setze $S = \{(i,j) \mid A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$. Setze

$u_{ij} = u_i$, $v_{ij} = v_j$ für $(i,j) \in S$

$f \leq g \Rightarrow u_{ij} \leq v_{ij}$ für alle $(i,j) \in S \Rightarrow$

$$\int f \, d\mu = \sum_{(i,j) \in S} u_{ij} \, \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{(i,j) \in S} v_{ij} \, \mu(A_i \cap B_j) = \int g \, d\mu .$$

$\Box$

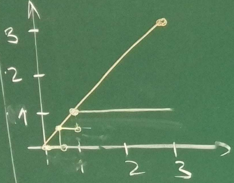
Ein neues Messbarkeitskriterium

Weiterhin sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein festgewählter Maßraum.

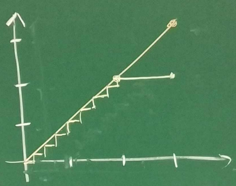
Satz (6.7)

Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ist genau dann $\mathscr{A}$-messbar, wenn eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $E(\Omega, \mathscr{A})$ mit $f = \sup f_n$ existiert.

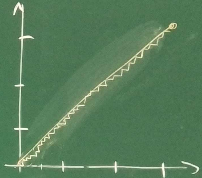
Approximation einer messbaren Funktion durch Stufenfunktionen



Schrittweite $\frac{1}{2}$



Schrittweite $\frac{1}{4}$



Schrittweite $\frac{1}{8}$

Beweis von Satz 6.7

geg. $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, zu zeigen:

f $\mathcal{A}$-messbar $\iff$ Es gibt eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$$f = \sup f_n$$

$n2$

$f(x)$

$\geq p+1$

denn.

$^{(n+1)} = f_{n+1}(x)$

$^{(n+1)} = f_{n+1}(x)$

„$\Leftarrow$" bereits bekannt: Das Supremum einer Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen ist $\mathcal{A}$-messbar

„$\Rightarrow$" Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils

$$A_{np} = \begin{cases} \{x \in \Omega \mid p2^{-n} \leq f(x) < (p+1)2^{-n}\}, & 0 \leq p < n2^n \\ \{x \in \Omega \mid f(x) \geq n\} & \text{für } p = n2^n \end{cases}$$

Offenbar sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Mengen A_{np} mit $0 \leq p \leq n2^n$ paarweise disjunkt und es gilt $\Omega = \bigcup_{j=0}^{n2^n} A_{np}$.

Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils

$f_n = \sum_{j=0}^{n2^n} p2^{-n} \cdot 1_{A_{np}}$ zu überprüfen:

(1) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend (2) $\sup f_n = f$

<u>zu (1)</u> Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $p \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$

gilt jeweils $A_{np} = A_{(n+1),2p} \cup A_{(n+1),2p+1}$,

denn für jedes $x \in \Omega$ gilt die Äquivalenz

$x \in A_{n,p} \iff p2^{-n} \leq f(x) < (p+1)2^{-n} \iff$

$2p\,2^{-(n+1)} \leq f(x) < (2p+2)\,2^{-(n+1)} \iff$

$2p\,2^{-(n+1)} \leq f(x) < (2p+1)\,2^{-(n+1)}$ oder $(2p+1)\,2^{-(n+1)} \leq f(x)$

$< (2p+2)\,2^{-n} \iff x \in A_{n+1,2p}$ oder $x \in A_{n+1,2p+1}$

$\iff x \in A_{n+1,2p} \cup A_{n+1,2p+1}$

Für alle $x \in A_{n,p}$ gilt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, denn:

1\. Fall: $x \in A_{n+1,2p} \Rightarrow f_n(x) = p\,2^{-n} = 2p\,2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x)$

2\. Fall: $x \in A_{n+1,2p+1} \Rightarrow f_n(x) = p\,2^{-n} < (2p+1)\,2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x)$

Für alle $x \in A_{n,2^n}$ gilt entweder

$x \in A_{n+1,p}$ für ein $p \in \{n2^{n+1}, \dots, (n+1)2^{n+1}-1\}$

oder $x \in A_{n+1,(n+1)2^{n+1}}$. Im ersten Fall gilt

$f_{n+1}(x) = p\,2^{-(n+1)} \geq n = f_n(x)$, im zweiten

$f_{n+1}(x) = n+1 > n = f_n(x)$

<u>zu (2)</u> Sei $x \in \Omega$. z.zg.: $f(x) = \sup f_n(x)$

1. <u>Fall</u>: $f(x) < +\infty$. Für alle $n \geq f(x)$ gilt dann $f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$ und somit

$$\sup f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

2. <u>Fall</u>: $f(x) = +\infty$. Dann gilt nach Def. $f_n(x) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \sup f_n(x) = \sup \mathbb{N} = +\infty = f(x)$ $\square$

μ-Integrale von monoton wachsenden Folgen

Satz (6.8)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega,\mathscr{A})$ und $f \in E(\Omega,\mathscr{A})$ eine Funktion mit $f \leq \sup f_n$. Dann folgt

$$\int f \; d\mu \quad \leq \quad \sup \int f_n \; d\mu.$$

Folgerung (6.9)

Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen in $E(\Omega,\mathscr{A})$ mit $\lim f_n = \lim g_n$, dann folgt $\sup \int f_n \; d\mu = \sup \int g_n \; d\mu$.

Beweis von Folgerung 6.9

geg.: zwei Folgen $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$: beide monoton wachsend mit $\lim\limits_{m \to \infty} f_m = \lim\limits_{n \to \infty} g_n$

Beh.: $\sup \int f_m \, d\mu = \sup \int g_n \, d\mu$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $f_m \leq \sup g_n$

Satz 6.8 $\Rightarrow$ $\int f_m \, d\mu \leq \sup \int g_n \, d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sup \int f_m \, d\mu \leq \sup \int g_n \, d\mu$

Der Beweis der umgekehrten Gleichung läuft analog. $\square$

Das μ-Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion

Definition (6.10)

Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\sup f_n = f$. Dann ist das μ-Integral von f definiert durch

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sup \int f_n \, d\mu.$$

Rechenregeln für Integrale nicht-neg. messb. Funktionen

Satz (6.11)

Für alle $\mathscr{A}$-messbaren Funktionen f, g und alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt

(i) $\int (\alpha f) \; d\mu = \alpha \int f \; d\mu$

(ii) $\int (f + g) \; d\mu = \int f \; d\mu + \int g \; d\mu$

(iii) Ist $f \leq g$, dann folgt $\int f \; d\mu \leq \int g \; d\mu$.

Der Beweis der umgekehrten Gleichung läuft analog. $\square$

Beweis von Satz 6.11

geg. $\mathcal{A}$-messbare Fkt. $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$

zu (i) zzg: $\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$

Satz 6.7 $\Rightarrow$ Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E(\Omega, \mathcal{A})$, monoton wachsend, mit $\sup f_n = f$. Dann folgt für alle $x \in \Omega$ $\sup\{(\alpha f_n)(x) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\alpha f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$

$= \alpha \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \sup(\alpha f_n) = \alpha f$

$\Rightarrow \int (\alpha f)\, d\mu = \sup \int (\alpha f_n)\, d\mu \underset{f_n \in E(\Omega, \mathcal{A})\ \forall n\in\mathbb{N}}{=} \sup \alpha \int f_n\, d\mu =$

$\alpha \cdot \sup \int f_n\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$

zu (ii) z.z. $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$

Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\sup g_n = g$. Für alle $x \in \Omega$ gilt

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sup f_n(x) + \sup g_n(x)$$

$$\underset{\uparrow (f_n),(g_n) \text{ mon. w.}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n+g_n)(x)$$

$$\underset{\uparrow (f_n+g_n) \text{ mon. w.}}{=} \sup (f_n+g_n)(x) \Rightarrow \sup(f_n+g_n) = \sup f_n + \sup g_n = f+g$$

$$\Rightarrow \int (f+g)\,d\mu = \sup \int (f_n+g_n)\,d\mu \underset{\uparrow f_n, g_n \in E(\Omega,\mathcal{A})}{=}$$

$$= \sup\left(\int f_n\,d\mu + \int g_n\,d\mu\right) \underset{\uparrow \text{Integrale mon. w.}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\int f_n\,d\mu + \int g_n\,d\mu\right)$$

[Integrale mon. w.

$$= \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu +$$

$$\sup \int g_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

$\square$

zu (iii) siehe Skript