Erinnerung:

- σ-Algebra in einer Menge Ω = Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

  (ii) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

  (iii) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, dann gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

  $\mathcal{B}_d$ = Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$

  $\mathcal{A}_d$ = σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen im $\mathbb{R}^d$

  $\overline{\mathcal{B}}_1$ = Borelsche σ-Algebra in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

- Messraum = Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei Ω Menge und $\mathcal{A}$ σ-Algebra in Ω

$\mathcal{A}$ σ-Algebra in Ω

- Maß auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ = Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, so dass (i) $\mu(\emptyset) = 0$ (ii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen (σ-Additivität)
  μ_d = Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_d)$
- Maßraum = Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, wobei $(\Omega, \mathcal{A})$ Messraum und μ Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$

Definition messbarer Abbildungen

Definition (5.1)

Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(\Omega', \mathscr{A}')$ Messräume.

- Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ wird messbar bezüglich $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}'$ genannt, wenn $f^{-1}(A') \in \mathscr{A}$ für alle $A' \in \mathscr{A}'$ erfüllt ist.
- Ist speziell $(\Omega', \mathscr{A}') = (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathscr{B}}_1)$, dann sprechen wir von einer $\mathscr{A}$-messbaren Funktion.
- Ist darüber hinaus $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\mathscr{A} = \{A \cap \Omega \mid A \in \mathscr{B}_d\}$, dann nennen wir die bezüglich $\mathscr{A}$ messbaren Funktionen auch Borel-messbar.

Jede konstante Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ zwischen Messräumen $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(\Omega', \mathscr{A}')$ ist messbar.

Komposition messbarer Abbildungen

Proposition (5.2)

Die Komposition messbarer Abbildungen ist messbar. Genauer: Sind $(\Omega, \mathscr{A})$, $(\Omega', \mathscr{A}')$ und $(\Omega'', \mathscr{A}'')$ drei Messräume, ist $f : \Omega \to \Omega'$ messbar bezüglich $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ und $g : \Omega' \to \Omega''$ messbar bezüglich $\mathscr{A}', \mathscr{A}''$, dann ist $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ messbar bezüglich $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}''$.

Proposition (5.3)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 5.1 gewählt. Ist $\mathscr{E}'$ ein Erzeugendensystem von $\mathscr{A}'$ als σ-Algebra, so ist f genau dann messbar bezüglich $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}'$, wenn $f^{-1}(E') \in \mathscr{A}$ für alle $E' \in \mathscr{E}'$ erfüllt ist.

Messbarkeit der Indikatorfunktion

Proposition (5.4)

Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum und $A \subseteq \Omega$ eine Teilmenge. Die Indikatorfunktion $1_A : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ von A ist definiert durch

$$1_A(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

Diese Funktion ist genau dann messbar bezüglich $\mathscr{A}$, wenn A in $\mathscr{A}$ enthalten ist.

Beweis von Proposition 5.4

geg: Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$, $A \subseteq \Omega$

$1_A : \Omega \to \{0,1\}$ Indikatorfunktion der Menge A

<u>Beh.</u>: 1_A ist messbar $\Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}$

„$\Longleftarrow$" Sei $B \in \bar{\mathcal{B}}_1$. z.zg.: $1_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

1. Fall: $0, 1 \notin B$. Dann gilt $1_A^{-1}(B) = \emptyset$.
2. Fall: $0, 1 \in B$. Dann gilt $1_A^{-1}(B) = \Omega$
3. Fall: $0 \notin B$, $1 \in B$. Dann gilt $1_A^{-1}(B) = A$
4. Fall: $0 \in B$, $1 \notin B$. Dann gilt $1_A^{-1}(B) = \Omega \setminus A$

In allen vier Fällen gilt $1_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

„$\Rightarrow$" Es gilt $\{1\} \in \bar{\mathcal{B}}_1$. 1_A messbare Funktion $\Rightarrow$ $1_A^{-1}(\{1\}) = A$ liegt in $\mathcal{A}$.

$\square$

Borel-Messbarkeit stetiger Funktionen

Proposition (5.5)

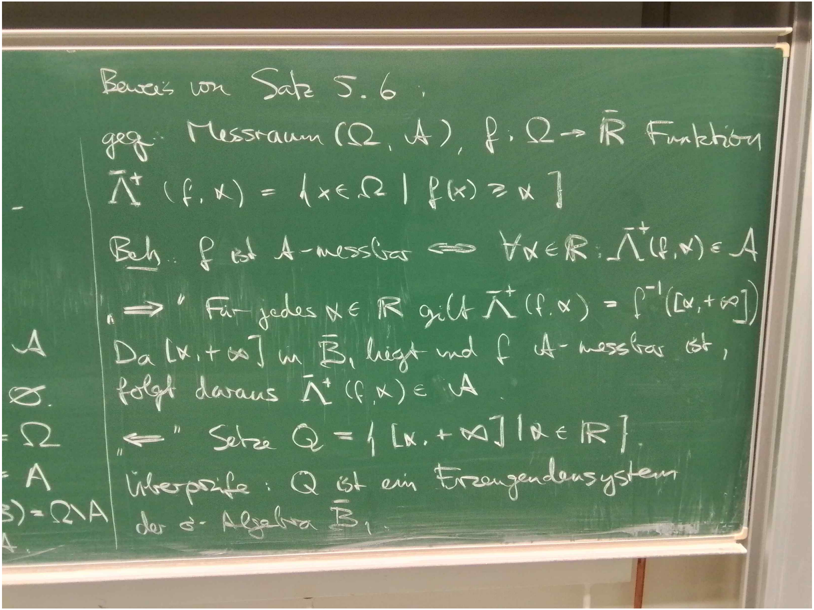
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f Borel-messbar.

Messbarkeitskriterium für Funktionen

Satz (5.6)

Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar bezüglich $\mathscr{A}$, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\bar{\Lambda}^+(f, \alpha) \quad = \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha\} \qquad \text{in } \mathscr{A} \text{ liegt.}$$



(Die Überprüfung wird im Skript ausgeführt.)

Nach Prop. 5.3 genügt es z.zg., dass $f^{-1}(B)$ für jedes $B \in Q$ in $\mathcal{A}$ liegt. Diese Urbilder sind genau die Mengen $\bar{\Lambda}^{+}_{f}(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\square$

Weitere Messbarkeitskriterien

Folgerung (5.7)

Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum und $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist die $\mathscr{A}$-Messbarkeit von f zu jeder der folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\Lambda^+(f, \alpha) = \{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha\} \in \mathscr{A}$.

(ii) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\Lambda^-(f, \alpha) = \{x \in \Omega \mid f(x) < \alpha\} \in \mathscr{A}$.

(iii) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\bar{\Lambda}^-(f, \alpha) = \{x \in \Omega \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{A}$.

Beweis von Folgerung 5.7, Teil (i)

z.zg.: f $\mathcal{A}$-messbar $\Longleftrightarrow \Lambda^+(f,\alpha) \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

„$\Longrightarrow$" f $\mathcal{A}$-messbar $\overset{\text{Satz 5.6}}{\Longrightarrow} \bar{\Lambda}^+(f,\alpha) \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt $\Lambda^+(f,\alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{\Lambda}^+(f, \alpha + \frac{1}{n})$

wegen $f(x) > \alpha \Longleftrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,

für jedes $x \in \Omega$. Aus $\bar{\Lambda}^+(f, \alpha + \frac{1}{n}) \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ folgt

also $\Lambda^+(f,\alpha) \in \mathcal{A}$.

„$\Longleftarrow$" Es genügt z.zg., dass $\bar{\Lambda}^+(f,\alpha) \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt $\bar{\Lambda}^+(f,\alpha) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^+(f, \alpha - \frac{1}{n})$ wegen

$f(x) \geq \alpha \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: f(x) > \alpha - \frac{1}{n}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Korrektur letzte Zeile: „(...) $\forall\, n \in \mathbb{N} : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}$, für jedes $x \in \Omega$“

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt $\bar{\Lambda}^+(f,\alpha) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda^+(f,\alpha-\frac{1}{n})$ wegen $f(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: f(x) > \alpha - \frac{1}{n}$. für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aus $\Lambda^+(f,\alpha-\frac{1}{n}) \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$ folgt also $\bar{\Lambda}^+(f,\alpha) \in \mathcal{A}$.

$\square$

Folgerung (5.8)

Sind $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar bezüglich $\mathscr{A}$, dann sind die Mengen

(i) $\{x \in \Omega \mid f(x) < g(x)\}$

(ii) $\{x \in \Omega \mid f(x) = g(x)\}$

(iii) $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$

in $\mathscr{A}$ enthalten.

Beweis von Folgerung 5.8

geg.: Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$, $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Fkt.

zu (i) $A = \{x \in \Omega \mid f(x) < g(x)\}$ z.zg.: $A \in \mathcal{A}$

Für jedes $x \in \Omega$ gilt $f(x) < g(x) \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{Q} : f(x) < a < g(x)$

Daraus folgt $A = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \left(\Lambda^-(f,a) \cap \Lambda^+(g,a) \right)$

Aus $\Lambda^-(f,a) \in \mathcal{A}$ und $\Lambda^+(g,a) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{Q}$ folgt also $A \in \mathcal{A}$.

zu (ii) z.zg.: $B = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{A}$

Dies folgt aus (i) und $B = \{x \in \Omega \mid f(x) < g(x)\} \cup \{x \in \Omega \mid g(x) < f(x)\}$.

zu (iii) z.zg.: $C = \{x \in \Omega \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}$

Dies folgt aus (ii) und $C = \Omega \setminus B$. $\square$

Konvention zum Rechnen mit $\pm\infty$: Addition, Subtraktion

$+$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	undef.
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$	undef.	$+\infty$	$+\infty$

$-$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	undef.	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$a - b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	undef.

Konvention zum Rechnen mit $\pm\infty$: Multiplikation

$\cdot$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
$a=0$	0	0	0	0	0
$a>0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

Messbarkeit von Summen und Produkten

Proposition (5.9)

Ist $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathscr{A}$-messbar, dann gilt dasselbe für die Funktion $a + bg$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Satz (5.10)

Sind $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei $\mathscr{A}$-messbare Funktionen, dann sind auch die Funktion $f \pm g$ und fg messbar bezüglich $\mathscr{A}$, sofern sie auf ganz Ω definiert sind.

zu (iii) z.z.g.: $B = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{A}$

Dies folgt aus (i) und $B = \{x \in \Omega \mid f(x) < g(x)\} \cup \{x \in \Omega \mid g(x) < f(x)\}$.

Beweis von Satz 5.10

geg: Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$, $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Fkt.

(i) z.z.g. $f+g$ ist messbar (falls auf Ω definiert)

Es gilt $\underbrace{\{x \in \Omega \mid f(x) + g(x) \geq \alpha\}}_{= \overline{\Lambda}^+(f+g, \alpha)} = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha - g(x)\}$

$= \{x \in \Omega \mid f(x) = \alpha - g(x)\} \cup \{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha - g(x)\}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$

Nach Folgerung 5.8 liegen die beiden Mengen rechts in $\mathcal{A}$, somit auch $\overline{\Lambda}^+(f+g, \alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Also ist $f+g$ messbar.

(ii) Mit g ist auch $-g$ messbar (nach Prop. 5.9), nach (i) also auch $f - g = f + (-g)$.

(iii) z.zg.: fg ist messbar

Wir beschränken uns auf den Fall, dass f und g reellwertig sind (Rest siehe Skript)

Es gilt $fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$

Somit reicht es z.zg., dass für jede reellwertige, messbare Fkt. f auch f^2 messbar ist. Dafür reicht es z.zg.:

$$\bar{\Lambda}^{+}(f^2, \alpha) \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ist $\alpha \leq 0$, dann gilt $f(x)^2 \geq \alpha \ \forall x \in \Omega$.

$$\Rightarrow \bar{\Lambda}^{+}(f^2, \alpha) = \Omega \Rightarrow \bar{\Lambda}^{+}(f^2, \alpha) \in \mathcal{A}$$

Ist $\alpha > 0$, dann gilt $\forall x \in \Omega$:

$$f(x)^2 \geq \alpha \Leftrightarrow f(x) \geq \sqrt{\alpha} \vee f(x) \leq -\sqrt{\alpha}$$

Daraus folgt $\bar{\Lambda}^+(f^2,\alpha) = \bar{\Lambda}^+(f,\sqrt{\alpha}) \cup \bar{\Lambda}^-(f,-\sqrt{\alpha})$

Da die Mengen rechts in $\mathcal{A}$ liegen, gilt dasselbe für $\bar{\Lambda}^+(f^2,\alpha)$ $\square$

Messbarkeit von Supremum und Infimum

Satz (5.11)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathscr{A}$-messbaren Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ und $\liminf f_n$ messbar bezüglich $\mathscr{A}$.

Messbarkeit und punktweise Konvergenz

Folgerung (5.12)

(i) Sind $f_1, ..., f_r : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen bezüglich $\mathscr{A}$, dann gilt dasselbe für $x \mapsto \min\{f_1(x), ..., f_r(x)\}$ und $x \mapsto \max\{f_1(x), ..., f_r(x)\}$.

(ii) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathscr{A}$-messbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert, dann ist auch f eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion.

Zerlegung in einen positiven und einen negativen Anteil

Ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion, dann definieren wir Funktionen f^+ und f^- durch $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ und $f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$. Es gilt dann $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

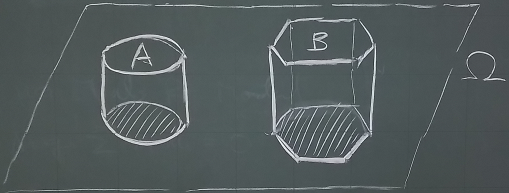
Folgerung (5.13)

Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathscr{A}$-messbar, wenn f^+ und f^- beide $\mathscr{A}$-messbar sind. Ist die Funktion f messbar bezüglich $\mathscr{A}$, dann gilt dasselbe für $|f|$.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $A, B \in \mathcal{A}$

mit $A \cap B = \emptyset$

$$f : \Omega \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in A \\ 5 & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



naheliegende Definition für das Integral:

$$\int f \, d\mu = 3\mu(A) + 5\mu(B)$$

Definition der Stufenfunktionen

Definition (6.1)

Als $\mathscr{A}$-Stufenfunktion bezeichnen wir eine nichtnegative, $\mathscr{A}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele reelle Werte annimmt. Die Menge der $\mathscr{A}$-Stufenfunktionen bezeichnen wir mit $E(\Omega, \mathscr{A})$.

Eigenschaften von Stufenfunktionen

Proposition (6.2)

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ ist genau dann eine $\mathscr{A}$-Stufenfunktion, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$, paarweise disjunkte Mengen $A_1, ..., A_n \in \mathscr{A}$ mit

$$\Omega \quad = \quad A_1 \cup ... \cup A_n$$

und $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}_+$ existieren, so dass $f = \sum_{i=1}^{n} u_i 1_{A_i}$ erfüllt ist.

Proposition (6.3)

Sind $f, g \in E(\Omega, \mathscr{A})$, dann sind auch die Funktionen $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ in $E(\Omega, \mathscr{A})$ enthalten.

Lemma (6.4)

Sei $f \in E(\Omega, \mathscr{A})$, und seien

$$f \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{A_i} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j 1_{B_j}$$

zwei Darstellungen von f mit $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}_+$ sowie $A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n \in \mathscr{A}$, wobei $A_1, ..., A_m$ und $B_1, ..., B_n$ jeweils paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung jeweils Ω ergibt. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j).$$

Definition des μ-Integrals von Stufenfunktionen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition (6.5)

Das μ-Integral einer Funktion $f \in E(\Omega, \mathscr{A})$ der Form $f = \sum_{i=1}^{m} u_i 1_{A_i}$ mit $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}_+$ und paarweise disjunkten $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A}$ mit $\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ ist definiert durch

$$\int f \; d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \mu(A_i),$$

wobei wir $u_i \mu(A_i)$ im Fall $u_i = 0$, $\mu(A_i) = +\infty$ gleich Null setzen.