Definition der σ-Additivität von Inhalten

Definition (3.1)

Ein Inhalt c auf einem Mengenring $\mathscr{R}$ wird als σ-additiv oder auch abzählbar additiv bezeichnet, wenn für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter $A_m \in \mathscr{R}$ mit $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathscr{R}$ jeweils $c(A) = \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m)$ erfüllt ist.

Satz (3.4)

Der Jordan-Inhalt $c_n : \mathscr{R}_n \to \mathbb{R}_+$ auf dem Mengenring $\mathscr{R}_n$ der Figuren ist ein σ-additiver Inhalt.

Definition der σ-Algebren

Definition (3.5)

Sei Ω eine Menge. Ein σ-Ring in Ω ist ein Ring $\mathscr{R}$, der nicht nur unter endlichen, sondern auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Ist also $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{R}$, dann muss auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathscr{R}$ liegen. Man nennt $\mathscr{R}$ eine σ-Algebra, wenn $\mathscr{R}$ zugleich σ-Ring und Algebra ist.

Äquivalente Charakterisierung der σ-Algebren

Proposition (3.6)

Ein Mengensystem $\mathscr{A}$ in Ω ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\varnothing \in \mathscr{A}$ gilt, für jedes $A \in \mathscr{A}$ auch das Komplement $\Omega \setminus A$ in $\mathscr{A}$ liegt, und wenn für jede Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathscr{A}$ enthalten ist.

Jede σ-Algebra $\mathscr{A}$ ist auch abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten.

Definition der Borelschen σ-Algebra $\mathscr{B}_n$

Ebenso wie Mengenringe können auch σ-Algebren durch Angabe eines Erzeugendensystems defininiert werden.

Definition (3.7)

Die eindeutig bestimmte σ-Algebra $\mathscr{B}_n$, die von den Quadern im $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird, nennt man die Borelsche σ-Algebra. Ihre Elemente bezeichnet man als Borelmengen.

Erzeugendensysteme von $\mathscr{B}_n$

Satz (3.8)

Die Borelsche σ-Algebra wird außer von den Quadern noch von folgenden Mengensystemen erzeugt.

(i) dem Ring der Figuren im $\mathbb{R}^n$

(ii) dem System aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

(iii) dem System aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

(iv) dem System aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

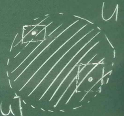
Beweis von Satz 3.8 (Fortsetzung)

zu (ii) $\mathcal{B}_n$ = Borelsche σ-Algebra = σ-Algebra erzeugt von den Quadern im $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}'$ = σ-Algebra erzeugt von den offen Teilmengen im $\mathbb{R}^n$

Nachweis von $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}'$: bereits erledigt

Nachweis von $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_n$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.



z.zg. $U \in \mathcal{B}_n$. Setze $U_{\mathbb{Q}} = U \cap \mathbb{Q}$.

Für jedes $a \in U_{\mathbb{Q}}$ definiere $\delta_a = \sup\{r \mid B_r(a) \subseteq U\}$

sofern das Supremum endl. ist, ansonsten $\delta_a = 1$.

Dabei bezeichnet $B_r(a)$ den offen Ball bzgl $\| \cdot \|_\infty$.

(Dies ist ein offenener Würfel der Kantenlänge $2r$.)

<u>Beh.</u>: $U = \bigcup_{a \in U_{\mathbb{Q}}} B_{\delta_a}(a)$

„$\supseteq$" Annahme: Es gibt ein $a \in U_{\mathbb{Q}}$ mit $B_{\delta_a}(a) \not\subseteq U$

Sei $x \in B_{\delta_a}(a) \setminus U$. Setze $\delta = \|x-a\|_\infty$ $\quad x \in B_{\delta_a}(a)$

$\Rightarrow \delta < \delta_a$. Sei $\delta' \in \mathbb{R}^+$ mit $\delta < \delta' < \delta_a \Rightarrow x \in B_{\delta'}(a)$

$\Rightarrow B_{\delta'}(a) \not\subseteq U$ ↯ zur Definition von δ_a

„$\subseteq$" Sei $x_0 \in U$. U offen $\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\delta(x_0) \subseteq U$

Da $\mathbb{Q}^n$ dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, existiert ein $a \in U_{\mathbb{Q}}$ mit

$\|a-x_0\|_\infty < \frac{1}{2}\delta$ (*) <u>Beh.</u>: $B_{\frac{1}{2}\delta}(a) \subseteq B_\delta(x_0) \subseteq U$

denn: Sei $x \in B_{\frac{1}{2}\delta}(a) \Rightarrow \|x-a\|_\infty < \frac{1}{2}\delta$, außerdem $\|a-x_0\|_\infty < \frac{1}{2}\delta$

$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\Longrightarrow} \|x-x_0\|_\infty \le \|x-a\|_\infty + \|a-x_0\|_\infty < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$

Aus der Beh. folgt $\delta_a \ge \frac{1}{2}\delta \Rightarrow x_0 \in B_{\delta_a}(a)$ wegen (*)

zu (iii) Sei $\mathcal{B}''$ die σ-Algebra erzeugt von den abg. Mengen $\Rightarrow \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}''$, denn jede offene Menge liegt in $\mathcal{B}''$, weil sie Komplement einer abgeschlossenen Menge ist. ebenso: $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}'$

also $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' \overset{(ii)}{=} \mathcal{B}_n$

zu (iv) $\mathcal{B}''' = \sigma$-Algebra erzeugt von den kompakten Teilmengen im $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}''' \subseteq \mathcal{B}''$ offensichtlich, da jede kompakte Menge im $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist

Nachweis von $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}'''$:

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. z.zg.: $V \in \mathcal{B}'''$

Definiere $V_m = V \cap [-m,m]^n \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} [-m,m]^n = \mathbb{R}^n \Rightarrow V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$$

Jedes V_m ist kompakt. $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : V_m \in \mathcal{B}'''$

$$\underset{\mathcal{B}''' \text{ ist } \sigma\text{-Alg.}}{\Rightarrow} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m \in \mathcal{B}''' \Rightarrow V \in \mathcal{B}''' \qquad \square$$

Definition der Maßräume

Für den weiteren Verlauf definieren wir die Bezeichnung $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Außerdem setzen wir $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Definition (3.9)

Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathscr{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, die den Bedingungen $\mu(\varnothing) = 0$ und

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$$

für jede Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathscr{A}$ genügt, wird als Maß auf $\mathscr{A}$ bezeichnet. Ein Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ bestehend aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ in Ω und einem Maß μ auf $\mathscr{A}$ wird Maßraum genannt.

Beispiele für Maßräume:

(1) Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Dann ist $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, $A \mapsto |A|$
ein Maß, das sog. <u>Zählmaß</u> (und das
Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein Maßraum).

(2) Sei Ω eine endliche Menge, $n = |\Omega|$ und
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$,
$A \mapsto \frac{1}{n}|A|$ ein Maß mit $\mu(\Omega) = 1$.

Ein Maß μ auf einer Menge Ω mit
$\mu(\Omega) = 1$ wird Wahrscheinlichkeitsmaß genannt.

Ein Maß μ auf einer Menge Ω wird

ß"

(3) Sei Ω eine beliebige Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra und $x \in \Omega$. Dann ist

$$\delta_x : \mathcal{A} \to \{0,1\},\; A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

ein Maß, das sog. Dirac-Maß im Punkt x.

Definition der äußeren Maße

Definition (3.10)

Eine Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ wird ein äußeres Maß auf Ω genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$

(ii) Für alle $A, B \subseteq \Omega$ folgt aus $A \subseteq B$ jeweils $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

(iii) Für jede Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt die Abschätzung

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \quad \le \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Eigenschaft (ii) bezeichnet man als Monotonie, Eigenschaft (iii) als σ-Subadditivität.

Das äußere Maß zu einem Inhalt

Satz (3.11)

Sei $\mathscr{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring und $c : \mathscr{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt. Für jedes $A \subseteq \Omega$ definieren wir

$$\mu_c^*(A) \quad = \quad \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathscr{R}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} ,$$

wobei $\inf(\varnothing) = +\infty$ gesetzt wird. Dann ist durch μ_c^* ein äußeres Maß auf Ω definiert.

Beziehung zum äußeren Maß c^* aus § 2:

Für beliebige Teilmengen $A \subseteq \Omega$ gilt im Allgemeinen $c^*(A) \geq \mu_c^*(A)$, aber nicht Gleichheit.

Beweis von Satz 3.11:

geg: Ring $\mathcal{R}$, $c: \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ Inhalt

Für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ sei

$$\mu_c^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{R} \text{ mit } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A \right\}$$

z.zg.: μ_c^* ist ein äußeres Maß auf Ω

überprüfe dafür: (1) $\mu_c^*(\emptyset) = 0$

(2) Aus $A \subseteq B$ folgt $\mu_c^*(A) \leq \mu_c^*(B)$.

(3) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Teilmengen von Ω, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_c^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n)} \quad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

zu (1) Setzt man $A_n = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$, dann folgt $\sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) = 0 \Rightarrow$ Die Zahl 0 ist in der Menge, mit der $\mu_c^*(\emptyset)$ definiert wird, enthalten. Da die Menge in $\overline{\mathbb{R}}_+$ enthalten ist, muss das Infimum gleich null sein.

zu (2) Seien A, B Teilmengen mit $A \subseteq B$. Jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq B$ erfüllt auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq A$ $\Rightarrow$ Die Menge M_B, mit der $\mu_c^*(B)$ definiert ist, ist enthalten in der Menge $M_A \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$, mit der $\mu_c^*(A)$ definiert wird, d.h. $M_B \subseteq M_A \Rightarrow \mu_c^*(A) = \inf M_A \leq \inf M_B = \mu_c^*(B)$

zu (3) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und A wie angeg.

Gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n) = +\infty$, dann ist die Ungleichung offensichtlich. Setze also voraus, die Summe ist endlich, und somit auch $\mu_c^*(A_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es genügt z.zg.:

$$\mu_c^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n) + \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.

Nach Def. gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} c(A_{nk}) <$

$$\mu_c^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n} \quad \text{mit} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} \supseteq A_n .$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A$$

$$\Rightarrow \mu_c^*(A) \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c(A_{nk})}_{\in M_A} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_c^*(A_n) + 2^{-n} \varepsilon \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n) +$$

$$\varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n) + \varepsilon . \qquad \square$$

Definition (3.12)

Das zum Jordan-Inhalt c_n auf dem Ring $\mathscr{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$ gehörende äußere Maß $\mu^*_{c_n}$ wird äußeres Lebesgue-Maß genannt. Wir bezeichnen es mit μ^*_n.

Erinnerung: Äußere Charakterisierung c-messbarer Mengen

Proposition (2.22)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring und $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eine beliebig vorgegebene Menge.

(i) Ist $F \in \mathscr{R}$ mit $F \supseteq A$, dann gilt $c_*(A) = c(F) - c^*(F \setminus A)$.

(ii) Genau dann ist A c-messbar, wenn $c(F) \geq c^*(A) + c^*(F \setminus A)$ gilt.

Definition der μ^*-messbaren Mengen

Definition (3.13)

Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß. Wir bezeichnen eine Menge $A \subseteq \Omega$ als μ^*-messbar, wenn für alle $F \subseteq \Omega$ die Ungleichung

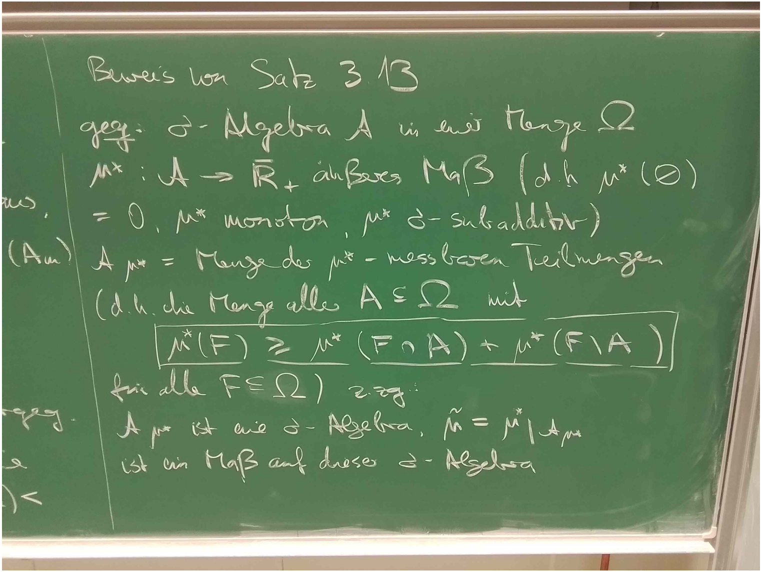
$$\mu^*(F) \quad \geq \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen

Satz (3.14)

Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß und $\mathscr{A}_{\mu^*}$ die Gesamtheit der μ^*-messbaren Mengen. Dann ist $\mathscr{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra, und durch $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathscr{A}_{\mu^*}}$ ist ein Maß auf $\mathscr{A}_{\mu^*}$ definiert.

Korrektur: Beweis von Satz 3.14



Vorgehensweise: zeige (1) $\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$

(2) $A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$

(3) $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$

(4) $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen

(5) $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist abgeschlossen unter bel. abzählbaren Vereinigungen

(6) $\tilde{\mu}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

zu (1) Für jedes $F \subseteq \Omega$ gilt $\mu^*(F) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(F)$
$= \mu^*(F \cap \emptyset) + \mu^*(F \setminus \emptyset)$. $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$

zu (2) Sei $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ z.zg.: $A_1 = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Sei $F \subseteq \Omega \Rightarrow F \cap A_1 = F \cap (\Omega \setminus A) = F \setminus A$

$F \setminus A_1 = F \setminus (\Omega \setminus A) = F \cap A$

$$\Rightarrow \mu^*(F) \underset{\uparrow A \in \mathcal{A}_{\mu^*}}{\geq} \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) = \mu^*(F \setminus A_1) + \mu^*(F \cap A_1) \Rightarrow A_1 \in \mathcal{A}_{\mu^*}$$

zu (3) geg. $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ z.zg.: $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Sei $F \subseteq \Omega$. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow \mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$

$B \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow \mu^*(F \setminus A) \geq \mu^*((F \setminus A) \cap B) + \mu^*(F \setminus (A \cup B))$

$$\Rightarrow \mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \geq \mu^*(F \cap A) +$$
$$\mu^*((F \setminus A) \cap B) + \mu^*(F \setminus (A \cup B)) \geq$$
$$\mu^*((F \cap A) \cup ((F \setminus A) \cap B)) + \mu^*(F \setminus (A \cup B)) \overset{(*)}{=}$$
$$\mu^*(F \cap (A \cup B)) + \mu^*(F \setminus (A \cap B)) \quad (**)$$

$$(F \cap A) \cup ((F \setminus A) \cap B) = (F \cap A) \cup (F \cap A \cap B) \cup ((F \setminus A) \cap B)$$
$$= (F \cap A) \cup (F \cap B) = F \cap (A \cup B)$$

Aus $(**)$ folgt $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$