Definition von innerem und äußerem Maß

Definition (2.12)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt und $A \subseteq \Omega$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind das innere Maß $c_*(A)$ bzw. das äußere Maß $c^*(A)$ von A bezüglich c definiert durch

$$c_*(A) = \sup\{c(B) \mid B \in \mathscr{R}, B \subseteq A\}$$

und

$$c^*(A) = \inf\{c(B) \mid B \in \mathscr{R}, B \supseteq A\}.$$

Sowohl beim inneren als auch beim äußeren Maß ist auch der Wert $+\infty$ möglich. Es gilt $c^*(A) = +\infty$ genau dann, wenn kein $B \in \mathscr{R}$ mit $B \supseteq A$ existiert.

Definition der c-messbaren Mengen

Definition (2.16)

Sind die Werte $c_*(A)$ und $c^*(A)$ beide endlich und gilt $c_*(A) = c^*(A)$, dann bezeichnen wir A als c-messbar und definieren $c(A) = c^*(A)$. Die c_n-messbaren Teilmengen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ werden auch als Jordan-messbar bezeichnet, und man nennt $c_n(E)$ den Jordan-Inhalt der Teilmenge E.

Der Ring der c-messbaren Mengen

Satz (2.20)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Dann bilden die c-messbaren Mengen einen Ring $\mathscr{R}_c$, der $\mathscr{R}$ als Teilmenge enthält. Durch $A \mapsto c(A)$ ist ein Inhalt auf $\mathscr{R}_c$ definiert.

Insbesondere bilden die Jordan-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ also einen Mengenring in $\mathbb{R}^n$, der die Figuren enthält.

Die äußere Charakterisierung der c-messbaren Mengen

Proposition (2.23)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring und $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eine beliebig vorgegebene Menge.

(i) Ist $F \in \mathscr{R}$ mit $F \supseteq A$, dann gilt $c_*(A) = c(F) - c^*(F \setminus A)$.

(ii) Genau dann ist A c-messbar, wenn $c(F) \geq c^*(A) + c^*(F \setminus A)$ gilt.

Beweis von Proposition 2.23

zu (i) geg.: Ring $\mathcal{R}$, Inhalt $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$, $A \subseteq \Omega$

Beh.: $F \in \mathcal{R}$, $F \supseteq A \Rightarrow c_*(A) = c(F) - c^*(F \setminus A)$

Sei $M = \{ c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \subseteq A \}$. zeige:

(1) $c(F) - c^*(F \setminus A)$ ist obere Schranke von M

(2) Die Zahl ist kleinste obere Schranke von M

zu (1) Sei $B \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq A \Rightarrow F \setminus B \supseteq F \setminus A$

$\Rightarrow c^*(F \setminus A) \leq c^*(F \setminus B) = c(F \setminus B)$

$\Rightarrow c(F) - c^*(F \setminus A) \geq c(F) - c(F \setminus B) = c(B)$

$\uparrow F = B \cup (F \setminus B)$ Additivität zu (2) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg.: $c(F) - c^*(F \setminus A)$ ist keine obere Schranke der Menge M

Def. von $c^*(F \setminus A) \Rightarrow \exists B' \in \mathcal{R}$ mit $B' \supseteq F \setminus A$ und

$c(B') < c^*(F \setminus A) + \varepsilon \qquad A = F \setminus (F \setminus A) \supseteq F \setminus B'$

Setze $B = F \setminus B' \Rightarrow B \in \mathcal{R}$, $A \supseteq B$ und

$c(B) = c(F) - c(B') > c(F) - c^*(F \setminus A) - \varepsilon$

$\Rightarrow c(F) - c^*(F \setminus A) - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von M, da $c(B) \in M$

zu (ii) Beh: A c-messbar $\Leftrightarrow c(F) \geq c^*(A) + c^*(F \setminus A)$

„$\Rightarrow$" Vor. $\Rightarrow c_*(A) = c^*(A) \Rightarrow c(F) - c^*(F \setminus A) = c^*(A)$

$\Rightarrow c(F) = c^*(A) + c^*(F \setminus A)$, insb. gilt „$\geq$"

„$\Leftarrow$" Subadditivität von $c^* \Rightarrow c(F) = c^*(F) \leq c^*(A) + c^*(F \setminus A)$

Mit der Voraussetzung erhält $c(F) = c^*(A) + c^*(F \setminus A) \Rightarrow$

$$c^*(A) = c(F) - c^*(F \setminus A) \overset{(i)}{=} c_*(A)$$

$\Rightarrow$ A ist c-messbar. $\square$

Definition der σ-Additivität von Inhalten

Definition (3.1)

Ein Inhalt c auf einem Mengenring $\mathscr{R}$ wird als σ-additiv oder auch abzählbar additiv bezeichnet, wenn für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter $A_m \in \mathscr{R}$ mit $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathscr{R}$ jeweils $c(A) = \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m)$ erfüllt ist.

Die σ-Additivität des Jordan-Inhalts

Lemma (3.2)

Sei $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtleerer kompakter Teilmengen $A_m \subseteq \mathbb{R}^n$, es gelte also $A_m \supseteq A_{m+1} \supsetneq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Schnittmenge $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ nichtleer.

Lemma (3.3)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und c der Jordan-Inhalt auf dem Ring $\mathscr{R}$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$. Ist $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathscr{R}$ mit $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \varnothing$, dann gilt $\lim_m c(A_m) = 0$.

Satz (3.4)

Der Jordan-Inhalt $c_n : \mathscr{R}_n \to \mathbb{R}_+$ auf dem Mengenring $\mathscr{R}_n$ der Figuren ist ein σ-additiver Inhalt.

Beweis von Lemma 3.2:

geg.: Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ mit $A_m \supseteq A_{m+1}$, $A_m \neq \emptyset$ $\forall m\in\mathbb{N}$.

Jede der Mengen sei kompakt.

<u>Beh.</u>: $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m \neq \emptyset$

Ang. $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = \emptyset$. Setze $B_m = A_1 \setminus A_m$ $\forall m\in\mathbb{N}$. Dann ist $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A_1 bzgl. der auf A_1 induzierten Topologie

(Grund: A_m abgeschlossen in A_1 $\Longrightarrow$ $B_m = A_1 \setminus A_m$ ist offen in A_1. Die B_m bilden eine Überdeckung wegen $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m =$

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_m) = A_1 \setminus \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = A_1 \setminus \emptyset = A_1 \;)$$

Da A_1 kompakt ist, existiert eine endl. Teilüberdeckung $A_1 = B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_r}$ mit $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow A_1 = \bigcup_{j=1}^{r} (A_1 \setminus A_{i_j}) = A_1 \setminus \Big(\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}\Big)$$

$$\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j} = \emptyset \Rightarrow A_i = \emptyset,$$ falls i maximal unter $i_1, \dots, i_r$ ↯ da alle A_n nichtleer. □

□

Beweis von Lemma 3.3

geg: $\mathcal{R}$ = Ring der Figuren im $\mathbb{R}^n$

c = Jordan-Inhalt auf $\mathbb{R}^n$

$(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ monoton fallende Folge in $\mathcal{R}$

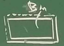
mit $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m = \emptyset$ zzg: $\lim_{m \to \infty} c(A_m) = 0$

Ang. $\delta = \lim_{m \to \infty} c(A_m)$ ist positiv

Dann gilt $A_m \neq \emptyset \ \forall m \in \mathbb{N}$.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ wähle eine Figur B_m mit

$\overline{B}_m \subseteq A_m$ und $c(A_m) - c(B_m) \leq 2^{-m} \delta$



A_m Setze $C_m = B_1 \cap \ldots \cap B_m$

⇒ erhalte durch $(\bar{C}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Lemma 3.2 ⇒ Falls $\bar{C}_m \neq \emptyset$ für alle $m\in\mathbb{N}$ gilt, dann folgt $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \bar{C}_m \neq \emptyset$. ↯ da $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m = \emptyset$ und $A_m \supseteq \bar{C}_m \ \forall m\in\mathbb{N}$. Es genügt also, $\bar{C}_m \neq \emptyset$ für alle $m\in\mathbb{N}$ zu zeigen. zeige dafür: $c(C_m) \geq c(A_m) - \delta(1-2^{-m})$ (*) für alle $m\in\mathbb{N}$. Beweis durch vollst. Induktion über m

$\underline{m=1}$ $c(A_1) - c(B_1) \leq \frac{1}{2}\delta \Rightarrow c(C_1) = c(B_1) \geq c(A_1) - \frac{1}{2}\delta = c(A_1) - \delta(1-2^{-1})$

$\underline{m \mapsto m+1}$ Sei $m\in\mathbb{N}$, setze (*) für m voraus

$A_m \supseteq \bar{C}_m \ \forall m \in \mathbb{N}$. Es genügt also, $\bar{C}_m \neq \emptyset$ für (*)

$C_{m+1} = C_m \cap B_{m+1} \Rightarrow c(B_{m+1} \cup C_m) = c(B_{m+1}) + c(C_m) - c(C_{m+1})$, außerdem $B_{m+1} \cup C_m \subseteq A_{m+1} \cup A_m = A_m$

$\Rightarrow c(C_{m+1}) = c(B_{m+1}) + c(C_m) - c(B_{m+1} \cup C_m) \geq c(B_{m+1}) + c(C_m) - c(A_m)$ Ind.-V. $\Rightarrow c(C_m) \geq c(A_m) - \delta(1-2^{-m})$

außerdem $c(A_{m+1}) - c(B_{m+1}) \leq 2^{-(m+1)}\delta$ einsetzen $\Rightarrow$

$c(C_{m+1}) \geq (c(A_{m+1}) - 2^{-(m+1)}\delta) + (c(A_m) - \delta(1-2^{-m})) - c(A_m)$

$= c(A_{m+1}) - 2^{-(m+1)}\delta - \delta(1-2^{-m}) = c(A_m) - \delta(1-2^{-(m+1)})$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt also $c(C_m) \geq c(A_m) - \delta(1-2^{-m})$

$\geq \delta - \delta(1-2^{-m}) = \delta 2^{-m} > 0 \Rightarrow C_m \neq \emptyset$. $\square$

Beweis von Satz 3.4

geg.: $\mathcal{R}$ = Ring der Figuren im $\mathbb{R}^q$

c = Jordan-Inhalt auf $\mathcal{R}$

Sei $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}$ mit $F_m \cap F_p = \emptyset$ für $m \neq p$ und mit der Eigenschaft, dass auch $F = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m$ in $\mathcal{R}$ liegt. z.zg.: $\sum_{m=1}^{\infty} c(F_m) = c(F)$

Setze $B_m = F_1 \cup \dots \cup F_m$ und $A_m = F \setminus B_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallende Folge in $\mathcal{R}$, und $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} (F \setminus B_m) =$

$$F \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = F \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = F \setminus F = \emptyset$$

Lemma 3.3 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c(A_n) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \big(c(F) - c(B_n)\big) = 0 \Rightarrow c(F) = \lim_{n\to\infty} c(B_n)$$

$$\underset{\text{[Additivität von } c\text{]}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c(F_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c(F_n)$$

$\square$

Definition der σ-Algebren

Definition (3.5)

Sei Ω eine Menge. Ein σ-Ring in Ω ist ein Ring $\mathscr{R}$, der nicht nur unter endlichen, sondern auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Ist also $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{R}$, dann muss auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathscr{R}$ liegen. Man nennt $\mathscr{R}$ eine σ-Algebra, wenn $\mathscr{R}$ zugleich σ-Ring und Algebra ist.

Äquivalente Charakterisierung der σ-Algebren

Proposition (3.6)

Ein Mengensystem $\mathscr{A}$ in Ω ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\varnothing \in \mathscr{A}$ gilt, für jedes $A \in \mathscr{A}$ auch das Komplement $\Omega \setminus A$ in $\mathscr{A}$ liegt, und wenn für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathscr{A}$ enthalten ist.

Jede σ-Algebra $\mathscr{A}$ ist auch abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten.

Abgeschlossenheit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Durchschnitten:

geg: Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$

zzg: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Sei Ω die Grundmenge der σ-Algebra, d.h. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Setze $B_n = \Omega \setminus A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ($\Rightarrow B_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$)

$\mathcal{A}$ σ-Algebra $\Rightarrow B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \Omega \setminus B \in \mathcal{A}$. Es gilt

$\Omega \setminus B = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) =$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus B_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longrightarrow \qquad \square$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

Definition der Borelschen σ-Algebra $\mathscr{B}_n$

Ebenso wie Mengenringe können auch σ-Algebren durch Angabe eines Erzeugendensystems defininiert werden.

Definition (3.7)

Die eindeutig bestimmte σ-Algebra $\mathscr{B}_n$, die von den Quadern im $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird, nennt man die Borelsche σ-Algebra. Ihre Elemente bezeichnet man als Borelmengen.

Satz (3.8)

Die Borelsche σ-Algebra wird außer von den Quadern noch von folgenden Mengensystemen erzeugt.

(i) dem Ring der Figuren im $\mathbb{R}^n$

(ii) dem System aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

(iii) dem System aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

(iv) dem System aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Beweis von Satz 3.8 (teilweise)

Sei $\mathcal{B}_n$ die Borelsche σ-Algebra, erzeugt durch die Menge der Quader im $\mathbb{R}^n$.

<u>zu (i)</u> Sei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra erzeugt von den Figuren. z.zg.: (1) $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_n$

<u>zu (1)</u> Es reicht zu zeigen, dass jeder Quader in $\mathcal{B}$ enthalten ist, denn: $\mathcal{B}_n$ ist die <u>kleinste</u> σ-Algebra, die alle Quader enthält. Ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra mit dieser Eigenschaft,

dann folgt $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B}$ nach Def. alle Figuren enthält, enthält sie auch alle Quader (denn Quader sind Figuren).

zu (2) genügt z.zg: Jede Figur ist in $\mathcal{B}_n$ enthalten. Jede Figur ist endliche Vereinigung von Quadern, diese sind alle in $\mathcal{B}_n$ enthalten. Da $\mathcal{B}_n$ als σ-Algebra abgeschlossen unter endlichen (sogar abzählbaren) Vereinigungen ist, ist somit jede Figur in $\mathcal{B}_n$ enthalten.

zu (ii) Sei $\mathcal{B}'$ die σ-Algebra erzeugt von den offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ z.zg:

(1) $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}'$ (2) $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_n$

zu (1) genügt: jeder Quader Q ist in $\mathcal{B}'$ enthalten.

Sei $\bar{Q}$ der Abschluss von Q (d.h. eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$). leicht zu sehen: Q ist relativ offen in $\bar{Q}$

$\Rightarrow$ Es gibt eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$Q = U \cap \bar{Q}$. U offen $\Rightarrow U \in \mathcal{B}'$

$\bar{Q}$ abgeschlossen $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}$ ist offen $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{Q} \in \mathcal{B}'$

$\xRightarrow{\mathcal{B}' \sigma\text{-Algebra}} \bar{Q} \in \mathcal{B}'$ $\quad U, \bar{Q} \in \mathcal{B}' \xRightarrow{\mathcal{B}' \sigma\text{-Algebra}}$

$U \cap \bar{Q} = Q \in \mathcal{B}'$