Definition eines Inhalts auf dem Halbring der Quader

Lemma (2.8)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathscr{H}_{n+1}$. Dann ist der Träger der Funktion auf $\mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto c_n(A_x)$ in einem abgeschlossenen Intervall enthalten, die Funktion ist dort Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} c_n(A_x)\; dx \quad = \quad c_{n+1}(A).$$

Satz (2.9)

Durch die Volumenfunktion $c_n : \mathscr{H}_n \to \mathbb{R}_+$ ist ein Inhalt auf dem Mengenhalbring $\mathscr{H}_n$ gegeben.

Fortsetzungen von Inhalten auf Mengenringe

Satz (2.10)

Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring in Ω und $\mathscr{R}$ der von $\mathscr{H}$ erzeugte Ring. Dann gibt es für jeden Inhalt $c : \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+$ einen eindeutig bestimmten Inhalt $\tilde{c}$ auf $\mathscr{R}$ mit $\tilde{c}|_{\mathscr{H}} = c$ (also eine Fortsetzung von c auf $\mathscr{R}$).

Aus Satz 2.10 folgt unmittelbar die Existenz eines Inhalts $c_n : \mathscr{R}_n \to \mathbb{R}_+$ auf dem Ring $\mathscr{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$.

Beweis von Satz 2.10

geg. Menge Ω, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Halbring in Ω

$c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ sei ein Inhalt auf $\mathcal{H}$

Sei $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{H}$ erzeugte Mengenring. (Die Elemente von $\mathcal{R}$ sind genau die Mengen der Form $Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$, $Q_j \in \mathcal{H}$ $(1 \leq j \leq r)$, wobei $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt.)

<u>Beh</u>. Es existiert ein eindeutig bestimmter Inhalt
$\tilde{c} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $\tilde{c}|_{\mathcal{H}} = c$.

für $i \neq j$ gilt)

Bew. Es existiert ein eindeutig bestimmter Inhalt

Eindeutigkeit: Ang. $\tilde{c}$, $\tilde{c}_1$ sind zwei Abbildungen mit dieser Eigenschaft. Sei $A \in \mathcal{R}$. z.zg.: $\tilde{c}(A) = \tilde{c}_1(A)$

Sei $A \overset{(*)}{=} Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$ eine Darstellung von A als disj. Vereinigung von Elementen $Q_j \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\tilde{c}(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{endl.} \\ \text{Additivität}}}{=} \tilde{c}(Q_1) + \ldots + \tilde{c}(Q_r) \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{c}|_{\mathcal{H}} = c}}{=} c(Q_1) + \cdots + c(Q_r)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{c}_1|_{\mathcal{H}} = c}}{=} \tilde{c}_1(Q_1) + \ldots + \tilde{c}_1(Q_r) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{endl. Add.}}}{=} \tilde{c}_1(A)$$

Existenz: Für geg. $A \in \mathcal{R}$, stelle A in der Form $(*)$ dar und definiere $\tilde{c}(A) = c(Q_1) + \cdots + c(Q_r)$

Zeige zunächst, dass die Def. von $\tilde{c}(A)$ unabhängig von der

Wahl der Darstellung ist. Ang. $A = P_1 \cup \dots \cup P_s$ ist eine weitere Darstellung von A das disj Vereinigung von Elementen $P_i \in \mathcal{H}$ $(1 \leq i \leq s)$, wobei $s \in \mathbb{N}_0$. z.z.:

$$\sum_{j=1}^{r} c(Q_j) = \sum_{i=1}^{s} c(P_i)$$

$\mathcal{H}$ Mengenhalbring $\Rightarrow P_i \cap Q_j \in \mathcal{H} \; \forall i, j$

Es ist $Q_j = \dot{\bigcup}_{i=1}^{s} (P_i \cap Q_j)$ eine disj Vereinigung. endl. Additivität von $c \Rightarrow$

$c(Q_j) = \sum_{i=1}^{s} c(P_i \cap Q_j)$, ebenso:

s
ei
w
A
disj
$\sum_{i=1}^{r}$

$$c(P_i) = \sum_{j=1}^{r} c(P_i \cap Q_j)$$ insgesamt:

$$\sum_{j=1}^{r} c(Q_j) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{s} c(P_i \cap Q_j) = \sum_{i=1}^{s} c(P_i)$$

Nach Def. gilt $\tilde{c}(\emptyset) = 0$ (da $\emptyset$ Vereinigung von null Elementen aus $\mathcal{H}$) und $\tilde{c}(Q) = c(Q)$ $\forall Q \in \mathcal{H}$ (da Q Vereinigung von einer Menge aus $\mathcal{H}$, d.h. Fall $r=1$). $\implies \tilde{c}|_{\mathcal{H}} = c$

Zum Nachweis der Additivität von $\tilde{c}$ seien $A_1, \dots, A_t \in R$ (mit $t \in \mathbb{N}_0$), wobei $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und sei $A = A_1 \cup \dots \cup A_t$.

zzg: $\tilde{c}(A) = \sum_{i=1}^{t} \tilde{c}(A_i)$. Für $1 \leq i \leq t$

Man

c_*

sei $A_i = Q_{i1} \cup \ldots \cup Q_{ir_i}$ (mit $r_i \in \mathbb{N}_0$)

eine Darstellung von A_i als disj. Vereinigung von $Q_{ij} \in \mathcal{H}$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le r_i$). Dann ist

$A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} \dot{\bigcup}_{j=1}^{r_i} Q_{ij}$ eine Darst. von $A \in \mathcal{R}$ als disj. Vereinigung von $Q_{ij} \in \mathcal{H}$. $\Rightarrow$ erhalte

$$\sum_{i=1}^{t} \tilde{c}(A_i) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r_i} c(Q_{ij}) = \tilde{c}(A). \qquad \square$$

Definition von innerem und äußerem Maß

Definition (2.11)

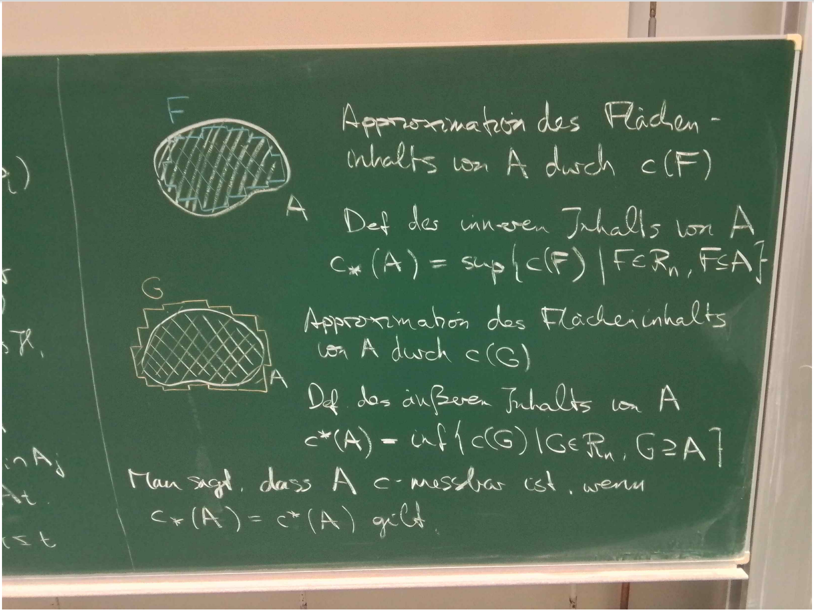
Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt und $A \subseteq \Omega$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind das innere Maß $c_*(A)$ bzw. das äußere Maß $c^*(A)$ von A bezüglich c definiert durch

$$c_*(A) = \sup\{c(B) \mid B \in \mathscr{R}, B \subseteq A\}$$

und

$$c^*(A) = \inf\{c(B) \mid B \in \mathscr{R}, B \supseteq A\}.$$

Sowohl beim inneren als auch beim äußeren Maß ist auch der Wert $+\infty$ möglich. Es gilt $c^*(A) = +\infty$ genau dann, wenn kein $B \in \mathscr{R}$ mit $B \supseteq A$ existiert.



Die korrekten Bezeichnungen lauten inneres Maß und äußeres Maß, nicht Inhalt!

Eigenschaften von innerem und äußerem Maß

Lemma (2.12)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt, und seien $A, B \subseteq \Omega$ beliebig.

(i) Aus $A \subseteq B$ folgt $c_*(A) \leq c_*(B)$ und $c^*(A) \leq c^*(B)$.

(ii) Allgemein gilt $c^*(A \cup B) \leq c^*(A) + c^*(B)$.

(iii) Sind A und B disjunkt, dann gilt $c_*(A \cup B) \geq c_*(A) + c_*(B)$.

Beweis von Lemma 2.12

Beweis von Lemma 2.10:

geg: Menge Ω, $c: \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$ von Teilmengen von Ω, $A, B \subseteq \Omega$

zu (i) Vor: $A \subseteq B$, z.zg.: $c_*(A) \leq c_*(B)$ und $c^*(A) \leq c^*(B)$

Beweis der 1. Ungl.: 1. Fall: $c_*(B) = +\infty$

Dann ist $c_*(A) \leq c_*(B)$ offensichtlich erfüllt.

2. Fall: $c_*(B)$ endlich $\quad c_*(B) = \sup\{c(T) \mid T \subseteq B, T \in \mathcal{R}\}$

Für jede Menge $T \in \mathcal{R}$ mit $T \subseteq A$ gilt auch $T \subseteq B \Rightarrow c(T) \leq c_*(B)$, nach Def. des

Für jede Menge $T \in \mathcal{R}$ mit $T \subseteq A$ gilt
auch $T \subseteq B$. $\Rightarrow$ $c(T) \leq c_*(B)$, nach Def. des
Supremums $\Rightarrow$ $c_*(B)$ ist obere Schranke von
$M = \{c(T) \mid T \subseteq A\}$ $\Rightarrow$ $c_*(A) = \inf(M) \leq c_*(B)$

Beweis der 2. Ungl. 1. Fall: $c^*(B) = +\infty$
nichts zu zeigen

2. Fall: $c^*(B) \in \mathbb{R}_+$ $\quad c^*(B) = \inf\{c(T) \mid T \in \mathcal{R}, T \supseteq B\}$

Für jedes $T \in \mathcal{R}$ mit $T \supseteq B$ gilt auch $T \supseteq A$.

$\Rightarrow \{c(T) \mid T \in \mathcal{R}, T \supseteq B\} \subseteq \{c(T) \mid T \in \mathcal{R}, T \supseteq A\}$

$\Rightarrow \inf\{c(T) \mid T \in \mathcal{R}, T \supseteq B\} \geq \inf\{c(T) \mid T \in \mathcal{R}, T \supseteq A\}$

$\Rightarrow c^*(B) \geq c^*(A)$

zu ii) z.zg.: $c^*(A \cup B) \le c^*(A) + c^*(B)$

gleichbed.: $\inf\{c(T) \mid T \supseteq A \cup B\} \le c^*(A)$
$+ c^*(B)$. Im Fall $c^*(A) = +\infty$
oder $c^*(B)$ ist dies offensichtlich.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach Def. des Infimums
gibt es $T \supseteq A$ und $U \supseteq B$ mit
$c(T) < c^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$, ebenso existiert
ein $U \supseteq B$ mit $c(U) < c^*(B) + \frac{1}{2}\varepsilon$,
wobei $T, U \in \mathcal{R} \Rightarrow T \cup U \supseteq A \cup B$
und $T \cup U \in \mathcal{R}$

Da $c^*(A\cup B)$ eine untere Schranke von $\{c(V) \mid V\in \mathcal{R}, V\supseteq A\cup B\}$ ist, folgt

$$c^*(A\cup B) \le c(T\cup U) \le c(T)+c(U) <$$
$$c^*(A)+\tfrac{1}{2}\varepsilon + c^*(B)+\tfrac{1}{2}\varepsilon = c^*(A)+c^*(B)+\varepsilon$$

also: $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+ : c^*(A\cup B) < c^*(A)+c^*(B)+\varepsilon$

$$\Longrightarrow c^*(A\cup B)\le c^*(A)+c^*(B)$$

<u>zu (iii)</u> Vor.: $A\cap B=\emptyset$

z.zg. $c_*(A\cup B)\ge c_*(A)+c_*(B)$

Im Fall $c_*(A)$ oder $c_*(B)$ gleich $+\infty$ ist, muss auch $c_*(A\cup B)=+\infty$ sein, wegen $A\cup B\supseteq A, B$ und (i).

$c^*(B)$

$c^*(A)$

∞

ch.

imums

it

istiert

$) + \frac{1}{2}\varepsilon;$

$\supseteq A \cup B$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach Def. des Supremums gibt es $T, U \in R$ mit $T \subseteq A$, $U \subseteq B$ und $c(T) > c_*(A) - \frac{1}{2}\varepsilon$, $c(U) > c_*(B) - \frac{1}{2}\varepsilon$.

$T \subseteq A, U \subseteq B \Rightarrow T \cup U \subseteq A \cup B$, und $T \cup U \in R$

Da $c_*(A \cup B)$ eine obere Schranke von $\{c(V) \mid V \in R, V \subseteq A \cup B\}$ ist, folgt $c(T \cup U) \leq c_*(A \cup B)$

Wegen $A \cap B = \emptyset$, $T \subseteq A$, $U \subseteq B$ gilt auch $T \cap U = \emptyset$

$\Rightarrow c(T \cup U) = c(T) + c(U)$

$\Rightarrow c_*(A \cup B) \geq c(T \cup U) = c(T) + c(U) >$

$c_*(A) - \frac{1}{2}\varepsilon + c_*(B) - \frac{1}{2}\varepsilon = c_*(A) + c_*(B) - \varepsilon$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. vorgeg. war, folgt $c_*(A \cup B) \geq c_*(A) + c_*(B)$ $\square$

Eigenschaften von innerem und äußerem Maß (Forts.)

Lemma (2.13)

Für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gilt $c_*(A) \leq c^*(A)$.

Lemma (2.14)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Dann gilt $c_*(A) = c^*(A) = c(A)$ für alle $A \in \mathscr{R}$.

Beweis von Lemma 2.13:

geg. $A \subseteq \Omega$ z.zg.: $c_*(A) \le c^*(A)$

<u>1. Fall:</u> $c_*(A)$ ist unendlich

Ang. $c^*(A)$ ist endlich, also $c^*(A) \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \exists\, T \in R$ mit $T \supseteq A$ und $c(T) < c^*(A) + 1$

Für jedes $U \in R$ mit $U \subseteq A$ gilt $U \subseteq T$.

$\Rightarrow c(U) \le c(T) < c^*(A) + 1$

Die Menge $\{c(U) \mid U \in R, U \subseteq A\}$ ist also nach oben beschränkt, d.h. sie hat ein endliches Supremum. $\Rightarrow c_*(A)$ ist endlich ↯

2. Fall: $c_*(A)$ ist endlich. Ang. $c^*(A) < c_*(A)$

Sei $\varepsilon = c_*(A) - c^*(A)$. Nach Def. des Infimums existiert ein $T \in \mathcal{R}$ mit $T \supseteq A$ und $c(T) < c^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Für jedes $U \in \mathcal{R}$ mit $U \subseteq A$ gilt $U \subseteq T$ und $c(U) \leq c(T)$ $\Rightarrow$ $c^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$ ist obere Schranke von $\{c(U) \mid U \in \mathcal{R}, U \subseteq A\}$. Da $c_*(A)$ die kleinste obere Schranke dieser Menge ist, folgt

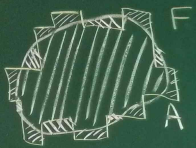
$$c_*(A) < c^*(A) + \tfrac{1}{2}\varepsilon = c^*(A) + \tfrac{1}{2}(c_*(A) - c^*(A))$$
$$= \tfrac{1}{2}c^*(A) + \tfrac{1}{2}c_*(A) < c_*(A) \quad \lightning$$

Definition der c-messbaren Mengen

Definition (2.15)

Sind die Werte $c_*(A)$ und $c^*(A)$ beide endlich und gilt $c_*(A) = c^*(A)$, dann bezeichnen wir A als c-messbar und definieren $c(A) = c^*(A)$. Die c_n-messbaren Teilmengen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ werden auch als Jordan-messbar bezeichnet, und man nennt $c_n(E)$ den Jordan-Inhalt der Teilmenge E.

nächste Stunde: Charakterisierung der c-Messbarkeit durch die symmetrische Differenz



$F \Delta A$

werden zeigen: Wenn $c^*(F \Delta A)$ durch geschickte Wahl der Figur F „beliebig klein" gemacht werden kann (kleiner als jedes vorgeg. ε), dann ist die Menge A messbar.