Definition der Mengenhalbringe

Sei Ω eine beliebige Menge.

Definition (2.1)

Eine Teilmenge $\mathscr{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ wird Mengenhalbring in Ω genannt, wenn $\varnothing \in \mathscr{H}$ gilt und folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Sind $A, B \in \mathscr{H}$, dann liegt auch $A \cap B$ in $\mathscr{H}$.

(ii) Für alle $A, B \in \mathscr{H}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Mengen $C_1, ..., C_r \in \mathscr{H}$, so dass $A \setminus B$ als disjunkte Vereinigung $A \setminus B = C_1 \cup ... \cup C_r$ dargestellt werden kann.

Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathscr{H}$, dann nennt man $\mathscr{H}$ eine Halbalgebra.

Sowohl die Intervalle als auch die endlichen Intervalle bilden einen Mengenhalbring in $\mathbb{R}$.

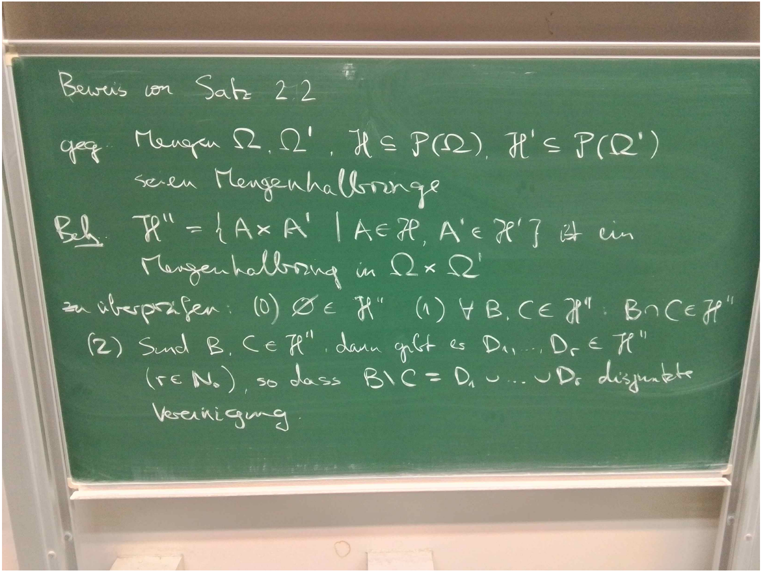
Kartesische Produkte in Mengenhalbringen

Satz (2.2)

Seien $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ zwei Mengenhalbringe in Ω bzw. Ω'. Dann ist auch das Mengensystem

$$\{A \times A' \mid A \in \mathscr{H}, A' \in \mathscr{H}'\} \qquad \text{ein Mengenhalbring.}$$

Als Quader im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir im Folgenden ein kartesisches Produkt $I_1 \times ... \times I_n$ von endlichen Intervallen. Nach Satz 2.2 bilden die Quader einen Mengenhalbring im $\mathbb{R}^n$.



Beweis von Satz 2.2

geg.: Mengen Ω, Ω', $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$
seien Mengenhalbringe

<u>Beh.</u>: $\mathcal{H}'' = \{ A \times A' \mid A \in \mathcal{H}, A' \in \mathcal{H}' \}$ ist ein
Mengenhalbring in $\Omega \times \Omega'$

zu überprüfen: (0) $\emptyset \in \mathcal{H}''$ (1) $\forall B, C \in \mathcal{H}'' : B \cap C \in \mathcal{H}''$

(2) Sind $B, C \in \mathcal{H}''$, dann gibt es $D_1, \dots, D_r \in \mathcal{H}''$
($r \in \mathbb{N}_0$), so dass $B \setminus C = D_1 \cup \dots \cup D_r$ disjunkte
Vereinigung.

…), so dass $B \setminus C = D_1 \cup \ldots \cup D_r$ disjunkt

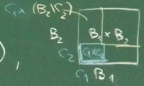
zu (0) klar, da $\emptyset \in \mathcal{H}$, $\emptyset \in \mathcal{H}'$ und $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$

zu (1) $B, C \in \mathcal{H}'' \Rightarrow \exists\, B_1, C_1 \in \mathcal{H}$, $B_2, C_2 \in \mathcal{H}''$ mit $B = B_1 \times B_2$, $C = C_1 \times C_2$. Es gilt $B \cap C = (B_1 \times B_2) \cap (C_1 \times C_2) = (B_1 \cap C_1) \times (B_2 \cap C_2)$, und $B_1 \cap C_1 \in \mathcal{H}$, $B_2 \cap C_2 \in \mathcal{H} \Rightarrow B \cap C \in \mathcal{H}''$

zu (2) Seien $B, C \in \mathcal{H}''$ und B_1, C_1, B_2, C_2 wie unter (1)

Es gilt $B \setminus C = (B_1 \times B_2) \setminus (C_1 \times C_2)$

$= C_1 \times (B_2 \setminus C_2) \cup (B_1 \setminus C_1) \times C_2 \cup (B_1 \setminus C_1) \times (B_2 \setminus C_2)$,



und dies ist eine disjunkte Vereinigung.

Da $\mathcal{H}$ ein Mengenhalbring ist, gibt es $C_3, \ldots, C_r \in \mathcal{H}$ mit $B_1 \setminus C_1 = C_3 \cup \ldots \cup C_r$, wobei die Vereinigung disjunkt ist.

Ebenso gibt es $C_3', \dots, C_s' \in \mathcal{H}'$ mit $B_2 \setminus C_2 = C_3' \cup \dots C_s'$, wobei auch diese Vereinigung disjunkt ist $\Rightarrow$ erhalte $C_1 \times (B_2 \setminus C_2) = C_1 \times C_3' \cup \dots \cup C_1 \times C_s'$, die Vereinigung ist disjunkt, und die Mengen $C_1 \times C_j'$ (mit $3 \le j \le s$) liegen alle in $\mathcal{H}''$.

Ebenso lassen sich $(B_1 \setminus C_1) \times C_2$ und $(B_1 \setminus C_1) \times (B_2 \setminus C_2)$ als disjunkte Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}''$ darstellen. $\square$

Definition der Mengenringe

Definition (2.3)

Ein Mengenring ist eine Teilmenge $\mathscr{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften, dass $\varnothing \in \mathscr{R}$ gilt und mit $A, B \in \mathscr{R}$ auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ in $\mathscr{R}$ liegen. Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathscr{R}$, dann spricht man von einer Mengenalgebra.

Sind A, B Elemente eines Mengenrings $\mathscr{R}$, dann sind auch die symmetrische Differenz gegeben durch $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ und der Durchschnitt $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \,\Delta\, B)$ in $\mathscr{R}$ enthalten.

Erzeugendensysteme von Mengenringen

Definition (2.4)

Wir sagen, ein Mengenring $\mathscr{R}$ wird von einer beliebigen Teilmenge $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ erzeugt, wenn $\mathscr{R} \supseteq \mathscr{E}$ gilt und für jeden Ring $\mathscr{S}$ in Ω mit $\mathscr{S} \supseteq \mathscr{E}$ auch $\mathscr{S} \supseteq \mathscr{R}$ erfüllt ist.

Der Mengenring ist durch das Mengensystem $\mathscr{E}$ eindeutig bestimmt.

Erzeugung von Mengenringen durch Mengenhalbringe

Satz (2.5)

Sei $\mathscr{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Halbring. Dann gilt

(i) Die Elemente von $\mathscr{R}(\mathscr{H})$ sind die endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathscr{H}$.

(ii) Die Elemente von $\mathscr{R}(\mathscr{H})$ sind die endlichen *disjunkten* Vereinigungen von Mengen aus $\mathscr{H}$.

Beweis von Satz 2.5:

geg: Menge Ω, Mengenhalbring $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$R(\mathcal{H})$ = der von $\mathcal{H}$ erzeugte Mengenring

<u>zu (ii)</u> R_1 = Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{H}$

zu zeigen: $R_1 = R(\mathcal{H})$

„$\subseteq$" Es gilt $\mathcal{H} \subseteq R(\mathcal{H})$, nach Def. von $R(\mathcal{H})$.

Da $R(\mathcal{H})$ ein Mengenring ist, ist $R(\mathcal{H})$ abgeschlossen unter endl. Vereinigungen.

$\Rightarrow$ jedes Element der Form $Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$ (mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $Q_j \in \mathcal{H}$ für $1 \leq j \leq r$) liegt in $R(\mathcal{H})$

$\cup\, Q_s)$

$A \setminus B$

$\setminus A \in \mathcal{R}_1$

$\square$

d.h. es gilt $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{H})$.

„$\supseteq$" Nach Def. von $\mathcal{R}_1$ gilt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}_1$.

Es genügt nun zu zeigen, dass $\mathcal{R}_1$ ein Mengenring ist, denn dann folgt $\mathcal{R}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{R}_1$.

klar: $\emptyset \in \mathcal{R}_1$ (setze $r = 0$) Seien nun $A, B \in \mathcal{R}_1$ ungeg. zeige (1) $A \cap B \in \mathcal{R}_1$ (2) $A \setminus B,\ B \setminus A \in \mathcal{R}_1$ (3) $A \cup B \in \mathcal{R}_1$

<u>zu (1)</u> $A, B \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow \exists\, r, s \in \mathbb{N}_0$ und $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s \in \mathcal{H}$, so dass $A = P_1 \cup \dots \cup P_r$, $B = Q_1 \cup \dots \cup Q_s$ als disjunkte Vereinigungen

$\Rightarrow A \cap B = (P_1 \cup \dots \cup P_r) \cap (Q_1 \cup \dots \cup Q_s) = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} (P_i \cap Q_j)$ $\mathcal{H}$ Mengenhalbring $\Rightarrow$

$P_i \cap Q_j \in \mathcal{H}$ $\forall i, j$, außerdem ist die Vereinigung disjunkt $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}_1$

zu (2) $A \setminus B = (P_1 \cup \ldots \cup P_r) \setminus (Q_1 \cup \ldots \cup Q_s)$

$= \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} P_i \setminus (Q_1 \cup \ldots \cup Q_s)$

$= \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} \left(\bigcap_{j=1}^{s} (P_i \setminus Q_j) \right)$ Jede der Mengen $P_i \setminus Q_j$ ist disjunkte endl. Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{H}$, also gilt dasselbe für $A \setminus B$.

$\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}_1$, ebenso erhält man $B \setminus A \in \mathcal{R}_1$

zu (3) folgt aus (1), (2) und $A \cup B =$

$(A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (disjunkt) $\square$

d

„2

Es

ist

klar

$\in \mathcal{R}$

$\in \mathcal{R}$

zu (1

$Q_1, $

$B =$

$\Rightarrow A$

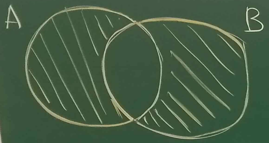
$\dot{\bigcup}_{i=1}^{r}$

Definition der Figuren im $\mathbb{R}^n$

Definition (2.6)

Eine Figur im $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche Vereinigung von Quadern, also eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $F = Q_1 \cup ... \cup Q_r$, mit $r \in \mathbb{N}_0$ und Quadern $Q_1, ..., Q_r$ im $\mathbb{R}^n$.
(Im Fall $r = 0$ ist $F = \varnothing$.)

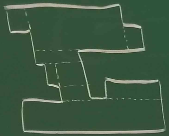
Aus Satz 2.5 folgt unmittelbar, dass die Figuren im $\mathbb{R}^n$ einen Ring bilden.



$A \Delta B$

symmetrische Differenz

Beispiel für eine Figur in $\mathbb{R}^2$



ist eine disjunkte Vereinigung von Rechtecken (= Quader im $\mathbb{R}^2$)

Inhalte auf Mengenhalbringen

Definition (2.7)

Ein Inhalt auf einem Halbring $\mathscr{H}$ ist eine Abbildung $c : \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+$ mit $c(\varnothing) = 0$ und

$$c\left(A_1 \cup \ldots \cup A_r\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} c(A_i)$$

für $r \in \mathbb{N}_0$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{H}$ mit der Eigenschaft, das auch die Vereinigung $A_1 \cup \ldots \cup A_r$ in $\mathscr{H}$ enthalten ist. Man bezeichnet diese Eigenschaft als endliche Additivität.

Der Begriff des Inhalts ist auf Mengenringen genauso definiert wie auf Mengenhalbringen.

wichtige Eigenschaft eines Inhalt c auf einen Mengenhalbring $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$:

Sind $A, B \in \mathcal{H}$ mit $A \subseteq B$, dann gilt $c(A) \le c(B)$ (Monotonie)

$\mathcal{H}$ Mengenhalbring $\Rightarrow \exists\, C_1, \dots, C_r \in \mathcal{H}$ mit $r \in \mathbb{N}_0$,
so dass $B \setminus A = C_1 \cup \dots \cup C_r$ (disjunkt)

$\Rightarrow B = A \cup C_1 \cup \dots \cup C_r$ (ebenfalls disjunkt)

$$\Rightarrow c(B) = c(A) + \sum_{j=1}^{r} \mu(C_j) \ge c(A)$$

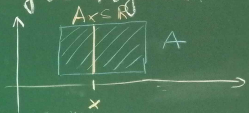
$\ldots \cup C_r$ (ebenfalls disjunkt)

$$\Rightarrow c(B) = c(A) + \sum_{j=1}^{r} \mu(C_j) \geq c(A)$$

Notation

- Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bel. Funktion, dann nennt man den Abschluss der Teilmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ den Träger $\operatorname{supp}(f)$ von f.
- Ist f eine Fkt. und $[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $[a,b] \supseteq \operatorname{supp}(f)$ und der Eigenschaft, dass $f|[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, dann definieren wir $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
- Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, dann sei $c_1(I) = l(I) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ die Länge des Intervalls. (insb. $c_1([a,b]) = b-a$ falls $a \leq b$)
- Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ mit endl. Intervallen $I_j \subseteq \mathbb{R}$, dann nennen wir $c_n(Q) = \prod_{j=1}^{n} c_1(I_j)$ den Inhalt des Quaders.

- Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ den Halbring der Quader im $\mathbb{R}^n$, und mit $\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ den Ring der Figuren.



- Für jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ sei $A_x = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in A \}$

- Ist Ω eine beliebige Menge und $A \subseteq \Omega$, dann wird die Funktion $1_A : \Omega \to \{0,1\}$ geg. durch $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$ die <u>Indikatorfunktion</u> <u>von</u> A genannt.

Definition eines Inhalts auf dem Halbring der Quader

Lemma (2.8)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathscr{H}_{n+1}$. Dann ist der Träger der Funktion auf $\mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto c_n(A_x)$ in einem abgeschlossenen Intervall enthalten, die Funktion ist dort Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} c_n(A_x)\, dx \quad = \quad c_{n+1}(A).$$

Satz (2.9)

Durch die Volumenfunktion $c_n : \mathscr{H}_n \to \mathbb{R}_+$ ist ein Inhalt auf dem Mengenhalbring $\mathscr{H}_n$ gegeben.

Beweis von Lemma 2.8:

geg.: $A \in \mathcal{H}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. ein Quader im $\mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow$ Es gibt ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A = I \times Q$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$A_x = \begin{cases} Q & \text{falls } x \in I \\ \emptyset & \text{falls } x \notin I \end{cases}, \quad \text{somit } c_{n+1}(A_x) = \begin{cases} c_n(Q), & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

Sei $\tilde{I}$ der Abschluss von I. $(\Rightarrow \hat{I} = [a,b]$ mit $a \leq b)$

Dann gilt $\operatorname{supp}(f) = \tilde{I}$, mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c_{n+1}(A_x)$, und $\int_{\mathbb{R}} c_{n+1}(A_x)\,dx = \int_a^b c_n(Q)\,dx$

$$= \left[c_n(Q)\, x\right]_a^b = c_n(Q)\, \ell(I) = c_{n+1}(A). \quad \square$$

Beweis von Satz 2.9:

Zeige durch vollst. Ind. über $n \in \mathbb{N}$:

Durch $c_n : \mathcal{H}_n \to \mathbb{R}_+$ ist ein Inhalt auf $\mathcal{H}_n$ definiert. Zu zeigen jeweils

(1) $c_n(\emptyset) = 0$ (2) Sind $A_1, \dots, A_r \subset \mathcal{H}_n$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $A_1 \cup \dots \cup A_r$ als disjunkte Vereinigung in $\mathcal{H}_n$ enthalten, dann gilt

$$c_n(A_1 \cup \dots \cup A_r) = \sum_{j=1}^{r} c_n(A_j).$$

Dabei gilt (1) jeweils nach Def.

(2) Ind.-Anf. $n=1$: Sei $I_1, \dots, I_r \subseteq \mathbb{R}$ Inter-

$\mathbb{R}^{n+1}$
uader
gilt
$Q), x \in I$
$0, x \notin I$
it $a \le b)$
$x \mapsto$
dx
$A)$. □

valle mit der Eigenschaft, dass $I_j \cap I_k = \emptyset$ für $j \neq k$ und $I = I_1 \cup \dots \cup I_r$ ebenfalls ein Intervall ist. Seien $a_j \le b_j$ die Grenzen von I_j. Nach Umsortierung können wir $b_j = a_{j+1}$ für $0 \le j < r$ voraussetzen $\Rightarrow I = [a_1, b_r]$

$$\Rightarrow c_1(I) = b_r - a_1 \underset{a_{j+1}=b_j}{=} \sum_{j=1}^{r} (b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{r} c_1(I_j).$$

Ind-Schritt $n \to n+1$:

geg. Quader $Q_1, \dots, Q_r \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_r$ disjunkte Vereinigung und ebenfalls ein Quader ist.

z.zg. $c_{n+1}(Q) = \sum_{j=1}^{r} c_{n+1}(Q_j)$

Nach Lemma 2.8 gilt $c_{n+1}(Q) = \int_{\mathbb{R}} c_n(Q_x)\,dx$ und ebenso

$c_{n+1}(Q_j) = \int_{\mathbb{R}} c_n((Q_j)_x)\,dx$ für $1 \leq j \leq r$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $(Q_j)_x$ $(1 \leq j \leq r)$ und Q_x wieder ein Quader, oder die leere Menge. Ind.-V. $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: c_n(Q_x) = \sum_{j=1}^{r} c_n((Q_j)_x)$

$$\Rightarrow c_{n+1}(Q) = \int_{\mathbb{R}} c_n(Q_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_n((Q_j)_x)\,dx \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \int_{\mathbb{R}} c_n((Q_j)_x)\,dx = \sum_{j=1}^{r} c_{n+1}(Q_j) \qquad \square$$