Definition der Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Definition (9.1)

Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $d < n$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ genannt, wenn für jeden Punkt $p \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gibt eine offene Umgebung U und $\mathscr{C}^1$-Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_{n-d} : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$M \cap U = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = ... = \varphi_{n-d}(x) = 0\}$$

erfüllt ist.

(ii) Es gilt $\dim\langle d\varphi_1(p), ..., d\varphi_{n-d}(p)\rangle_{\mathbb{R}} = n - d$.

Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten durch Karten

Satz (9.2)

Sei M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es für jeden Punkt p eine offene Umgebung U im $\mathbb{R}^n$ und einen $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$\phi(M \cap U) \quad = \quad (\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap V$$

erfüllt ist. Man nennt ϕ eine Karte der Untermannigfaltigkeit und das Paar (U, ϕ) eine Koordinatenumgebung des Punktes p.

Beweis von Satz 9 2

geg: d-dim Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$
($d, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \le d < n$)

$p \in M$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von p

$\varphi_1, \dots, \varphi_{n-d} : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$-Funktionen mit

$M \cap U = \{x \in U \mid \varphi_j(x) = 0$ für $1 \le j \le n-d\}$

und $\dim \langle d\varphi_1(p), \dots, d\varphi_{n-d}(p) \rangle_{\mathbb{R}} = n-d$

zzg: Es gibt eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und
einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi : U \to V$, so dass
$\phi(M \cap U) \overset{(*)}{=} (\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap V$ gilt.

Ergänze $\{ d\varphi_j(p) \mid 1 \le j \le n-d \} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
durch $\varphi_{n-d+1}, \dots, \varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ zu einer Basis von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung mit φ_j $(1 \le j \le n)$ als Komponenten.

Beh.: $d\phi(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ist invertierbar

gleichbedeutend mit der Invertierbarkeit ist die lineare
Unabh. der Vektoren $d\phi(p)(e_j) \in \mathbb{R}^n$ $(1 \le j \le n)$

äquivalent: Die Spalten der Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n\mathbb{R}$
geg. durch $a_{ij} = d\varphi_i(p)(e_j)$ $(1 \le i, j \le n)$
sind linear unabh. äquivalent dazu: Die Zeilen der Matrix
sind linear unabh. (Grund: Rangsatz, Zeilenrang = Spaltenrang)

Ang. die Zeilen sind linear abhängig.

Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, nicht alle null,

mit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d\varphi_i(p)(e_j) = 0$ für $1 \le j \le n$

Da $e_1, \dots, e_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, würde

das $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d\varphi_i(p) = 0$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gelten.

↯ zur Basiseigenschaft von

$$\{ d\varphi_1(p), \dots, d\varphi_{n-d}(p), \varphi_{n-p+1}, \dots, \varphi_n \}$$

(beachte: $d\varphi_i(p) = \varphi_i$ für $n-p+1 \le i \le n$)

($\Rightarrow$ Beh.) Der Satz über lokale Umkehrbarkeit liefert (nach Verkleinerung von U) einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$

Zum Beweis von $(*)$ sei $y \in V$ vorgeg.

Überprüfe: $y \in \phi(M \cap U) \iff y \in \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$

Sei $x \in U$ der eindeutig bestimmte Punkt mit der Eig. $\phi(x) = y$. Dann gilt die Äquivalenz

$$y \in \phi(M \cap U) \iff \phi(x) \in M \cap U \overset{\phi \text{ injektiv}}{\iff}$$

$$x \in M \cap U \iff \varphi_j(x) = 0 \text{ für } 1 \le j \le n-d$$

$\iff$ Die ersten $n-d$ Komponenten von $y = \phi(x)$ sind null $\iff y \in \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$ $\square$

Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbed.

Satz (9.4)

Seien M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p \in M \cap U$ und $\varphi_1, ..., \varphi_{n-d}$ Funktionen, so dass die Bedingungen (i) und (ii) aus Def. 9.1 erfüllt sind. Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine weitere $\mathscr{C}^1$-Funktion. Ist p ein lokales Extremum von $f|_{M \cap U}$, dann gibt es reelle Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$, so dass in $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Gleichung

$$df(p) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n-d} \lambda_j d\varphi_j(p) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Man bezeichnet die Zahlen λ_j mit dieser Eigenschaft als Lagrange-Multiplikatoren.

Beweis von Satz 9.4 *(Skizze)*

- Wir betrachten nur den Fall, dass p ein lokales Maximum von f ist. Nach eventueller Verkleinerung von U können wir $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in M \cap U$ voraussetzen.
- Durch Anwendung von Satz 9.2 erhalten wir (nach weiterer Verkleinerung von U) einen $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi : U \to \tilde{V}$ mit $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\phi(M \cap U) = (\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap \tilde{V}$. Es sei $\psi : \tilde{V} \to U$ die Umkehrfunktion. Durch $\tilde{g} = f \circ \psi$ erhalten wir eine reellwertige $\mathscr{C}^1$-Funktion auf $\tilde{V}$.
- Definiere $\iota : \mathbb{R}^d \to \{0\}^{n-d}$ durch $\iota(v) = (v, 0)$ und setze $V = \iota^{-1}(\tilde{V})$. Dann ist $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und

$$g = \tilde{g} \circ \iota = f \circ \psi \circ \iota$$

ist eine reellwertige $\mathscr{C}^1$-Funktion auf V.

- Sei $q \in V$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $\psi(0,q) = p$. Weil p ein lokales Maximum von f ist, ist q ein lokales Maximum von g. Nach Satz 8.10 ist q damit ein kritischer Punkt von g. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$df(p) \circ d\psi(0,q) \circ \iota = dg(q) = 0.$$

- Daraus folgt, dass $df(p)$ auf dem Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $W = (d\psi(0,q) \circ \iota)(\mathbb{R}^d)$ gleich null ist. Wir müssen zeigen, dass der Untervektorraum von $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gegeben durch $\langle d\varphi_1(p), ..., d\varphi_{n-d}(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ mit

$$L \quad = \quad \{\varphi \mid \varphi|_W = 0\}$$

übereinstimmt.

- Mit dem Dimensionssatz zeigt man, dass $\dim L = n - d$ gilt. Es genügt deshalb zu überprüfen, dass die Elemente $d\varphi_j(p)$ für in L enthalten sind, denn diese spannen einen Untervektorraum derselben Dimension auf. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit $d\varphi_j(p)|_W = 0$, für $1 \leq j \leq n - d$.
- Aus der Gleichung $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\tilde{V}}$ und der Kettenregel leitet man

$$d\phi(p) \cdot d\psi(0, q) \quad = \quad E_n$$

ab. Wegen $W = d\psi(0, q)(\{0\} \times \mathbb{R}^d)$ und der Tatsache, dass die Matrix $d\phi(p)$ die Elemente $d\varphi_j(p)$ als Zeilenvektoren enthält, folgt daraus die gewünschte Aussage. Denn die Werte von $d\varphi_j(p)$ auf den Basisvektoren von W erhält man dadurch, dass man die j-te Zeile von $d\phi(p)$ für $1 \leq i \leq d$ mit der $n - d + i$-ten Spalte von $d\psi(0, q)$ multipliziert, und wegen

$$j \leq n - d < n - d + i$$

ist die Einheitsmatrix E_n an der Stelle $(j, n - d + i)$ gleich null.

Die Unlösbarkeit des Maßproblems

Gegeben sei ein System $\mathscr{K}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Folgende Eigenschaften sollte eine „Volumenfunktion“ μ auf $\mathscr{K}$ sinnvollerweise besitzen.

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$ (falls $\mathbb{R}^n$ in $\mathscr{K}$ liegt)

(ii) Normierungsbedingung
Die n-dimensionalen abgeschlossenen Quader der Form $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i \leq b_i$ sind in $\mathscr{K}$ enthalten, und es gilt $\mu(Q) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

(iii) Bewegungsinvarianz
Ist $A \in \mathscr{K}$ und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, dann liegt $\psi(A)$ in $\mathscr{K}$, und es gilt $\mu(\psi(A)) = \mu(A)$.

(iv) endliche Additivität
Sind $A, B \in \mathscr{K}$ disjunkt (also $A \cap B = \varnothing$), dann gilt $A \cup B \in \mathscr{K}$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Abgeleitete Eigenschaften einer Volumenfunktion

Lemma (1.1)

Seien $r \in \mathbb{N}_0$ und $A, B, A_1, ..., A_r$ Elemente aus $\mathscr{K}$, auf denen die Funktion μ endliche Werte annimmt.

(i) Unter der Voraussetzung $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) Es ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(iii) Sind die Mengen $A_1, ..., A_r \in \mathscr{K}$ paarweise disjunkt, dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{r} A_k \in \mathscr{K} \qquad \text{und} \qquad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{r} A_k\right) = \sum_{k=1}^{r} \mu(A_k).$$

(Dabei bedeutet $r = 0$, dass die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{r} A_k$ leer ist. Die Summe auf der rechten Seiten ist dann gleich Null.)

Abzählbare Additivität

Die Bedingung (iv) an eine Volumenfunktion wird häufig verschärft zu

(iv)' Ist $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge von paarweise disjunkten Elementen aus $\mathscr{K}$, dann gilt

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \in \mathscr{K} \qquad \text{und} \qquad \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

Man spricht in diesem Fall von abzählbarer Additivität oder σ-Additivität.

Formulierung der Unlösbarkeit des Maßproblems

Satz (1.2)

Für keine natürliche Zahl n existiert eine Abbildung

$$\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii) und (iv)'.

Beweis von Satz 1.2:

z.zg. Es gibt keine Abb. $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ mit der Eigenschaft $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$, die normiert, bewegungsinvariant und abzählbar additiv ist.

Definiere auf $\mathbb{R}^n$ eine Relation $\sim$ durch

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$$

(Dies ist eine Äquivalenzrelation.)

Wähle ein Repräsentantensystem A der Äquivalenzklassen mit $A \subseteq [0,1]^n$. Dies existiert, weil jede

Äquivalenzklasse mit $[0,1]^n$ nichtleeren Schnitt besitzt.

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gibt $z \in \mathbb{Z}^n$ mit $x - z \in [0,1]^n$

Definiere $B = [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ und $C = \bigcup_{r \in B} (r + A)$

Dann ist C eine <u>abzählbare</u>, <u>disjunkte</u> Vereinigung.

Die Abzählbarkeit ist offensichtlich, weil mit $\mathbb{Q}$ auch $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist und $B \subseteq \mathbb{Q}^n$ gilt. Ang. es gibt $r, r' \in B$ mit $r \neq r'$, so dass $(r+A) \cap (r'+A) \neq \emptyset$. Dann gibt es $a, a' \in A$ mit $r + a = r' + a' \Rightarrow a - a' = r' - r \in \mathbb{Q}^n$

$\Rightarrow a \sim a' \xrightarrow[\text{A Repr.-system}]{a, a' \in A} a = a' \Rightarrow r = r'$ ↯.

leicht zu überprüfen: $[0,1]^n \overset{(*)}{\subseteq} C \overset{(**)}{\subseteq} [-1,2]^n$

<u>zu (*)</u> Sei $x \in [0,1]^n$ A Repr.-system von $\sim$

$\Rightarrow \exists\, a \in A$ mit $x \sim a \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{Q}^n$ mit

$x = a + r \Rightarrow r = x - a \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$

$\Rightarrow r \in B \Rightarrow x = a + r \in C$.

<u>zu (**)</u> Sei $c \in C \Rightarrow \exists\, r \in B,\ a \in A$

mit $c = r + a$ $r \in [-1,1]^n$, $a \in [0,1]^n$

$\Rightarrow c \in [-1,2]^n$

Es gilt nun $\mu(C) \overset{\text{abzählbare Add}}{=} \sum_{r \in B} \mu(r + A)$

$\overset{\text{Bewegungsinvarianz}}{=} \sum_{r \in B} \mu(A)$

$$C \supseteq [0,1]^n \overset{\text{Normierung}}{\Longrightarrow} \mu(C) \geq \mu([0,1]^n) = 1$$

$$\mu(C) = \sum_{r \in B} \mu(A), \quad \mu(C) > 0 \Rightarrow \mu(A) > 0$$

$$|B| = \infty \Rightarrow \mu(C) = \sum_{r \in B} \mu(A) = +\infty$$

andererseits: $C \subseteq [-1,2]^n \Rightarrow \mu(C) \leq \mu([-1,2]^n) \underset{\text{Normierung}}{=} 3^n$ $\lightning$ $\mu(C) = +\infty$

Zwei Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ werden als kongruent bezeichnet (Notation $X \cong Y$), wenn eine Bewegung $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(X) = Y$ existiert.

Satz (1.3)

Seien X und Y beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ mit einem nichtleeren Inneren. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und disjunkte Zerlegungen

$$X = X_1 \cup ... \cup X_n \qquad \text{und} \qquad Y = Y_1 \cup ... \cup Y_n \quad ,$$

so dass $X_j \cong Y_j$ für $1 \leq j \leq n$ erfüllt ist.

Definition der Mengenhalbringe

Sei Ω eine beliebige Menge.

Definition (2.1)

Eine Teilmenge $\mathscr{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ wird Mengenhalbring in Ω genannt, wenn $\varnothing \in \mathscr{H}$ gilt und folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Sind $A, B \in \mathscr{H}$, dann liegt auch $A \cap B$ in $\mathscr{H}$.

(ii) Für alle $A, B \in \mathscr{H}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Mengen $C_1, ..., C_r \in \mathscr{H}$, so dass $A \setminus B$ als disjunkte Vereinigung $A \setminus B = C_1 \cup ... \cup C_r$ dargestellt werden kann.

Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathscr{H}$, dann nennt man $\mathscr{H}$ eine Halbalgebra.

Sowohl die Intervalle als auch die endlichen Intervalle bilden einen Mengenhalbring in $\mathbb{R}$.