Lokale Extrema im Mehrdimensionalen

Definition (8.9)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, $a \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Man sagt, f hat im Punkt a ein

(i) lokales Maximum, wenn eine Umgebung $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ von a existiert, so dass $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in U \cap U'$ gilt,

(ii) isoliertes lokales Maximum, wenn U so gewählt werden kann, dass sogar $f(a) > f(x)$ für alle $x \in (U \cap U') \setminus \{a\}$ erfüllt ist.

Entsprechend definiert man lokale Minima und isolierte lokale Minima. Wie in der Analysis einer Variablen verwenden wir den Begriff Extremum als Oberbegriff für Minima und Maxima.

Notwendiges Kriterium für Extrema

Satz (8.10)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in U$ ein lokales Extremum von f. Dann gilt $df(a) = 0$.

Einen Punkt, in dem die erste Ableitung einer Funktion f verschwindet, bezeichnet man als kritische Stelle von f.

hinreichende Kriterien für Extrema

Satz (8.11)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $a \in U$ eine kritische Stelle von f.

(i) Ist $\mathscr{H}(f)(a)$ positiv definit, dann besitzt f in a ein isoliertes lokales Minimum.

(ii) Ist $\mathscr{H}(f)(a)$ negativ definit, dann besitzt f in a ein isoliertes lokales Maximum.

(iii) Ist $\mathscr{H}(f)(a)$ indefinit, dann hat f in a kein lokales Extremum.

Bem.: Ist a ein kritischer Punkt unserer Funktion f und die Hessematrix $\mathcal{H}(f)(a)$ positiv semidefinit, dann ist keine allgemeine Aussage über das Auftreten eines lokalen Minimums möglich. (Dasselbe gilt für „negativ semidefinit" und lokale Maxima.)

Beispiel: $g(x,y) = x^2 + y^3$ $\quad h(x,y) = x^2 + y^4$

(Beide Fkt. sind auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert.)

$dg(x,y) = (2x \;\; 3y^2)$, $\quad dh(x,y) = (2x \;\; 4y^3)$

Es gilt $dg(0,0) = dh(0,0) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$, d.h. $(0,0)$ ist eine kritische Stelle beider Funktionen.

$\mathcal{H}(g,(x,y)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{H}(h,(x,y)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}(g,(x,y)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{H}(h,(x,y)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{H}(g,(0,0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{H}(h,(0,0))$$

Diese Matrix ist positiv semidefinit, da für jedes $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt $(v_1\ v_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (v_1\ v_2)\begin{pmatrix} 2v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_1^2 \geq 0$

Die Matrix ist nicht positiv definit, da z.B. $e_2 \neq 0$, ${}^t e_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_2 = 0$.

Der Punkt $(0,0)$ ist ein lokales (sogar globales) Minimum von h, denn für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt $h(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0$.

Der Punkt $(0,0)$ ist aber <u>kein</u> lokales Minimum von g, denn: Sei U eine (beliebig kleine Umg.) von $(0,0)$. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \in U$. Es gilt $g(0,\varepsilon) = \varepsilon^3 > 0 = g(0,0)$ und $g(0,-\varepsilon) = -\varepsilon^3 < 0 = g(0,0)$. $\Rightarrow$ Der Punkt $(0,0)$ ist kein lokales Extremum (weder Min. noch Max.)

Satz (8.12)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $a \in U$ ein kritischer Punkt von f und $A = \mathscr{H}(f)(a)$.

(i) Besitzt f bei a ein lokales Minimum, dann ist A positiv semidefinit.

(ii) Besitzt f bei a ein lokales Maximum, dann ist A negativ semidefinit.

Definition der Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Definition (9.1)

Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $d < n$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ genannt, wenn für jeden Punkt $p \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gibt eine offene Umgebung U und $\mathscr{C}^1$-Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_{n-d} : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$M \cap U = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = ... = \varphi_{n-d}(x) = 0\}$$

erfüllt ist.

(ii) Es gilt $\dim\langle d\varphi_1(p), ..., d\varphi_{n-d}(p)\rangle_{\mathbb{R}} = n - d$.

Beispiele für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

(1) Kreis $K = S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

Dies ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, denn:

Definiere $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2+y^2-1$.

Dann gilt $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x,y) = 0\}$,

außerdem: $d\varphi_1(x,y) = (2x \ \ 2y) \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Für alle $(x,y)\in K$ gilt $d\varphi_1(x,y) \neq 0$

und somit $\dim \langle d\varphi_1(x,y) \rangle_{\mathbb{R}} = 1$
für diese Punkte

(2) Jeder d-dim. affine Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine d-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. (Grund: Jeder solche Unterraum kann durch ein lineares Gleichungssystem

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (1 \leq i \leq n-d)$$

beschrieben werden. Definiere $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-d}$ durch $\varphi_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - b_i$. Dann ist der Unterraum die gemeinsame Nullstellenmenge dieser Funktionen.

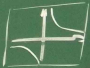
Für $1 \le i \le n-d$ gilt jeweils

$$d\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Diese $(1 \times n)$-Matrizen müssen linear unabhängig sein, damit die Gleichungen $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0$ $(1 \le i \le n-d)$ einen d-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ beschreiben (Dimensionssatz)

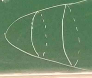
also: $\dim \langle d\varphi_1(x), \dots, d\varphi_{n-d}(x) \rangle_{\mathbb{R}} = n-d \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(3) Hyperbel $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$



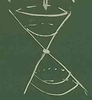
(4) Rotationsparaboloid $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$

(2-dim. Untermf. des $\mathbb{R}^3$)



(5) kein Beispiel für eine Untermf des $\mathbb{R}^3$

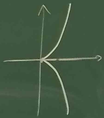
Kegel $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$



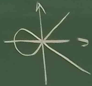
aber: $\tilde{C} = C\setminus\{(0,0,0)\}$ ist eine Untermf. des $\mathbb{R}^3$ | Betrachte auf $U=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ die Fkt. $\varphi_1(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ }

(6) weitere Gegenbeispiele

Neilsche Parabel $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=x^3\}$



$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=x^2(x+1)\}$



...s $\mathbb{R}^n$
...gkeit
...erraum
...ystem
...$i\le n-d$)
..., φ_{n-d}
... $- b_i$.
...hsume
...en.

Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten durch Karten

Satz (9.2)

Sei M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es für jeden Punkt p eine offene Umgebung U im $\mathbb{R}^n$ und einen $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$\phi(M \cap U) \quad = \quad (\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap V$$

erfüllt ist. Man nennt ϕ eine Karte der Untermannigfaltigkeit und das Paar (U, ϕ) eine Koordinatenumgebung des Punktes p.

Definition (9.3)

Sei M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf M. Man bezeichnet einen Punkt $p \in M$ als

(i) globales Maximum auf M, wenn $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in M$ gilt und als

(ii) lokales Maximum auf M, wenn eine Umgebung U von p im $\mathbb{R}^n$ existiert, so dass $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in M \cap U$ erfüllt ist.

Entsprechend sind globale und lokale Minima auf M definiert, und wie immer ist „Extremum auf M" der gemeinsame Oberbegriff für Minimum und Maximum.

Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbed.

Satz (9.4)

Seien M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p \in M \cap U$ und $\varphi_1, ..., \varphi_{n-d}$ Funktionen, so dass die Bedingungen (i) und (ii) aus Def. 9.1 erfüllt sind. Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine weitere $\mathscr{C}^1$-Funktion. Ist p ein lokales Extremum von $f|_{M \cap U}$, dann gibt es reelle Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$, so dass in $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Gleichung

$$df(p) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n-d} \lambda_j d\varphi_j(p) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Man bezeichnet die Zahlen λ_j mit dieser Eigenschaft als Lagrange-Multiplikatoren.

Anwendungsbeispiele für Satz 9.4

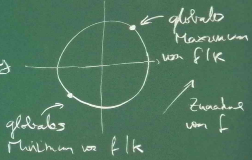
(1) geg: Kreis $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x,y) = 0\}$,

wobei $\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x + y$

$d\varphi_1(x,y) = (2x \quad 2y)$

$df(x,y) = (1 \quad 1)$



Nach Satz 9.4 gilt: Ist $(x,y) \in K$ ein lokales Extremum von $f|K$, dann gibt es ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $df(x,y) = \lambda_1 \cdot d\varphi_1(x,y)$. $\to$

mit $df(x,y) = \lambda_1 \cdot d\varphi_1(x,y) \Rightarrow$

$$(1\ \ 1) = \lambda_1 (2x\ \ 2y) \Rightarrow 2\lambda_1 x = 1 \quad 2\lambda_1 y = 1$$

Ang. $\lambda_1 = 0$. $\Rightarrow df(x,y) = (0\ \ 0)$ ↯ zu $df(x,y) = (1\ \ 1)$

Also ist $\lambda_1 \neq 0$ und $x = \frac{1}{2\lambda_1}$, $y = \frac{1}{2\lambda_1} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2\lambda_1}, \frac{1}{2\lambda_1}\right)$

Da $(x,y) \in K$, gilt $x^2 + y^2 = 1$. $\Rightarrow \left(\frac{1}{2\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda_1}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{1}{4\lambda_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\lambda_1^2} = 1 \Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1 \in \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in \left\{ \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{glob. Minimum}}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{glob. Maximum}} \right\}$$

(2) Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die Ebene

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \}$$

und den Punkt $q = (1, 0, 0)$

<u>Ziel:</u> Bestimme ein $p \in E$ mit minimalem Abstand zum Punkt q.

Betrachte dazu die Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \| (x, y, z) - q \|^2 \\ &= \| (x-1, y, z) \|^2 \\ &= (x-1)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

(„Quadrierter Abstand von (x, y, z) zu q.")

$= (x-1)^2 + y^2 + z^2$

Wir verwenden Satz 9.4, um für $f|_E$ das global Minimum zu finden.

Es ist $E = \{(x,y,z) \mid \varphi_1(x,y,z) = 0\}$, wobei $\varphi_1(x,y,z) = x+y-z$. Die totale Ableitung von φ_1 ist $d\varphi_1(x,y,z) = (1 \;\; 1 \;\; -1)$, außerdem $df(x,y,z) = (2x-2, 2y, 2z)$. Ang. $(x,y,z) \in E$ ist ein lokale Extremum von $f|_E$. Dann existiert ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $df(x,y,z) = \lambda_1 \, d\varphi_1(x,y,z)$.

$\Rightarrow (2x-2, 2y, 2z) = (\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1)$

$\Rightarrow x-1 = \frac{1}{2}\lambda_1, \; y = \frac{1}{2}\lambda_1, \; z = -\frac{1}{2}\lambda_1$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(1+\tfrac{1}{2}\lambda_1,\ \tfrac{1}{2}\lambda_1,\ -\tfrac{1}{2}\lambda_1\right)$$

$$(x,y,z) \in E \Rightarrow x+y=z \Rightarrow \left(1+\tfrac{1}{2}\lambda_1\right) + \tfrac{1}{2}\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}\lambda_1$$

$$\Rightarrow 1+\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}\lambda_1 \Rightarrow \tfrac{3}{2}\lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = -\tfrac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(\tfrac{2}{3},\ -\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{3}\right)$$