

H24 T3 A4

Übung: H22 T1 A4

Sei $f = x^3 + x^2 - 2x - 1$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f .

(a) zeigen Sie durch Polynomdivision, dass $f(x^2 - 2)$ durch f teilbar ist.

$$\begin{aligned} f(x^2 - 2) &= (x^2 - 2)^3 + (x^2 - 2)^2 - 2(x^2 - 2) - 1 \\ &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1 \end{aligned}$$

$f(x^2-2)$ durch f teilbar ist
Polynomdivision:

$$(x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1) : (x^3 + x^2 - 2x - 1) = x^3 - x^2$$

$$-(x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3)$$

$$-x^5 - 3x^4 + x^3 + 6x^2 - 1$$

$$-(-x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2)$$

Ergebnis: $x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1 = (x^3 - x^2 - 2x + 1) \cdot f$

(v) Zeigen Sie, dass α und $\alpha^2 - 2$ zwei verschiedene Nullstellen von f sind.

Laut Angabe ist α eine Nullstelle.

Nach Teil (a) $f(x^2-2) = (x^3-x^2-2x+1) \cdot f(x)$
 $= (x^3-x^2-2x+1) \cdot 0 = 0$

noch z.zg. $x \neq x^2-2$. Ang. $x^2-2 = x \Rightarrow$
 $x^2-x-2=0 \Rightarrow x$ ist Nullstelle von $h = x^2-x-2$

Beh. f ist Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$.

klar. f ist normiert und hat x als Nullstelle.
 noch z.zg. f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$

Ang. f ist reduzibel. Wegen $\deg(f)=3$ hätte f
 dann eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$. $f \in \mathbb{Z}[x]$, f normiert
 $\Rightarrow$ Jede rationale Nullstelle ist ganzzahlig

$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha$ ist Nullstelle von $h = x^2 - x - 2$
 Beh. f ist Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$

und ein Teiler des konstanten Terms $-1 \Rightarrow$ Einzige mögliche rationale Nullstellen von f sind ± 1 . aber
 $f(1) = -1 \neq 0$, $f(-1) = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ hat keine rationalen Nullstellen und ist somit irreduzibel. ($\rightarrow$ Beh.)

Da also f das eindeutig bestimmte normierte Pol. minimalen Grades ist mit α als Nullstelle, kann α wegen $\text{grad}(h) < \text{grad}(f)$ keine Nullstelle von h sein. Also gilt tatsächlich $\alpha \neq \alpha^2 - 2$. $\square$

alternativer Ansatz zum Nachweis von
 $f(\alpha^2 - 2)$: $f(x) = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \alpha^3 = 1 + 2\alpha - \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3 = \alpha + 2\alpha^2 - \alpha^3 =$$

$$\cancel{\alpha} + 2\alpha^2 - \cancel{1} - 2\alpha + \alpha^2 = -1 - \alpha + 3\alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^5 = \alpha \cdot \alpha^4 = -\alpha - \alpha^2 + 3\alpha^3 =$$

$$-\alpha - \alpha^2 + 3(1 + 2\alpha - \alpha^2) = 3 + 5\alpha - 4\alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^6 = \alpha \cdot \alpha^5 = \dots = -4 - 5\alpha + 9\alpha^2$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha^6 - 5\alpha^4 + 6\alpha^2 - 1$$

$$= (-4 - 5\alpha + 9\alpha^2) + (\cancel{5} + \cancel{5\alpha} - \cancel{15\alpha^2}) + 6\alpha^2 - 1 = 0$$

B
 die
 des
 Für
 = (5
 ((e^{2\pi i}

Def. Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ ein nicht-konstantes Polynom.

Ein Erweiterungskörper L heißt Zerfällungskörper von f über K , wenn gilt

(i) f zerfällt über L in Linearfaktoren

(ii) Es gilt $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Nullstellen von f in L bezeichnen.

Erinnerung. Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und seien $S, T \subseteq L$ bd. Teilmengen.

Dann gilt: $K(S) = K(T) \iff S \subseteq K(T)$
und $T \subseteq K(S)$

F12I1AS (a) Übung: F23T2A4

Sei $f = x^5 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$, $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfallungskörper von f über $\mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt[5]{-5} \in \mathbb{R}$ und $\zeta = e^{2\pi i/5}$. Zeigen Sie: $K = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$

Beh. $N = \{\zeta^k \alpha \mid 0 \leq k \leq 4\}$ ist die Menge der komplexen Nullstellen des Polynoms f

Für $0 \leq k \leq 4$ gilt jeweils $f(\zeta^k \alpha)$
$$= (\zeta^k \alpha)^5 + 5 = (\zeta^5)^k \alpha^5 + 5 =$$
$$((e^{2\pi i/5})^5)^k (-5) + 5 = (e^{2\pi i})^k (-5) + 5$$

[*]

$= 1^k \cdot (-5) + 5 = 0$ Also ist N in der Nullstellenmenge von f enthalten.

Bekanntlich ist ζ eine primitive 5-te Einheitswurzel, also ein Element der Ordnung 5 in $\mathbb{C}^\times \Rightarrow \zeta^k, 0 \leq k \leq 4$ sind 5 verschiedene komplexe Zahlen $\Rightarrow \zeta^k \neq 1, 0 \leq k \leq 4$ sind 5 verschiedene komplexe Zahlen, also fünf verschiedene Nullstellen von f . Da f als Polynom vom Grad 5 höchstens fünf Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, ist $N = \{ \zeta^k \mid 0 \leq k \leq 4 \}$ genau die Nullstellenmenge von f in $\mathbb{C}$.
 ($\Rightarrow$ Beh.) Da f über $\mathbb{C}$ zerfällt, folgt aus der Beh., dass $\mathbb{Q}(N)$ der Zerf.körper von f

Fällungs-

etoren

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$

lunen.

erweit-

Teilungen.

$\leq K(T)$

$\wedge T \leq K(S)$

über $\mathbb{Q}$ ist. noch z.zg: $\mathbb{Q}(N) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$

genügt: (i) $N \subseteq \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ (ii) $\{\alpha, \beta\} \subseteq \mathbb{Q}(N)$

zuli) $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ ist abg. unter Mult.

$\Rightarrow \beta^k \alpha \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ für $0 \leq k \leq 4 \Rightarrow N \subseteq \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$

zuli) $\alpha, \beta \alpha \in N \Rightarrow \alpha, \beta \alpha \in \mathbb{Q}(N) \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}(N)$ und
 $\beta = \frac{\beta \alpha}{\alpha} \in \mathbb{Q}(N) \Rightarrow \{\alpha, \beta\} \subseteq \mathbb{Q}(N) \hookrightarrow \mathbb{Q}(N)$ Teilkörper von $\mathbb{C}$ $\square$

Gradformel: Seien $L|K$ und $M|L$ endl. Körpererw.

Dann ist auch $M|K$ endlich, und es gilt

$$[M:K] = [M:L] \cdot [L:K]$$

= 6. H24T2A5 Sei $f = x^6 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$, und sei $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Erweiterungsgrad $[L : \mathbb{Q}]$.

Zeige zunächst $L = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$, wobei $\alpha = \sqrt[6]{6}$, $\zeta = e^{2\pi i/6} = e^{\pi i/3}$ (genau wie oben, Übung)

Es ist $\zeta = e^{\pi i/3} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2} \sqrt{3}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3}$. Daraus folgt $\mathbb{Q}(\alpha, \zeta) = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3})$,

denn $\zeta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3} \in \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3})$, $\sqrt{-3} = 2\zeta - 1 \in \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$.

Offenbar ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) \mid \mathbb{Q}$. Auf Grund der Gradformel gilt also

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$$

Beh. $f = M_{\alpha, \mathbb{Q}}$ klar: f ist normiert und $f(\alpha) = 0$. Außerdem $f = x^6 - 6$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$ auf Grund des Eisensteinkriteriums, angewendet auf die Primzahl 2 oder 3. ($\Rightarrow$ Beh.)

über
genü

zu (ii)

$\Rightarrow$

zu (ii)

$$f = \frac{f(x)}{x}$$

Gradformel

Dann ist

Aus der Beh. folgt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \text{grad}(f) = 6$. H2

Beh. $x^2 + 3 = \mu \sqrt{-3}, \mathbb{Q}(\alpha)$

klar: $x^2 + 3 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$, $x^2 + 3$ ist normiert
und hat $\sqrt{-3}$ als Nullstelle. Aug.

$x^2 + 3$ ist über $\mathbb{Q}(\alpha)$ reduzibel. Da der
Grad gleich 2 ist, liegen die beiden komplexen
Nullstellen $\pm i\sqrt{3}$ dann in $\mathbb{Q}(\alpha)$. $\alpha = \sqrt[6]{6} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$. Aus $\pm i\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ würde
also $\pm i\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ folgen $\nmid$. Also ist $x^2 + 3$
über $\mathbb{Q}(\alpha)$ irreduzibel. ($\Rightarrow$ Beh.)

ein
den

Zug

= e

Es ist

= $\frac{1}{2} +$

denn

$$\begin{aligned}
 \text{Beh} &\rightarrow [K: \mathbb{Q}(X)] = [\mathbb{Q}(X)(\sqrt{-3}) : \mathbb{Q}(X)] \\
 &= \text{grad}(x^2 + 3) = 2 \quad \text{Egradformel} \rightarrow \\
 [K: \mathbb{Q}] &= [K: \mathbb{Q}(X)] \cdot [\mathbb{Q}(X): \mathbb{Q}] = \\
 2 \cdot 6 &= 12. \quad \square
 \end{aligned}$$

FRÜH 1.5 (*) Zeigen Sie: $[K: \mathbb{Q}] = 20$

Teil (a) $\Rightarrow K = \mathbb{Q}(X, \zeta)$ mit $X = \sqrt[5]{-5} \in \mathbb{R}$
 und $\zeta = e^{2\pi i/5} \Rightarrow \mathbb{Q}(X)$ ist Zwischenkörper
 von $K | \mathbb{Q}$ Egradformel $\Rightarrow$

$$[K: \mathbb{Q}] = [K: \mathbb{Q}(X)] \cdot [\mathbb{Q}(X): \mathbb{Q}]$$

Es gilt $M_{X, \mathbb{Q}} = f = x^5 + 5$, denn f ist

$-5n - 4 \cdot 2$ Beh: $N = 15$ $\alpha \mid 0 \leq k \leq 4$ f ist

$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$

Formel $\rightarrow$

$\uparrow =$

$\square$

$[\mathbb{Q}] = 20$

$\alpha = \sqrt[5]{-5} \in \mathbb{R}$

Realkörper

$[\mathbb{Q}]$

denn f ist

normiert, $f(\alpha) = 0$ und f ist irred.

auf Grund des Eisenstein-Krit. angewendet

auf die Primzahl 5. $\Rightarrow [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$

$= \text{grad}(f) = 5$

Es gilt $\Phi_5(x) = 0$ (Φ_5 fünftes Kreisteilungspol.) und $\Phi_5 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x] \Rightarrow$

$\mu_{5, \mathbb{Q}(\alpha)}$ teilt Φ_5 in $\mathbb{Q}(\alpha)[x] \Rightarrow$

$[K : \mathbb{Q}(\alpha)] = [\mathbb{Q}(\alpha)(\xi) : \mathbb{Q}(\alpha)] = \text{grad } \mu_{5, \mathbb{Q}(\alpha)}$

$\leq \text{grad } \Phi_5 = \varphi(5) = 4$