Erinnerung: G Gruppe, X Menge,

$\cdot : G \times X \to X$ Operation von G auf X.

Dann existiert ein Hom. $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$

mit $\phi(g)(x) = g \cdot x \ \forall x \in X, g \in G$.

Anwendung: Satz von Cayley

Ist G eine endliche Gruppe und $n = |G|$, dann ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

Wende den Zusammenhang von oben an auf

Anwendung: Satz von Cayley

die Operation durch Linkstranslation
$(g \cdot h = gh \ \forall g, h \in G) \Rightarrow$ erhalte einen
Hom. $\phi : G \to \mathrm{Per}(G)$ Dieser ist injektiv,
denn: Sei $g \in \ker(\phi) \Rightarrow \phi(g) = \mathrm{id}_G \Rightarrow$
$g = ge = g \cdot e = \phi(g)(e) = \mathrm{id}_G(e) = e$
Wegen $|G| = n$ existiert ein Isom. $\iota : \mathrm{Per}(G)$
$\to S_n \Rightarrow \psi = \iota \circ \phi$ ist inj. Hom. $G \to$
$S_n \Rightarrow G$ ist isomorph zur Untergruppe
$\psi(G)$ von S_n. $\square$

F22T3A1(V) Die Untergruppe von $\mathrm{Per}(\mathbb{F}_2^2)$ bestehend aus den Abb. der Form $\tau_{u,A}: v \mapsto u + Av$ mit $A \in GL_2(\mathbb{F}_2)$ und $u \in \mathbb{F}_2^2$ wird als affin-lineare Gruppe $AGL_2(\mathbb{F}_2)$ bezeichnet.

(a) Geben Sie alle Elemente von $GL_2(\mathbb{F}_2)$ an und bestimmen Sie die Ordnung $|AGL_2(\mathbb{F}_2)|$.

(b) Zeigen Sie, dass $AGL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_4$ gilt.

zu (a) Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{F}_2}$ mit Spalten $v, w \in \mathbb{F}_2^2$ ist genau dann invertierbar, wenn $v \neq 0_{\mathbb{F}_2^2}$ und $w \notin \langle v \rangle_{\mathbb{F}_2}$ $^{(*)}$

Per(X)

$g \in G$

te einen

jektiv,

$\Rightarrow$

$= e$

Per(G)

$G \Rightarrow$

ruppe

$\square$

mit $A \in GL_2(\mathbb{F}_2)$ und $u \in \mathbb{F}_2^2$ wird als affin-lineare Gruppe $AGL_2(\mathbb{F}_2)$ bezeichnet.

(a) Geben Sie alle Elemente von $GL_2(\mathbb{F}_2)$ an, und

gilt. Vorgehensweise somit: Gehe alle Möglichkeiten für v durch $\left(\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 0\\ \bar 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 1\end{pmatrix}\right)$ und nach Wahl von v jeweils alle durch die Bed. $(*)$ sich ergebenden Mögl. für w. So erhalten wir

$$GL_2(\mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix}\bar 1 & \bar 0\\ \bar 0 & \bar 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 1 & \bar 1\\ \bar 0 & \bar 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 0 & \bar 1\\ \bar 1 & \bar 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 0 & \bar 1\\ \bar 1 & \bar 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 1 & \bar 1\\ \bar 1 & \bar 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 1 & \bar 0\\ \bar 1 & \bar 1\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow |GL_2(\mathbb{F}_2)| = 6$$

Um die Ordnung von $AGL_2(\mathbb{F}_2)$ zu bestimmen, zeigen wir, dass $\phi: GL_2(\mathbb{F}_2) \times \mathbb{F}_2^2 \to AGL_2(\mathbb{F}_2)$, $(A, u) \mapsto \tau_{u,A}$ eine Bijektion ist. Die Surjektivität ist klar auf Grund der Definition von $AGL_2(\mathbb{F}_2)$. Zur Injektivität:

Seien $(A, u), (A', u') \in GL_2(\mathbb{F}_2) \times \mathbb{F}_2^2$

mit $\phi(A, u) = \phi(A', u')$ vorgeg.

z.zg: $A = A'$, $u = u'$. Auf Grund der Vor. gilt $\tau_{u,A} = \tau_{u',A'}$

$\Rightarrow u = u + A\, 0_{\mathbb{F}_2^2} = \tau_{u,A}(0_{\mathbb{F}_2^2}) = \tau_{u',A'}(0_{\mathbb{F}_2^2}) = u' + A' \cdot 0_{\mathbb{F}_2^2} = u'$

$\tau_{u,A}(e_1) = \tau_{u,A'}(e_1) \Rightarrow u + Ae_1 = u + A'e_1 \Rightarrow Ae_1 = A'e_1 \Rightarrow$

Die ersten Spalten von A und A' sind gleich. Genauso sieht man anhand von $\tau_{u,A}(e_2) = \tau_{u,A'}(e_2)$, dass

al

„D

Ope

mentz

exist
geg

S_4

und s

die B

auch die zweiten Spalten gleich sind.

$\Rightarrow A = A'$ ($\Rightarrow$ Bijektivität von ϕ)

Es folgt $|AGL_2(\mathbb{F}_2)| = |GL_2(\mathbb{F}_2)| \cdot |\mathbb{F}_2^2|$
$= 6 \cdot 4 = 24$

<u>zu (b)</u> zzg: $AGL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_4$

Nach Teil (a) ist $AGL_2(\mathbb{F}_2)$ eine 24-elementige Untergruppe von $\mathrm{Per}(\mathbb{F}_2^2)$.
Wegen $|\mathbb{F}_2^2| = 4$ existiert ein Isomorphismus $\psi : \mathrm{Per}(\mathbb{F}_2^2) \to S_4$. Also ist $AGL_2(\mathbb{F}_2)$ isomorph zur Untergruppe $\psi(AGL_2(\mathbb{F}_2)) \leq S_4$.
Da ψ bijektiv ist, gilt $|\psi(AGL_2(\mathbb{F}_2))|$
$= |AGL_2(\mathbb{F}_2)| = 24 = |S_4|$ und somit

$\mathbb{F}_2^2$

g.

rend

$) =$

u'

$e_1 =$

$\Rightarrow$

nd A'

t man an-

(e_2), dass

$\psi(AGL_2(\mathbb{F}_2)) = S_4$. $\Rightarrow$ $AGL_2(\mathbb{F}_2)$ ist isomorph zu S_4.

□

alternative Formulierungsmöglichkeit:

„Durch $(\tau_{u,A}, v) \mapsto \tau_{u,A}(v)$ ist eine Operation von $AGL_2(\mathbb{F}_2)$ auf der vierelementigen Menge $\mathbb{F}_2^2$ gegeben. Laut Vl. existiert somit ein Hom. $\phi : AGL_2(\mathbb{F}_2) \to S_4$ geg. durch ... Überprüfe, dass ϕ injektiv ist, und schließe aus $|AGL_2(\mathbb{F}_2)| = 24 = |S_4|$ die Bijektivität and

$p)$

$\mathbb{F}_2^2|$

$24-$

$(\mathbb{F}_2^2)$.

orphismus

$GL_2(\mathbb{F}_2)$

$)) \leq S_4$.

$L_2(\mathbb{F}_2))|$

mit

H24T2A3

(a) Sei G eine einfache Untergruppe von S_n mit $|G| > 2$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von A_n ist.

(b) Sei G eine einfache Gruppe der Ordn. 90. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von A_6 ist.

(c) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 90 gibt.

<u>zu (a)</u> Angenommen, es gilt $G \nsubseteq A_n$.
z.zg.: G ist nicht einfach. Sei $\phi = \mathrm{sgn}|_G$, die Einschränkung der Signumsabb. auf G. Weil dies ein Hom. ist, ist $N = \ker(\phi)$ ein

Normalteiler von G. z.zg.: $N \neq G, \{id\}$

Ang $N = G \Rightarrow \ker(\phi) = G \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma)$

$= \phi(\sigma) = 1 \ \forall \sigma \in G \Rightarrow G \subseteq A_n$ ↯

Ang. $N = \{id\}$ Dann ist ϕ ein injektiver

Homomorphismus $G \to \{\pm 1\}$. $\Rightarrow$

$|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$ ↯ zu $|G| > 2$

Somit ist N nichttrivialer Normalteiler

von G und G keine einfache Gruppe.

zu (b) $90 = 9 \cdot 10 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ Für jede Prim-

zahl p sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgr.

... nichttrivialer Normalteiler von G und G keine einfache Gruppe

von G. 3. Sylowsatz $\Rightarrow r_5 \mid 2\cdot 3^2 \Rightarrow$
$r_5 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, außerdem $r_5 \equiv 1 \bmod 5$. $2, 3 \not\equiv 1 \bmod 5$, $9 \equiv 4 \not\equiv 1 \bmod 5$, $18 \equiv 3 \not\equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow r_5 \in \{1, 6\}$

Ang. $r_5 = 1$. Dann wäre die einzige 5-Sylowgruppe ein Normalteiler von G der Ordnung 5, wegen $1 < 5 < 90$ also ein nichttrivialer Normalteiler. ↯ zu G einfach. <u>also</u>: $r_5 = 6$

Die Operation von G auf der 6-elementigen Menge X der 5-Sylowgruppen liefert einen ver-

er

ge.

e Prim-

Sylowgr.

Hom. $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$ mit $\phi(g)(P) = g \cdot P = gPg^{-1}$ $\forall g \in G$ und $P \in X$. Wegen $|X| = \nu_5 = 6$ existiert ein Isom. $\iota : \mathrm{Per}(X) \to S_6$. $\Rightarrow$ Durch $\psi = \iota \circ \phi$ ist ein Hom. $G \to S_6$ gegeben. Beh.: ψ ist injektiv.

Da G einfach und $\ker(\psi)$ ein Normalteiler von G ist, muss $\ker(\psi) = \{e\}$ oder $\ker(\psi) = G$ gelten. Im Fall $\ker(\psi) = \{e\}$ ist ψ injektiv. Ansonsten gilt $\psi(g) = \mathrm{id}$ $\forall g \in G$ $\Rightarrow \iota(\phi(g)) = \mathrm{id} = \iota(\mathrm{id}_X)$ $\forall g \in G \overset{\iota \text{ inj.}}{\Longrightarrow} \phi(g) = \mathrm{id}_X$ $\forall g \in G$ $\Rightarrow$

ist, muss $\ker(\psi) = \{e\}$ oder $\ker(\psi) = G$ gelten.
Im Fall $\ker(\psi) = \{e\}$ ist ψ injektiv. Ansonsten

$$gPg^{-1} = \phi(g)(P) = \mathrm{id}_X(P) = P \quad \forall g \in G,\ P \in X$$

$\Rightarrow$ Jedes $P \in X$ ist Normalteiler von G. $\overset{2.\text{ Sylowsatz}}{\Longrightarrow}$ $\nu_5 = 1$

Wid zu $\nu_5 = 6$ $\quad$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Auf Grund der Beh. ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_6, nämlich zu $\psi(G)$. Mit G ist auch $\psi(G)$ einfach. Aus Teil (a) folgt nun $\psi(G) \leq A_6$. Also ist G isomorph zu einer Untergr. von A_6.

zu (c) z.zg.: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 90.

Nach Teil (b) genügt es zu zeigen, dass keine (einfache) Untergruppe G von A_6 mit $|G| = 90$ existiert.

Ang.: G ist eine solche Untergruppe.

Es ist $|A_6| = \frac{1}{2} 6! = \frac{1}{2} \cdot 720 = 360$

Betrachte die Operation von A_6 auf der Menge $X = A_6/G$ geg. durch $\sigma \circ (\tau G) = (\sigma\tau)G$ für alle $\sigma, \tau \in A_6$. Es ist $|X| =$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$= |A$

Insgesa

Normal

ist, exist

$(A_6 : G) = \frac{|A_6|}{|G|} = \frac{360}{90} = 4$. Die Operation liefert einen Hom. $\phi : A_6 \to \mathrm{Per}(X)$ mit $\phi(\sigma)(\tau G) = \sigma \cdot (\tau G) = (\sigma\tau) G$ für alle $\sigma, \tau \in A_6$. Sei $N = \ker(\phi)$, dies ist ein Normalteiler von A_6.

$|X| = 4 \Rightarrow \mathrm{Per}(X) \cong S_4 \Rightarrow |\mathrm{Per}(X)| = 4! = 24$. Ang. $N = \{id\}$. Dann ist ϕ injektiv. Also ist A_6 isomorph zur Untergruppe $\phi(A_6)$ von $\mathrm{Per}(X)$. Lagrange $\Rightarrow$ $|\phi(A_6)| = |A_6| = 360$ ist Teiler von $|\mathrm{Per}(X)| = 24$

↯ da $360 \nmid 24$. Ang. es ist $N = A_6$

e

n,

e G

ppe.

$= 360$

6 auf

durch

alle

d $|X| =$

$\Rightarrow \ker(\phi) = A_6 \Rightarrow \phi(\sigma) = \mathrm{id}_X \; \forall \sigma \in A_6$

$\Rightarrow \phi(\sigma)(G) = \mathrm{id}_X(G) = G \; \forall \sigma \in A_6$

$\Rightarrow \phi(\sigma)(\mathrm{id}\, G) = G \; \forall \sigma \in A_6$

$\Rightarrow \sigma G = G \; \forall \sigma \in A_6$

$\Rightarrow A_6 \subseteq G$ ↯ da $|G| = 90 < 360 = |A_6|$

Insgesamt ist N also ein nichttrivialer Normalteiler von A_6. Da A_6 einfach ist, existiert kein solcher Normalteiler. ↯

$\square$