Korrespondenzsatz für Gruppen:

Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$.
Sei $\bar{G} = G/N$, $\bar{\mathcal{G}}$ die Menge der Untergruppen von $\bar{G}$ und $\mathcal{G}_N$ sei die Menge der Untergruppen U von G mit $U \supseteq N$.

Dann gilt:

(i) Durch $\bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N$, $\bar{U} \mapsto \pi^{-1}(U)$

(i) Durch $\bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N$, $\bar{U} \mapsto \pi^{-1}(U)$

und $\mathcal{G}_N \to \bar{\mathcal{G}}$, $U \mapsto \pi(U)$ sind zueinander inverse <u>Bijektionen</u> definiert (wobei $\pi: G \to \bar{G}$ der kanonische Epimorphismus ist)

(ii) Die Zuordnungen sind <u>isoton</u> (= ordnungserhaltend), d.h. es gilt

$$\bar{U} \subseteq \bar{V} \iff \pi^{-1}(\bar{U}) \subseteq \pi^{-1}(\bar{V})$$

$$U \subseteq V \iff \pi(U) \subseteq \pi(V)$$

für alle $\bar{U}, \bar{V} \in \bar{\mathcal{G}}$ und $U, V \in \mathcal{G}_N$.

(iii) Sei $\bar{U} \in \bar{\mathcal{G}}$ ein Untergr. von endl. Index und U das entsprechende Element aus $\mathcal{G}_N$, d.h. $U = \pi^{-1}(\bar{U})$. Dann gilt $(G : U) = (\bar{G} : \bar{U})$.

(iv) Sei $\bar{U} \in \bar{\mathcal{G}}$ und $U = \pi^{-1}(\bar{U})$. Dann gilt die Äquivalenz $\bar{U} \trianglelefteq \bar{G} \Leftrightarrow U \trianglelefteq G$.

<u>F23T2A2</u> Sei G eine Gruppe der Ordnung 30, U_3 eine 3- und U_5 eine 5-Sylowgruppe.

(a) Zeigen Sie: $U_3 \trianglelefteq G$ oder $U_5 \trianglelefteq G$

(Ansatz: „Elemente zählen")

(a) Zeigen Sie: $U_3 \trianglelefteq G$ oder $U_5 \trianglelefteq G$

(Ansatz: Elemente zählen!)

(b) Zeigen Sie: Gilt $U_3 \trianglelefteq G$, dann hat G/U_3 eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass die analoge Aussage auch für die Zahl 5 gilt.

Setze zunächst $U_3 \trianglelefteq G$ voraus. Dann ist G/U_3 eine Gruppe der Ordnung $(G:U_3) = \frac{|G|}{|U_3|} = \frac{30}{3} = 10$. Da 5 ein Primteiler von $|G/U_3| = 10$ ist, existiert nach dem Lemma von Cauchy ein $\bar{g} \in G/U_3$ mit $\mathrm{ord}(\bar{g}) = 5$. Es ist dann $\bar{U} = \langle \bar{g} \rangle$ eine Untergruppe mit $|\bar{U}| = 5$, und $(G/U_3 : \bar{U}) = \frac{|G/U_3|}{|\bar{U}|}$

$$= \frac{10}{5} = 2$$

Betrachte nun den Fall $U_5 \trianglelefteq G$.

$$\Rightarrow |G/U_5| = \frac{|G|}{|U_5|} = \frac{30}{5} = 6$$

3 Primteiler von 6 $\xRightarrow{\text{Cauchy}} \exists\, \bar{g} \in G/U_5$ mit $\mathrm{ord}(\bar{g}) = 3 \Rightarrow$

$$(G/U_5 : \langle \bar{g} \rangle) = \frac{|G/U_5|}{|\langle \bar{g} \rangle|} = \frac{6}{3} = 2$$

(c) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe der Ordnung 15 hat

me

(bek

Sei

Anz

3. Sy

ν_{337}

ν_{337}

$\Rightarrow \nu_{33}$

Sylowg

2. Sylows

$\Rightarrow$

Teil (a) $\Rightarrow U_3 \trianglelefteq G$ oder $U_5 \trianglelefteq G$

1. Fall: $U_3 \trianglelefteq G$

Teil (b) $\Rightarrow$ Es gibt eine Untergruppe $\bar{U}$ von $\bar{G} = G/U_3$ mit $(\bar{G} : \bar{U}) = 2$.

Sei $\pi : G \to \bar{G}$ der kanonische Epimorphismus und $U_{15} = \pi^{-1}(\bar{U})$.

Laut Korrespondenzsatz gilt

$$(G : U_{15}) = (\bar{G} : \bar{U}) = 2$$

$$\Rightarrow |U_{15}| = \frac{|G|}{(G : U_{15})} = \frac{30}{2} = 15.$$

2.

Tei

mi

Sei

Kon

gilt

$|U_1$

H22

Ordn

(c)

G

uppe

$) = 2.$

Epi-

$)$.

2

15.

2. Fall: $U_5 \trianglelefteq G$

Teil (b) $\Rightarrow \exists\, \bar{U} \leq \bar{G}$, $\bar{G} = G/U_5$ mit $(\bar{G} : \bar{U}) = 2$

Sei $\pi : G \to \bar{G}$ der kan. Epimorphismus.

Korr.-satz $\Rightarrow$ Für $U_{15} = \pi^{-1}(\bar{U})$ gilt $(G : U_{15}) = (\bar{G} : \bar{U}) = 2 \overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ $|U_{15}| = 15$.

<u>H22T2A5</u> Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

(c) Zeigen Sie, dass G einen Nor...

$\trianglelefteq G$.

$= 6$

$\trianglelefteq\ \exists\, \bar{g} \in$

$\Longrightarrow$

$= \frac{6}{3} = 2$

eine

...ung 15 hat

malteiler vom Index 2 hat.

(bekannt: 337 ist Primzahl)

Sei ν_p für jede Primzahl p die Anzahl der p-Sylowgruppen.

3. Sylowsatz $\Longrightarrow \nu_{337} \mid 2 \cdot 3 \Longrightarrow$

$\nu_{337} \in \{1, 2, 3, 6\}$, außerdem

$\nu_{337} \equiv 1 \bmod 337 \quad 2, 3, 6 \not\equiv 1 \bmod 337$

$\Longrightarrow \nu_{337} = 1$ Sei N die einzige 337-Sylowgruppe von G $\quad \nu_{337} = 1$

$\underset{\text{2. Sylowsatz}}{\Longrightarrow} N \trianglelefteq G$. Sei $\bar{G} = G/N$

$|\bar{G}| = \frac{|G|}{|N|} = \frac{2022}{337} = 6$ Wie bei der vorherigen Aufgabe zeigt man, dass eine Untergr. $\bar{U} \leq \bar{G}$ mit $(\bar{G} : \bar{U}) = 2$ existiert

Sei $U = \pi^{-1}(\bar{U})$, wobei $\pi : G \to \bar{G}$ der kan. Epimorphismus ist. Korrespondenz-satz $\Rightarrow (G : U) = 2$ Wegen $(G : U) = 2$ ist U auch Normalteiler von G.

alternative Lösung: Wähle eine beliebige 3-Sylowgruppe P von G, betrachte kan. Epimorphismus ist Korrespondenz -

$U = NP$ (Komplexprodukt) überprüfe:

U ist inneres semidirektes Produkt von N und P. $\Rightarrow |U| = |N| \cdot |P| = 337 \cdot 3$

$$\Rightarrow (G:U) = \frac{|G|}{|U|} = \frac{2022}{337 \cdot 3} = 2 \qquad \square$$

$U \trianglelefteq G$ wg. $(G:U) = 2$.

Übung zum Korrespondenzsatz:

(a) Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe $\mathbb{Z}^2/U$ für $U = 2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Untergs. V von $\mathbb{Z}^2$ mit $V \supseteq U$ und $(\mathbb{Z}^2 : V) \in \{2, 4\}$.

zum Homomorphiesatz:

F20T2A3 (a), (b)

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Untergs.

$\phi: G \to \mathbb{F}_{p^k}^\times / \mathbb{F}_p^\times, \; A \mapsto \det(A)\,\mathbb{F}_p^\times$

$\square$

<u>Diedergruppen</u>

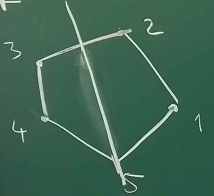
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

<u>Def</u>: Die $2n$-elementige Diedergruppe D_n ist die Untergruppe von S_n geg. durch $\langle \sigma_n, \tau_n \rangle$ mit $\sigma_n = (1\,2\,\dots\,n)$ („Drehung um $\frac{2\pi}{n}$") und

$$\tau_n = \begin{cases} (1\,n)(2\;n-1)\cdots(\tfrac{1}{2}n\;\;\tfrac{1}{2}n+1) & n \text{ gerade} \\ (1\;n-1)(2\;n-2)\cdots(\tfrac{1}{2}(n-1)\;\;\tfrac{1}{2}(n+1)) & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

„Spiegelung"

Bsp. $n = 5$



Spiegelung entspricht der Permutation $(1\,4)(2\,3)$

Eigenschaften:

- zweielem. Erzeugendensystem $\{\sigma_n, \tau_n\}$
- $|D_n| = 2n$, $\operatorname{ord}(\sigma_n) = n$, $\operatorname{ord}(\tau_n) = 2$
- D_n nicht-abelsch
- Es gilt $\sigma_n \tau_n \sigma_n \tau_n = \mathrm{id}$ (äquivalent: $\tau_n \sigma_n \tau_n = \sigma_n^{-1}$)

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und G eine Gruppe mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt $g, h \in G$ mit $G = \langle g, h \rangle$
- $\mathrm{ord}(g) = n$, $\mathrm{ord}(h) = 2$ und $ghgh = e$.

Dann ist G isomorph zu D_n.

F18T2A5 Sei $G = D_6$.

(a) Bestimmen Sie das Zentrum $Z(G)$.

(b) Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $G/Z(G)$.

G eine
enschaften:
$\langle g, h \rangle$

n $Z(G)$
morphietyp

zu (a) Erinnerung: Def. des Zentrums

$$Z(G) = \{ g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg \}$$

bekannt: $\exists\, \sigma, \tau \in G$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = 6$,
$\mathrm{ord}(\tau) = 2$ und $\sigma\tau\sigma\tau = e_G$.
außerdem $G = \langle \sigma, \tau \rangle$

Darüber hinaus sind die 12 Elemente von G geg. durch

$$G = \{ \sigma^a \tau^b \mid 0 \le a \le 5,\ b \in \{0,1\} \}$$

Grund: G ist inneres semidirektes Produkt von $\langle \sigma \rangle$ und $\langle \tau \rangle$ (siehe Vorlesung)

...lation

...m $\{\sigma_n, \tau_n\}$

..., $\mathrm{ord}(\tau_n) = 2$

id

$= \sigma_n^{-1})$

Bestimme nun das Zentrum durch das „Ausschlussprinzip".

Es gilt $\tau \sigma \tau = \sigma^{-1}$

$\mathrm{ord}(\tau) = 2 \Longrightarrow \tau \sigma \tau^{-1} = \sigma^{-1}$

Da die Konjugation mit τ ein Automorphismus von G ist, folgt $\tau \sigma^k \tau^{-1} = (\tau \sigma \tau^{-1})^k$
$= (\sigma^{-1})^k = \sigma^{-k}$ für $0 \leq k \leq 5$.

Sei nun $k \in \{0, \dots, 5\}$ und setze $\sigma^k \in Z(G)$ voraus $\Rightarrow \sigma^k \tau = \tau \sigma^k$

$\tau \sigma^k \tau^{-1} = \sigma^{k}$ $\quad \underset{\Rightarrow}{\tau\sigma^k\tau^{-1} = \sigma^{-k}} \quad \sigma^{-k} = \sigma^k$

$\Rightarrow \sigma^{2k} = e \xRightarrow{\operatorname{ord}(\sigma)=6} 6 \mid 2k \Rightarrow 3 \mid k$

$\Rightarrow k \in \{0, 3\}$

Betrachte nun das Element $\sigma^k \tau$.

setze $\sigma^k \tau \in Z(G)$ voraus:

überprüfe: $\sigma^k \tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \sigma^k \tau$

linke Seite: $\tau \sigma \tau^{-1} = \sigma^{-1} \Rightarrow \tau \sigma = \sigma^{-1} \tau$

$\Rightarrow \sigma^k \tau \circ \sigma = \sigma^k \sigma^{-1} \tau = \sigma^{k-1} \tau$

rechte Seite: $\sigma^{k+1} \tau$

somit: $\sigma^k \tau \in Z(G) \Rightarrow \sigma^{k-1}\tau = \sigma^{k+1}\tau$

$\Rightarrow \sigma^{k-1} = \sigma^{k+1} \quad \underset{\Rightarrow}{\cdot (\sigma^{k-1})^{-1}} \quad e = \sigma^2$

↯ da $\operatorname{ord}(\sigma) = 6$

$\rightarrow$ kein Element der Form $\sigma^k \tau$ mit $0 \leq k \leq 5$ liegt in $Z(G)$

insgesamt: $Z(G) \subseteq \{id, \sigma^3\}$

$\sigma^{-1}\tau$

„$\supseteq$" $id \in Z(G)$ (da $Z(G)$ Untergr. von G)

Um zu zeigen, dass auch σ^3 in $Z(G)$ liegt,

überprüfen wir, dass der Zentralisator
$C_G(\sigma^3) = \{\rho \in G \mid \rho \circ \sigma^3 = \sigma^3 \circ \rho\}$ mit
ganz G übereinstimmt.

$$\sigma \circ \sigma^3 = \sigma^4 = \sigma^3 \circ \sigma \Rightarrow \sigma \in C_G(\sigma^3)$$

$$\tau \circ \sigma^3 = \sigma^{-3} \circ \tau \underset{\uparrow\ \mathrm{ord}(\sigma)=6}{=} \sigma^3 \circ \tau \Rightarrow \tau \in C_G(\sigma^3)$$

also: $\{\sigma, \tau\} \subseteq C_G(\sigma^3)$, $C_G(\sigma^3)$ ist Untergruppe von G $\Rightarrow \langle \sigma, \tau \rangle \subseteq C_G(\sigma^3)$

$$\Rightarrow G = C_G(\sigma^3) \Rightarrow \sigma^3 \in Z(G)$$