**Def.:** Seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ Gruppen.

<u>Gruppenhom.</u> zwischen $(G, \cdot)$ und $(H, *)$

= Abbildung $\phi : G \to H$ mit

$$\phi(g \cdot g') = \phi(g) * \phi(g') \quad \forall g, g' \in G.$$

(Es gilt dann auch $\phi(e_G) = e_H$ und

$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} \quad \forall g \in G.$ )

<u>F23T1A1</u> (a) Sei $A$ eine abelsche Gruppe

und $\phi : A \to A$ geg. durch $\phi(a) = a^{-1} \; \forall a \in A$

Zeigen Sie, dass $\phi$ ein Gruppenhom. ist.

Seien $a, b \in A$. z.z.g.: $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

Es gilt $\phi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \overset{A \text{ abelsch}}{=} a^{-1}b^{-1}$

$= \phi(a)\phi(b)$.

gilt in jeder Gruppe

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine Gruppe $G$ an, bei der $\phi: G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ kein Gruppenhom. ist. (mit Nachweis)

Beh. $\phi: S_3 \to S_3$, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ ist kein Gruppenhomomorphismus.

Sei $\sigma = (12)$ und $\tau = (13)$. Es genügt zu zeigen, dass $\phi(\sigma \circ \tau) \neq \phi(\sigma) \circ \phi(\tau)$ gilt. bekannt: Jede Transposition in $S_n$ (für bel. $n \in \mathbb{N}$) hat Ordnung 2 und ist somit ihr eigenes Inverses. also: $\sigma = \sigma^{-1}$, $\tau = \tau^{-1}$.

Das Inverse eines 3-Zykels $(i\,j\,k)$ in $S_n$ ist geg. durch $(i\,j\,k)^{-1} = (i\,k\,j)$.

also: $\phi(\sigma \circ \tau) = \phi((12) \circ (13)) = \phi((1\,3\,2))$
$= (1\,2\,3)$, $\phi(\sigma) \circ \phi(\tau) = (12)^{-1} \circ (13)^{-1}$
$= (12) \circ (13) = (1\,3\,2)$

uppe
$\in A$

$(123) \neq (132) \Rightarrow \phi(\sigma \circ \tau) \neq \phi(\sigma) \circ \phi(\tau)$

(c) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die ein surjektiver Homomorphismus $A_4 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ existiert.

(Erinnerung: Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenhom. und $g \in G$ ein Element der endlichen Ordnung $n$ (d.h. $n \in \mathbb{N}$), dann hat auch $\phi(g)$ endliche Ordnung und $\mathrm{ord}(\phi(g)) \mid n$.)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ang., es gibt einen surjektiven Hom. $\phi : A_4 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Weil $\bar{1}$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

die Ordnung $n$ hat, muss für

jedes $\sigma \in A_4$ mit $\phi(\sigma) = \overline{1}$

$\mathrm{ord}(\sigma)$ ein Vielfaches von $n$ sein.

$\phi$ surjektiv $\Rightarrow \exists\, \sigma \in A_4$ mit $\phi(\sigma) = \overline{1}$.

Als Element von $A_4$ ist $\sigma$ eine

Doppeltransposition, ein 3-Zykel,

oder es ist $\sigma = \mathrm{id}$. $\Longrightarrow$

$\mathrm{ord}(\sigma) \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow n$ ist

Teiler von 1, 2 oder 3 $\Rightarrow$

$n \in \{1, 2, 3\}$

Sc

V

=

ord

d.h.

$\mathbb{Z}/3$

Tatsächlich existiert ein Hom.
$\phi: A_4 \to \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, geg durch $\sigma \mapsto \bar{0}$.
Dies ist tatsächlich ein Hom., da
$\phi(\sigma \circ \tau) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \phi(\sigma) + \phi(\tau)$
für alle $\sigma, \tau \in A_4$ gilt.

Ang. $\phi$ ist ein surj. Hom. $A_4 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Da $\bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein Element der
Ordnung 2 ist, kann kein 3-Zykel
$\sigma \in A_4$ von $\phi$ auf $\bar{1}$ abgebildet
werden (denn $\mathrm{ord}(\sigma) = 3$, $2 \nmid 3$).
also: $\phi(\sigma) = \bar{0}$ für alle 3-Zykel $\sigma$

in
der
bild
Bild
dentr
$\phi(\sigma$
kein
Talte
ist e
Satz
$N =$ ke

in $A_4$. Da die Teilmenge $S \subseteq A_4$ der 3-Zykel ein Erz.-system von $A_4$ bildet und jeder Hom. durch die Bilder eines Erz.-system bereits eindeutig festgelegt ist, folgt daraus bereits $\phi(\sigma) = \bar{0}\ \forall \sigma \in A_4$. $\Rightarrow$ Es gibt kein $\sigma \in A_4$ mit $\phi(\sigma) = \bar{1}$ ↯ zu Surjektivität

Alternativ: Ang. $\phi: A_4 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist ein surjektiver Hom. Homomorphiesatz $\Rightarrow A_4/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei $N = \ker(\phi)$. Es gilt $\frac{12}{|N|} = \frac{|A_4|}{|N|} =$

n.

$) = \overline{1}$.

e

...fel,

n ist

$\Rightarrow$

$(A_4 : N) = |A_4/N| = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 2$

$\Rightarrow |N| = 6$ Aber in $A_4$ existiert bekanntlich keine Untergruppe der Ordnung 6.

Laut Vorlesung gilt für die Kleinsche Vierergruppe $V_4$, dass $V_4 \trianglelefteq A_4$. $|A_4/V_4| = \frac{|A_4|}{|V_4|} = \frac{12}{4} = 3$ Als Gruppe der Primzahlordnung 3 ist $A_4/V_4$ zyklisch, d.h. es existiert ein Isom. $\phi : A_4/V_4 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Durch $\psi = \phi \circ \pi$ mit

$g_2 \in$

$\Rightarrow$

$(H)$

$2$

$(H)$

$) \Rightarrow$

dem kanonischen Epimorphismus $\pi: A_4 \to A_4/V_4$, $\sigma \mapsto \sigma V_4$ ist ein Hom. $A_4 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gzg. Als Komposition surjektiver Abb. ist dieser surjektiv.

<u>also</u>: 1, 3 sind die einzigen nat. Zahlen $n$, für die ein Hom. $\phi: A_4 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ existiert. $\square$

<u>Übung</u>: Lösen Sie Teil (c) für die Gruppe (i) $S_3$ (ii)$^*$ $S_4$ an Stelle von $A_4$.

<u>H23T2A3</u> Seien $G_1, G_2$ endliche Gruppen, wobei $|G_1|$ <u>teilerfremd</u> zu $G_2$ sei

(a) Sei $H$ eine Untergruppe von $G_1 \times G_2$.
Zeigen Sie, dass es Untergruppen $H_1$ von $G_1$ und
$H_2$ von $G_2$ mit $H = H_1 \times H_2$ gibt.

Sei $\pi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ die Projektion auf die
erste und $\pi_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$ die Proj. auf die
zweite Komponente, d.h. $\pi_1(g_1, g_2) = g_1$ und $\pi(g_1, g_2)$
$= g_2$ $\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Bekanntlich sind $\pi_1, \pi_2$
Gruppenhomomorphismen. Somit ist $H_1 = \pi_1(H)$
eine Untergruppe von $G_1$ und $H_2 = \pi_2(H)$ eine
Untergruppe von $G_2$. <u>Beh</u>.: $H = H_1 \times H_2$

„$\subseteq$" Sei $(g_1, g_2) \in H$, mit $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. $\Rightarrow g_1 = \pi_1(g_1, g_2) \in \pi_1(H) \Rightarrow$
$g_1 \in H_1$ ebenso: $g_2 = \pi_2(g_1, g_2) \in \pi_2(H)$
$\Rightarrow g_2 \in H_2$ also: $(g_1, g_2) \in H_1 \times H_2$.

„$\supseteq$" Sei $(g_1, g_2) \in H_1 \times H_2$, z.zg
$(g_1, g_2) \in H$. $g_1 \in H_1$, $H_1 = \pi_1(H)$
$\Rightarrow \exists\, h \in H$ mit $\pi_1(h) = g_1$
ebenso: $g_2 \in H_2$, $H_2 = \pi_2(H) \Rightarrow$
$\exists\, h' \in H$ mit $\pi_2(h') = g_2$.

a
d
Üb
(i)
HZ
g

Nach Voraussetzung sind $m = |G_1|$ und $n = |G_2|$ sind teilerfremd. Lemma von Bézout $\Rightarrow$

Es gibt Zahlen $k, l$ mit $km + ln = 1$.

$\Rightarrow$ Die Zahl $u = 1 - km$ erfüllt $u \equiv 1 \mod m$ und ist durch $n$ teilbar, da $u = ln$.

Wegen $\pi_1(h) = g_1$ gibt es ein $h_2 \in G_2$ mit $h = (g_1, h_2)$. $|G_1| = m \xRightarrow{g_1 \in G_1} g_1^m = e_{G_1}$

$|G_2| = n \xrightarrow{h_2 \in G_2} g_2^n = e_{G_2}$

$\Rightarrow h^u = (g_1, h_2)^u = (g_1^u, h_2^u) = (g_1^{1-km}, h_2^{ln})$

$= (g_1 \cdot (g_1^m)^{-k}, (g_2^n)^l) = (g_1 \cdot e_{G_1}^{-k}, e_{G_2}^{\,l})$

$= (g_1, e_{G_2})$ außerdem: $h \in H$

$H \leq G_1 \times G_2 \Rightarrow h^u \in H$.

ebenso: Die Zahl $v = 1 - l_n = km$

erfüllt $v \equiv 1 \mod n$, $m \mid u$.

Dieselbe Rechnung mit $h'$ an Stelle

von $h$ liefert $(h')^v = (e_{G_1}, g_2)$

auch hier: $h' \in H \Rightarrow (h')^v \in H$.

Sei nun $\tilde{h} = h^u (h')^v$. Dann

gilt $\tilde{h} = (g_1, e_{G_2}) \cdot (e_{G_1}, g_2) =$

Da

ebe

An

$\Rightarrow$

Ang

$\Rightarrow$

also

$H = Z$

$(g_1 \cdot e_{G_2}, e_{G_2} \cdot g_2) = (g_1, g_2)$

$\Rightarrow (g_1, g_2) \in H$.

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für Gruppen $G_1, G_2$ und eine Untergruppe $H$ von $G_1 \times G_2$ an, so dass $H$ nicht die Form $H_1 \times H_2$ mit Untergr. $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$ hat.

Seien $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $H \leq G_1 \times G_2$ geg. durch $H = \langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle$

$= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$

Ang. $H = H_1 \times H_2$ mit $H_1, H_2 \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Dann ist $H_1 \in \{\{\bar{0}\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$,

ebenso $H_2 \in \{\{\bar{0}\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$

Ang. $H_1 = \{\bar{0}\} \Rightarrow H \subseteq \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\bar{1}, \bar{1}) \notin H$ ↯

Ang. $H_2 = \{\bar{0}\} \Rightarrow H \subseteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{\bar{0}\}$

$\Rightarrow (\bar{1}, \bar{1}) \notin H$

also: $H_1 = H_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ↯