



Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024-25  
10.04.2025

# Staatsexamenskurs Algebra

(Lehramt Gymnasium)

## Nachholklausur

Nachname: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Matrikelnr.: \_\_\_\_\_

Studiengang: Lehramt Gymnasium

|         |   |   |      |   |   |          |
|---------|---|---|------|---|---|----------|
| Aufgabe | 1 | 2 | oder | 3 | 4 | $\Sigma$ |
| Punkte  |   |   |      |   |   |          |

(Diese Prüfungsleistung bleibt unbenotet. Zum Bestehen sind 6 Punkte erforderlich.)

*Lösungen sind nur angedeutet, unvollst.*

### Hinweis:

- (a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf Blätter** (Deckblatt + 4 Aufgaben) erhalten haben.
- (b) Bitte bearbeiten Sie **entweder** die Aufgaben 1 und 2 **oder** die Aufgaben 3 und 4. Bitte streichen Sie Aufgaben durch, die nicht gewertet werden sollen.
- (c) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.
- (d) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- (e) Füllen Sie das Deckblatt bitte in **BLOCKSCHRIFT** aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.
- (f) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden.
- (g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 1.** (Aufgabengruppe 1) (4+4+2 Punkte)

- (a) Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 2023. Zeigen Sie, dass  $G$  einen Normalteiler der Ordnung 289 und einen Normalteiler der Ordnung 7 besitzt. (Es ist  $2023 = 7 \cdot 17^2$ .)
- (b) Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung 2023 bis auf Isomorphie. Sind alle diese Gruppen abelsch bzw. zyklisch? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.
- (c) Weisen Sie nach, dass keine einfache Gruppe der Ordnung 2022 existiert. (Es ist  $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ , und 337 ist eine Primzahl.)

Lösungsskizze:

zu (a) 3. Sylowsatz  $\Rightarrow n_7 = n_{17} = 1$   
2. Sylowsatz  $\Rightarrow$  Normalteiler

zu (b) zeige:  $|G| = 2023 \Rightarrow G$  ist inneres direktes Produkt der 7-Sylowgruppe  $P$  und der  $17^2$ -Sylowgruppe  $Q$   
 $P$  und  $Q$  sind abelsch (Primzahl- bzw. Primzahlquadrat-ordnung)  $\Rightarrow G \cong P \times Q$  ist abelsch

Isomorphietypen:  $\mathbb{Z}/2023\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/119\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$

Die zweite Gruppe ist nicht zyklisch.

zu (c)  $n_{337} = 1$ , 2. Sylowsatz  $\Rightarrow \exists$  nichttriv. Normalteiler

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 2.** (Aufgabengruppe 1) (2+2+2+4 Punkte)

Sei  $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$  und  $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ .

- (a) Geben Sie die Definition des Kompositums  $K_1 K_2$  in  $\mathbb{R}$  an, und weisen Sie nach, dass  $K_1 K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  gilt.
- (b) Weisen Sie nach, dass  $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$  gilt.
- (c) Bestimmen Sie den Erweiterungsgrad  $[K_1 K_2 : \mathbb{Q}]$ .
- (d) Begründen Sie, dass  $K_1 K_2 / \mathbb{Q}$  eine Galois-Erweiterung ist, und zeigen Sie, dass die Galoisgruppe der Erweiterung zu  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  isomorph ist.

*Hinweis:* Aus der Vorlesung ist Folgendes bekannt: Sind  $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$  verschiedene quadratfreie Zahlen, dann gilt  $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ . Dabei wird eine Zahl  $a \in \mathbb{Z}$  als *quadratfrei* bezeichnet, wenn keine Primzahl  $p$  mit  $p^2 \mid a$  existiert.

Lösungsskizze:

zu (a) Def. des Kompositums  $K_1 K_2 = K_1(K_2)$

" $\supseteq$ "  $\sqrt{3} \in K_1$ ,  $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \in K_1(K_2) \Rightarrow \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq K_1(K_2)$

" $\subseteq$ "  $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow K_1 \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow K_2 \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

zu (b) Gradformel, angew. auf den Zwischenkörper  $K_1 \cap K_2$   
von  $K_1 / \mathbb{Q} \Rightarrow [K_1 \cap K_2 : \mathbb{Q}] \in \{1, 2\}$  Ang.  $[K_1 \cap K_2 : \mathbb{Q}]$   
 $= 2 = [K_1 : \mathbb{Q}] \Rightarrow K_1 \cap K_2 = K_1$  ebenso  $K_1 \cap K_2 = K_2$   
 $\Rightarrow K_1 = K_2$  (da 3, 6 verschiedene quadratfreie Zahlen  
in  $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$  sind)

zu (c) Anwendung der Gradformel (Grad 4)

zu (d)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  ist Zerf.-korp. von  $(x^2-2)(x^2-3) \Rightarrow$

$K_1 K_2 / \mathbb{Q}$  normal  $\Rightarrow$  algebraisch  $\Rightarrow$  char  $\mathbb{Q} = 0$  separabel

Teil (b)  $\Rightarrow |Gal(K_1 K_2 / \mathbb{Q})| = 4 \Rightarrow \leq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  oder

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  zwei versch. echte Zw.korp.  $\xrightarrow{\text{Galoisf.}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 3.** (Aufgabengruppe 2) (4+2+4 Punkte)

Sei  $p$  eine ungerade Primzahl.

- (a) Zeigen Sie, dass im Körper  $\mathbb{F}_p$  genau  $\frac{p+1}{2}$  Quadrate existieren.
- (b) Bestimmen Sie die Anzahl der Quadrate im Ring  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ .
- (c) Bestimmen Sie die Anzahl der Quadrate im Ring  $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$ .  
(Es ist  $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ .)

Lösungsskizze:

zu (a) zeige: Menge der Quadrate  $\{0\} \cup \{x^{2k} \mid 0 \leq k < \frac{p-1}{2}\}$   
wobei  $x \in \mathbb{F}_p^*$  mit  $\mathbb{F}_p^* = \langle x \rangle \Rightarrow$  Anzahl  $1 + \frac{p-1}{2} = \frac{p+1}{2}$

zu (b) Quadrate sind  $\bar{0}$  und  $\bar{1} \Rightarrow$  Anzahl 2

zu (c) Chin. Restsatz, Teil (a) und (b)  $\Rightarrow$  Anzahl  
 $2 \cdot 6 \cdot 12 = 144$

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 4.** (Aufgabengruppe 2) (4+3+3 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass das Polynom  $f = x^4 + x + \bar{1}$  im Polynomring  $\mathbb{F}_2[x]$  irreduzibel ist.
- (b) Sei  $\mathbb{F}_2^{\text{alg}}$  ein algebraischer Abschluss von  $\mathbb{F}_2$  und  $\alpha \in \mathbb{F}_2^{\text{alg}}$  eine Nullstelle von  $f$ .  
Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente des Körpers  $\mathbb{F}_2(\alpha)$ .
- (c) Seien  $\beta = \alpha + \bar{1}$  und  $\gamma = \alpha^3 + \bar{1}$ . Bestimmen Sie die Erweiterungsgrade  $[\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2]$  und  $[\mathbb{F}_2(\gamma) : \mathbb{F}_2]$ .

In Teil (b) und (c) begründen Sie bitte jeweils Ihre Ergebnisse.

Lösungsskizze:

zu (a)  $f$  hat keine Nullstellen in  $\mathbb{F}_2 \Rightarrow$  unred. oder  
Produkt zweier irred. Polynome vom Grad 2  
 $x^2 + x + \bar{1}$  ist einziges irred. Pol. vom Grad 2,  $f \neq (x^2 + x + \bar{1})^2$

zu (b)  $[\mathbb{F}_2(\alpha) : \mathbb{F}_2] = \text{grad } f = 4$ , da Min.-pol.  
 $\Rightarrow |\mathbb{F}_2(\alpha)| = 2^4 = 16$

zu (c)  $\mathbb{F}_2(\beta) = \mathbb{F}_2(\alpha) \Rightarrow [\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2] = 4$

$\gamma = \alpha^{-1} \Rightarrow \mathbb{F}_2(\gamma) = \mathbb{F}_2(\alpha) \Rightarrow [\mathbb{F}_2(\gamma) : \mathbb{F}_2] = 4$

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 7.** (4+3+3 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie ein  $r \in \mathbb{N}$  und zyklische Gruppen  $C_1, \dots, C_r$ , so dass die prime Restklassengruppe  $(\mathbb{Z}/500\mathbb{Z})^\times$  isomorph zu  $C_1 \times \dots \times C_r$  ist.
- (b) Geben Sie die Ordnung von  $(\mathbb{Z}/500\mathbb{Z})^\times$  an und begründen Sie, dass die Gruppe nicht zyklisch ist.
- (c) Geben Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in  $(\mathbb{Z}/500\mathbb{Z})^\times$  an.  
Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

$$\neg (P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\neg P$$

$$x^2 + x = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z}_6$$
$$x(x+1) = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z}_6$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 5$$