Staatsexamenskurse Analysis

David T. Heider, WS18/19 & SS 19

1 Zusammenfassung reelle Analysis

1.1 Relle Analysis einer Variablen

Definition Sei $U \subset \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. f heißt *stetig* in $a \in U$ falls für jeden Folge $(x_n)_n$ in U mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ gilt.

Definition Sei $U \subset \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. f heißt *differenzierbar* in $a \in U$ falls der Grenzwert $\lim_{h\to 0}((f(a+h) - f(a))/h)$ existiert. Im Falle der Existenz bezeichnen wir diesen Grenzwert als *Ableitung* $f'(a)$.

Definition Sei $U \subset \mathbb{R}$ und $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{R}$. Man sagt, f_n konvergiert *punktweise* gegen die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ wen es für jedes $x \in U$ und alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ gilt.

Definition Sei $U \subset \mathbb{R}$ und $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{R}$. Man sagt, f_n konvergiert *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ und $x \in U$ die Ungleichung $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ gilt.

Satz Sei $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen $f_n : U \to \mathbb{R}$ und $a, b \in U$ mit der Eigenschaft, dass $a < b$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n)(x)dx \tag{1}$$

Falls zusätzlich f_n stetig für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f \equiv \lim_{n\to\infty} f_n$ ebenfalls stetig.

1.2 Reelle Analysis mehrerer Variablen

Definition Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ferner sei $a \in U, v \in \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Definiere $\phi : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto a + tv$ für ein $I \subset \mathbb{R}$, so dass $\phi(I) \subset U$. Ist $f \circ \phi$ in $t = 0$ differenzierbar, so heißt $\partial_v f(a) = (f \circ \phi)'(a) = \lim_{t\to 0}((f(a+tv) - f(a))/t)$ die *Richtungsableitung* von f in Richtung v.

Definition Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Man nennt f in $a \in U$ *total differenzierbar* wenn eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $q : U_a \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : a + x \in U\} \to \mathbb{R}^n$ existieren, so dass für alle $h \in U_a$ gilt: (1) $f(a+h) = f(a) + L(h) + q(h)$ und (2) $\lim_{h\to 0}(q(h)/\|h\|) = 0$. Die *totale Ableitung* $f'(a)$ von f and der Stelle a ist dann gegeben durch die lineare Abbildung L. Die *Jacobi-Matrix* $(Df)(a)$ ist gegeben durch $((Df)(a))_{ij} = (\partial_j f_i(a))$

für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Für skalarwertige Funktionen ist die Jacobi-Matrix eine einzeilige Matrix und wird mit $(\nabla f)(a)$ bezeichnet und heißt *Gradient.*

Satz (Schwarz) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Existieren alle k-ten partiellen Ableitungen von f und sind diese stetig, so ist f eine k-mal total differenzierbare Funktion. Ferner gilt für eine in $a \in U$ zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion f,dass $(\partial^2_{i,j} f)(a) = (\partial^2_{j,i} f)(a)$.

Definition Ist $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in $a \in U$, so heißt $\mathcal{H}(f)(a) \in \mathcal{M}(n \times n; \mathbb{R})$ definiert durch $[\mathcal{H}(f)(a)]_{ij} = (\partial^2_{i,j} f)(a)_{1 \leq i,j \leq n}$ *Hesse–Matrix* von f in a. Falls die zweiten partiellen Ableitungen stetig in a sind, sit die Hesse–Matrix von f in a symmetrisch.

Rezept Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Gesuht sind Extrema von f. (1) Berechne den Gradienten von f durch Berechnung aller ersten partieller Ableitungen von f. (2) Berechne die *kritischen Punkte* von f, d.h., die Menge aller $a \in U$, so dass $(\nabla f)(a) = 0$. (3) Für jeden kritischen Punkt $a \in U$, berechne die Hesse–Matrix $\mathcal{H}(f)(a)$ und bestimme ihre Definitheit. Falls die Hesse–Matrix negativ definit ist, so ist a ein isoliertes Maximum. Falls sie positiv definit ist, so ist a ein isoliertes Minumum. Falls sie indefinit ist, so ist a Sattelpunkt und insbesondere kein Extremum.

Proposition Sei $A \in \mathcal{M}(n \times n; \mathbb{R})$ symmetrisch. Sind alle Eigenwerte von A positiv, so ist A positiv definit. Sind alle Eigenwerte von A negativ, so ist A negativ definit. Hat A sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, so ist A indefinit.

Definition Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ wird d–dimensionale *Untermannigfaltigkeit* genannt, wenn es für jeden Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U = U(a)$ und $n-d$ stetig differnzierbare Funktionen $\phi_1, ..., \phi_{n-d} : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass (1) $U \cap M = \{x \in U | \phi_i(x) = 0,\, 1 \leq i \leq n-d\}$ und (2) $\dim_{\mathbb{R}} \langle \nabla \phi_1, ... \nabla \phi_{n-d}\} = n - d$ für alle $x \in U \cap M$ (Lineare Unabhängigkeit der Gradienten).

Satz Mit der Notation der vorherigen Definition und einer stetig differenzierbaren $f : U \to \mathbb{R}$ sei $a \in U \cap M$ ein lokales Extremum von f auf der Untermannigfaltigkeit M. Dann existieren $\lambda_1, ..., \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$, genannt *Lagrange-Multiplikatoren*, so dass $(\nabla f)(a) = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i (\nabla \phi_i)(a)$ gilt.

Satz Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge und $\phi : M \to \phi(M)$ ein Diffeomorphismus, d.h., eine bijektive und stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion. Eine Funktion f ist auf $\phi(M)$ genau dann integrierbar wenn $x \mapsto f(\phi(x))|\det \phi'(x)|$ auf M integrierbar ist und es gilt

$$\int_{\phi(M)} f(x)dx = \int_M f(\phi(x))|\det \phi'(x)|dx. \tag{2}$$

Definition Ist χ_M, die charakteristische Funktion von M, integrierbar, so heißt das Integral von χ_M über M *Volumen* von M, bezeichnet mit $\mathrm{vol}(M)$.

1.3 Nützliches aus der Analysis

Satz (Satz von der majorisierten Konvergenz) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die fast überall gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zudem sei $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine integrierbare und nicht-negative Funktion, sodass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ebenfalls integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, d\lambda(x)\right) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x)\, d\lambda(x) \tag{3}$$

Satz (Satz von monotonen Konvergenz) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die fast überall monoton wachsend gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, d\lambda(x)\right) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x)\, d\lambda(x). \tag{4}$$

Satz (Satz von der lokalen Umkehrfunktion) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Wenn $\mathrm{Jac}(f)(x)$ für ein $x \in U$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen $U \supseteq U_x \ni x$ und $\mathbb{R}^n \supseteq V_{f(x)} \ni f(x)$, sodass $f(U_x) = V_x$ und $f|_{U_x} : U_x \to V_{f(x)}$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Satz (Offenheitssatz) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Wenn für alle $x \in U$ $\mathrm{Jac}(f)(x)$ invertierbar ist, dann ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Satz (Hinreichendes Kriterium für Diffeomorphismus) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar und injektiv. Wenn für alle $x \in U$ $\mathrm{Jac}(f)(x)$ invertierbar ist, dann ist $f : U \to f(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus.

Satz (Satz über implizite Funktionen) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $F : U \times V \to \mathbb{R}^p$ eine stetig differenzierbare Funktion, sodass $F(x_0, y_0) = 0$ für ein $(x_0, y_0) \in U \times V$. Falls $\mathrm{Jac}_V(F)(x_0, y_0) := (\partial_{y_j} F_k(x_0, y_0))_{1\leq j,k\leq p}$ invertierbar ist, dann existiert ein $Z \subseteq U \times V$ offen mit $(x_0, y_0) \in Z$ und ein $X \subseteq U$ offen mit $x_0 \in X$ und eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}^p$, sodass $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$ für alle $(x, y) \in Z$ und $\mathrm{Jac}(f)(x) = -\mathrm{Jac}_V(F)(x, y)^{-1}\mathrm{Jac}_U(F)(x, y)$ für alle $(x, y = f(x)) \in Z$.

2 Zusammenfassung Funktionentheorie

Definition (Reelle Differenzierbarkeit) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Wir fassen sie als Abbildung $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \to (\Re[f](x + iy), \Im[f](x + iy))$

auf. f heißt *reell differenzierbar* genau dann wenn $f_{\mathbb{R}}$ total differenzierbar ist. Letzteres ist äquivalent dazu, dass $\Re[f](x+iy), \Im[f](x+iy)$ stetig partiell differenzierbar sind.

2.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition (Komplexe Differenzierbarkeit) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Man nennt f *komplex differenzierbar* bzw. *holomorph* in $z_0 \in U$, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) \equiv \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{5}$$

existiert. $f'(z_0)$ heißt *Ableitung* von f in z_0.

Satz (Notwendiges und hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. $f = \Re[f] + i\Im[f]$ sei die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil. Dann sind äquivalent: (1) f ist in $a \in U$ komplex differenzierbar. (2) f ist in $a \in U$ reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen $\partial_y \Re[f](a) = \partial_x \Im[f](a) \,\&\, \partial_x \Re[f](a) = -\partial_y \Im[f](a)$.

Definition (Harmonische Funktion) Eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto u(x, y)$ heißt *harmonische Funktion*, wenn u zweimal partiell differenzierbar in x bzw. y ist und gilt $\Delta u(x, y) \equiv (\partial_x^2 u)(x, y) + (\partial_y^2 u)(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition (Harmonische & Holomorphe Funktionen) (1) Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so sind $\Re[f], \Im[f]$ harmonische Funktionen. (2) Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, so existiert eine holomorphe Funktion $f : \hat{G} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $\Re[f](x+iy) = u(x, y)$ für alle $(x, y) \in G$. Hierbei ist $\bar{G}$ das Bild von G vermöge des Isomorphismus $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Rezept (Konstruktion holomorpher Funktion zu vorgegebenem Realteil) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir wollen eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konstruieren, sodass $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ für eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Anfangswert $v(x_0, y_0) = v_0$. (1) Überprüfe zuerst, ob u auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^2$ harmonisch ist, und somit überhaupt Realteil einer holomorphen Funktion sein kann. (2) Gemäß den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen gilt nun $\partial_y u = \partial_x v$ und $\partial_x u = -\partial_y v$. Integration liefert nun zunächst

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} (\partial_x u)(x, \tilde{y}) d\tilde{y} + v(x, y_0), \tag{6}$$

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} (\partial_y u)(\tilde{x}, y) d\tilde{x} + v(x_0, y). \tag{7}$$

(3) Werte den zweiten Ausdruck bei (x, y_0) aus und setze ihn in den erstgenannten ein. Alternativ werte den ersten Ausdruck bei (x_0, y) aus und setze ihn in den letztgenannten ein.

2.2 Potenz- und Laurentreihen

Definition (Potenzreihe) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Eine *Potenzreihe* mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n. \tag{8}$$

Definition (Einfache & Absolute Konvergenz) (1) In der Situation der obenstehenden Definition heißt die Potenzreihe *(einfach) konvergent* in $z = z_0$ falls $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(z_0-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert.
(2) In der Situation der obenstehenden Definition heißt die Potenzreihe *absolut konvergent* in $z = z_0$ falls $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k(z_0-a)^k|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Proposition (Konvergenzradius) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ eine Potenzreihe. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $r \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$, sodass die Reihe auf der Kreisscheibe $B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ konvergiert und auf $(\bar{B}_r(a))^{\complement}$ divergiert. Man bezeichnet diese Zahl r als *Konvergenzradius* und $B_r(a)$ als *Konvergenzkreisscheibe.*

Proposition (Wurzel- & Quotientenkrietrium für Potenzreihen) Sei $\sum_{n=0} \infty a_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe und $r \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ ihr Konvergenzradius.
(1) Sei $L \equiv \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt die *Formel von Cauchy-Hadamard*:

$$r = \begin{cases} 0 & : L = +\infty \\ L^{-1} & : L \in \mathbb{R}^+ \\ +\infty & : L = 0 \end{cases}. \tag{9}$$

(2) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$, sodass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, so gilt ebenfalls

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{10}$$

Satz (Holomorphie und komplexe Analytizität) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph auf U, wenn sich f in jedem Punkt von U als Potenzreihe darstellen lässt, die in einer Umgebung dieses Punktes konvergiert. D.h., es gibt für jedes $a \in U$ eine Folge $(c_n = c_n(a))_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathbb{C}$ und ein $r = r(a) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \ \forall z \in B_r(a) \subset U \tag{11}$$

und $r = r(a)$ der Konvergenzradius der Potenzreihe um den Entwicklungspunkt a ist. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lässt sich über eine der folgenden Alternativen bestimmen:
(1) Durch *Taylor-Entwicklung* von f, d.h., es gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{12}$$

(2) Durch die *Cauchy'sche Integralformel*, d.h., es gilt für ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(a) \subset U$, dass

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)dw}{(w-a)^{n+1}} \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{13}$$

Definition (Komplex analytische Funktion) Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit offenem Definitionsbereich, die sich in jedem Punkt $z \in U$ als lokal konvergente Potenzreihe ausdrücken lässt, heißt *komplex analytische Funktion*. Infolge des obenstehenden Satzes haben wir die Äquivalenz der Begriffe der komplexen Analytizität und der Holomorphie etabliert.

Satz (Rechenregeln für Potenzreihen) (1) *Gliedweises Differenzieren:* Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann ist die Funktion $f : B_r(a) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$ holomorph und es gilt $f' : B_r(a) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=1}^\infty na_n(z-a)^n$. Außerdem haben die Potenzreihe und ihre formale Ableitung den gleichen Konvergenzradius und es ergibt sich zusammen mit der Äquivalenz komplex analytischer und holomorpher Funktionen induktiv, dass holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar sind.
(2) *Koeffizientenvergleich:* Wenn die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n \ \& \ \sum_{n=0}^\infty b_n(z-a)^n \tag{14}$$

in einer Umgebung $B_r(a)$ von a konvergieren und dort gilt, dass

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^\infty b_n(z-a)^n \ \forall z \in B_r(a), \tag{15}$$

dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(3) *Produkt von Potenzreihen:* Seien $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n(z-a)^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist

$$\left[\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^\infty b_n(z-a)^n\right] = \sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n, \tag{16}$$

wobei $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ für alle $z \in B_r(a)$ und die rechte Seite konvergiert für diese $z \in B_r(a)$ auch. Man nennt dieses Produkt das *Cauchy-Produkt* von Reihen.

Satz (Majorantenkriterium von Weierstraß) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $D \to \mathbb{C}$. Weiter sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, sodass (1) $|f_n(z)| \leq M_n$ für alle $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt und (2) die Reihe $\sum_{k=0}^\infty M_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^\infty f_k(z)$ absolut und gleichmäßig auf D.

Proposition (Vertauschbarkeit von Summation und Grenzwertbildung) Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, so ist f stetig und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} f_n(a_k) \tag{17}$$

für eine in D konvergente Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Satz (Laurentzerlegung) Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R \leq \infty$. Es bezeichne $K_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$. Sei $f : K_{r,R}(a) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eindeutig festgelegte holomorphe Funktionen $f_h : K_{r,\infty}(a) \to \mathbb{C}$ und $f_n : B_R(a) \to \mathbb{C}$, sodass $f = f_h + f_n$ auf $K_{r,R}(a) = B_R(a) \cap K_{r,\infty}(a)$ gilt und zudem $\lim_{|z|\to\infty} |f_h(z)| = 0$ erfüllt ist. Man nennt f_h den *Hauptteil* und f_n den *Nebenteil* von f.

Proposition (Laurententwicklung) Eine auf $K_{r,R}(a)$ holomorphe Funktion besitzt eine auf dem gesamten Definitionsbereich gültige Reihenentwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k, \tag{18}$$

die als *Laurentreihe* von f bezeichnet wird. Dabei konvergiert die Teilsumme von $k = -\infty$ bis $k = -1$ lokal gleichmäßig absolut gegen den Hauptteil von f. Ebenso konvergiert die Teilsumme von $k = 0$ bis $k = \infty$ lokal gleichmäßig absolut gegen den Nebenteil von f. Für die Koeffizienten gilt für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(\omega) d\omega}{(\omega - a)^{k+1}}, \tag{19}$$

für ein beliebiges aber festes $r < \rho < R$.

Rezept (Bestimmung der Laurentreihe) (1) Als bekannt können die folgenden Reihen vorausgesetzt werden:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \ \forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \tag{20}$$

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{21}$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{22}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{23}$$

(2) Entwickelt man um z_0 und enthält der Funktionsterm bereits den Faktor $(z - z_0)$, so entwickelt man zunächst den anderen Faktor in eine Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k (z-a)^k$ und

kann dann den ersten Linearfaktor einfach mit der Reihe multiplizieren.
(3) Bei einer Funktion der Form $/((z-a_1)(z-a_2))$ kann man durch Partialbruchzerlegung zum Ziel kommen. Anschließend verfährt man über die geometrische Reihe mit dem "störenden" Summanden.
(4) Bei Polen höherer Ordnung hilft gliedweises Differenzieren weiter,

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{z-a} = \frac{(-1)^n n!}{(z-a)^{n+1}}. \tag{24}$$

(5) Für die Entwicklung in Ringgebieten $K_{r,R}(a)$ ist hilfreich, die geometrische Reihe für das Argument $r/(z-a)$ zu verwenden, denn dieses ist auf $K_{r,R}(a)$ mit der Eigenschaft ausgestattet, dass $|r/(z-a)| < 1$.

Definition (Singularität & Isolierte Singularität) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $F : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann werden die Punkte in $\mathbb{C} \setminus U$ als *Singularitäten* von f bezeichnet. Eine Singularität $a \in \mathbb{C} \setminus U$ von f heißt *isolierte Singularität*, falls es eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ gibt, sodass $(C \setminus U) \cap V = \{a\}$ gilt.

Definition (Klassifikation isolierter Singularitäten) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph sowie $a \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität von f. a heißt
(1) *hebbar*, wenn auf $U \cap \{a\}$ eine holomorphe Fortsetzung von f existiert, d.h., eine holomorphe Funktion $\hat{f} : U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}(z) = f(z)$ für alle $z \in U$
(2) *Polstelle der Ordnung* n, falls $\lim_{z\to a}[|(z-a)^k f(z)|] = \infty$ für $0 \leq k \leq n-1$ und $\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]$ existiert in $\mathbb{C}$.
(3) *wesentliche Singularität*, falls sie weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Proposition (Polstellenkriterium) Die Funktion $f/g : D \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)/g(z)$ auf hat genau dann eine Polstelle der Ordnung n in $a \in \mathbb{C} \setminus D$, wenn es eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ gibt, sodass $f, g : V \to \mathbb{C}$ beide holomorph sind, $f(a) \neq 0, g(z) \neq 0$ für $z \in V \setminus \{a\}$ und g eine Nullstelle der Ordnung k in a hat. Letzteres bedeutet gerade, dass $g(z) = (z-a)^k h(z)$ für alle $z \in V$ und $h(a) \neq 0$.

Satz (Riemannscher Hebbarkeitssatz) Eine isolierte Singularität a einer Funktion f ist genau dann hebbar, wenn f in einer ppunktierten Umgebung von a beschränkt ist.

Satz (Klassifikation isolierter Singularitäten anhand Laurentreihen) Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit isolierter Singularität $a \in \mathbb{C} \setminus U$ und auf dem Kreisring $K_{r,R}(a) \setminus U$ gültiger Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k. \tag{25}$$

(1) Die Singularität a ist genau dann hebbar, wenn $a_k = 0$ für alle $k < 0$.
(2) a ist eine Polstelle der Ordnung n genau dann, wenn $a_{-n} \neq 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$

mit $k > n$ gilt $a_{-k} = 0$.
(3) a ist genau dann eine wesentliche Singularität von f, wenn $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k \leq 0$ gilt.

Satz (Casaroti-Weierstraß) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer wesentlichen Singularität bei $a \in \mathbb{C}$. Dann ist das Bild jeder offenen Umgebung von a dicht in $\mathbb{C}$.

Satz (Folgenkriterium zur Klassifikation wesentlicher Singularitäten) Die isolierte Singularität $a \in \mathbb{C}$ einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann wesentlich, wenn es zwei konvergente Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = a = \lim_{n\to\infty} v_n$ gibt und der Eigenschaft, dass die Bilder der Folgenglieder unter f gegen verschiedene Werte konvergieren, d.h., dass gilt $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(v_n)$.

2.3 Identitätssatz

Definition (Gebiet) Eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge U von $\mathbb{C}$ heißt *Gebiet*.

Definition (Häufungspunkt) Ein Punkt $a \in U \subset \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt einer Menge* $N \subset U$, wenn in jeder beliebigen offenen Umgebung von a in U mindestens ein Punkt aus N liegt, der von a verschieden ist.

Satz (Identitätssatz) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(1) Es gilt $f|_N = g|_N$ für eine Menge $N \subseteq G$, die einen Häufungspunkt in G besitzt.
(2) Es gibt einen Punkt $a \in G$, sodass $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(3) $f = g$.

Rezept (Funktionen in Abhängigkeit von z angeben) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet.
(1) Berechne $f(x)$ für ein reelles $x \in \mathbb{R}$ (oder für iy mit $y \in \mathbb{R}$). Definiere den entsprechenden Kandidaten für die holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}$ als $g(z)$, indem x durch z ersetzt wird, bzw., iy durch z. (2) Aufgrund der Konstruktion stimmen f und g auf der Menge $\mathbb{R}$ bzw. $i\mathbb{R}$ überein. Zeige nun bspw. durch Betrachtung geeigneter konvergenter Folgen, dass diese Menge einen Häufungspunkt in G hat.
(3) Anwendung des Identitätssatzes liefert nun, dass $f = g$ auf ganz G, sofern g auf ganz G wohldefiniert ist.

2.4 Wichtige Sätze der Funktionentheorie

Definition (Ganze Funktion) Wir bezeichnen eine auf ganz $\mathbb{C}$ erklärte und holomorphe Funktion als *ganze Funktion*.

Satz (Satz von Liouville) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Ist f beschränkt, d.h., gibt es ein $M \in \mathbb{R}_0^+$, sodass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

Satz (Kleiner Satz von Picard) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganze Funktion. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:
(1) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, oder
(2) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{C}$, oder
(3) $f(\mathbb{C}) = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{C}$, d.h., f ist konstant.

Rezept (Anwendungen des Satzes von Lioville) Um den Satz von Liouville anwenden zu können, haben sich folgende Vorarbeiten als nützlich erwiesen: (1) Sind aus dem Definitionsbereich nur einzelne Punkte ausgenommen, kann man mittels Riemann'schem Hebbarkeitssatz häufig eine beschränkte holomorphe Fortsetzung der Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ verifizieren. Auf diese lässt sich dann der Satz von Liouville anwenden. (2) Abschätzungen für den Real- und Imaginärteil einer ganzen Funktion f lassen sich verwenden, indem man $\exp(f)$ bzw. $\exp(-if)$ betrachtet. Dann gilt nämlich $|\exp(f)| = \exp(\Re[f](z))$ bzw. $|\exp(-if)| = \exp(\Im[f](z))$, sodass die Beschränktheit von $\Re[f]$ bzw. $\Im[f]$ die Beschränktheit der ganzen Funktion $\exp(f)$ bzw. $\exp(-if)$ liefert.

Satz (Satz von der Gebietstreue) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Ist $G \subseteq D$ Gebiet, so ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet.

Satz (Maximums- & Minimumsprinzip für beliebiges Gebiete) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.
(1) Nimmt $|f|$ auf G ein Maximum an, d.h., gibt es ein $a \in G$ mit $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$, dann ist f konstant auf G.
(2) Ist f eine nicht-konstante holomorphe Funktion und besitzt f in $a \in G$ ein Betragsminimum, so ist bereits $f(a) = 0$.

Satz (Maximums- & Minimumsprinzip für beschränkte Gebiete) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $\bar{f} : \bar{G} \to \mathbb{C}$ einen stetige Fortsetzung eines holomorphen $f : G \to \mathbb{C}$. Dann gilt:
(1) $|f|$ nimmt auf dem Rand ∂G ein Maximum an, d.h., es gibt ein $a \in \partial G$, sodass $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in \bar{G}$.
(2) f hat in G eine Nullstelle oder $|f|$ nimmt auf ∂G ein Minimum an.

2.5 Integralrechnung im Komplexen

Definition (Kurve) Eine *Kurve* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \to U$, wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Das *Kurvenintegral* einer Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ entlang der Kurve γ ist definiert als

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)dt. \tag{26}$$

Definition (Windungszahl) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $Z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{im}(\gamma)$. Die *Windungszahl* bzw. *Umlaufzahl* von γ in z_0 ist definiert als

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}. \tag{27}$$

Proposition (Eigenschaften der Windungszahl) (1) Die Windungszahl ist ganzzahlig.
(2) Die Windungszahl ist auf Zusammenhangskomponenten konstant.

Satz (Cauchy'scher Integralsatz) Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede geschlossene in G verlaufende Kurve γ

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{28}$$

Proposition (Notwendige und hinreichende Kriterien für einfach zusammenhängende Gebiete) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:
(1) G ist einfach zusammenhängend.
(2) G ist homotop einfach zusammenhängend, d.h., jede geschlossene Kurve in G is nullhomotop, d.h., lässt sich auf eine Punkt zusammenziehen.
(3) $\mathbb{C} \setminus G$ besitzt keine beschränkten Zusammenhangskomponenten.
(4) Für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und jede geschlossene Kurve γ gilt die Formulierung des Cauchy'schen Integralsatzes wie im vorausgegangenen Satz vorgestellt.
(5) Jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion.

Satz (Cauchy'sche Integralformel) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\bar{B}_r(a) \subseteq U$, so gilt für jeden Punkt $w \in B_r(a)$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\frac{f^{(n)}(w)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)\,dz}{(z - w)^{n+1}}. \tag{29}$$

Satz (Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve in U und $w \in U \setminus \text{im}(\gamma)$ sowie $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\frac{n(\gamma, w)}{n!} f^{(n)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z - w)^{n+1}}. \tag{30}$$

Definition (Residuum) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer isolierten Singulrität in $a \in \mathbb{C} \setminus U$. Das *Residuum* von f an der Stelle a ist definiert als

$$\text{Res}(f; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon(a)} f(z)dz, \tag{31}$$

wobei der Radius $\epsilon > 0$ des Integrationsweges so klein zu wählen ist, dass a die einzige Singularität in der Menge $B_\epsilon(a)$ ist. Nur dann ist das Residuum wohldefiniert.

Rezept (Berechnung von Residuen) Gegeben sei eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$, die in $a \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität hat. Die Berechnung des Residuums $\mathrm{Res}(f;a)$ erfolgt durch einen der folgenden Fälle:
(1) Ist a eine hebbare Singularität, so verschwindet der Hauptteil der Laurent-Reihe von f um den Entwicklungspunkt a und es gilt $\mathrm{Res}(f;a) = a_{-1} = 0$.
(2) Ist a ein einfacher Pol, d.h., gilt $f = g/h$, wobei h in a eine Nullstelle der Ordnung 1 hat, so ist

$$\mathrm{Res}(f;a) = \frac{g(a)}{h'(a)} = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]. \tag{32}$$

(3) Ist a ein Pol der Ordnung n, so gilt

$$\mathrm{Res}(f;a) = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right]\Big|_{z=a}. \tag{33}$$

(4) Ist a eine wesentliche Singularität, so entwickle f in einer Laurentreihe. Es genügt natürlich dabei, nur den Koeffizienten a_{-1} zu bestimmen.

Definition (Nullhomologer Weg) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$. Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *nullhomolog in U* wenn gilt $n(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$, d.h., anschaulich, dass das von γ umschlossene "Gebiet" ganz in U liegt.

Satz (Residuensatz) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $S \subseteq U$ eine Menge, die keinen Häfungspunkt in U besitzt. Die Funktion $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen, in U null-homologen Weg $\gamma : [a,b] \to U \setminus S$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z\in S} n(\gamma, z)\mathrm{Res}(f;z). \tag{34}$$

Proposition (Existenz uneigentlicher Riemannintegrale rationaler Funktionen) Seien p, q Polynome mit $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$. Außerdem sei vorausgesetzt, dass q keine reellen Nullstellen besitzt. Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx. \tag{35}$$

Rezept (Reelle Integrale und Residuensatz – Rationale Funktionen) Gegeben sei ein Integral der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$, wobei p, q Polynome mit $\mathrm{grad}(q) \geq \mathrm{grad}(p) + 2$ sind und q nullstellenfrei über $\mathbb{R}$ ist. Ziel ist die Berechnung des nach der obenstehenden Proposition existierenden Integrals.
(1) Bestimme die komplexen Nullstellen des Nenners und deren Vielfachheit. Gib sodann die komplexe Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ mit zugehörigem Definitionsbereich an.
(2) Definiere für $R > 0$ den Weg $\gamma_1 * \gamma_2$ als Konkatenation der beiden Wege $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$.

(3) Gib die Menge S der Polstellen von f an, die von $\gamma_1 * \gamma_2$ umlaufen werden und berechne das Residuum $\mathrm{Res}(f,z)$ für alle $z \in S$.
(4) Mittels Residuensatz etabliert man nun

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1*\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i\sum_{z\in S} n(\gamma_1 * \gamma_2; z)\mathrm{Res}(f;z), \tag{36}$$

wobei die Summe über die relevanten isolierten Singularitäten gebildet wird.
(5) Zeige, dass $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$, indem die Definition des Kurvenintegrals und Abschätzungen der Form $\left|\int f(z)dz\right| \leq \int |f(z)|\, dz$, die Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x|+|y|$ und die beiden umgekehrten Dreiecksungleichungen $|x-y| \geq ||x|-|y||$ bzw. $|x+y| \geq ||x|-|y||$ hilfreich sein können.
(6) Übrig bleibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i\sum_{z\in S} n(\gamma_1 * \gamma_2; z)\mathrm{Res}(f,z). \tag{37}$$

Rezept (Reelle Integrale und Residuensatz – Trigonometrische Funktionen) Gegeben sei ein Integral, i.d.R. von 0 bis 2π über eine von Sinus und Kosinusfunktionen abhängige gebrochene Funktion, deren Nenner keine reellen Nullstellen besitzt.
(1) Ersetze den Sinus bzw. Kosinus durch $\sin(t) = (\exp(it) - \exp(-it))/(2i)$ bzw. $\cos(t) = (\exp(it) + \exp(-it))/2$.
(2) Ergänze im Integral den Faktor $\gamma'(t)/(i\gamma(t)) = ie^{it}/(ie^{it}) = 1$, wobei γ der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$.
(3) Laut der Definition lässt sich das Integral nun in ein Kurvenintegral über den Rand des Einheitskreises umschreiben. Bestimme die zugehörige Funktion im Integranden.
(4) Bestimme den Wert des entsprechenden Wegintegrals nun mittels Residuensatz.

Rezept (Reelle Integrale und Residuensatz – Rationale & Trigonometrische Funktionen) Seien p, q Polynome vom Grad $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$ und $q(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Berechnet werden soll ein Integral der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\frac{p(x)}{q(x)}dx \,\text{oder}\, \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\frac{p(x)}{q(x)}dx. \tag{38}$$

(1) Bei dem Integral handelt es sich um Real- bzw. Imaginärteil des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix)\frac{p(x)}{q(x)}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \exp(iz)\frac{p(z)}{q(z)}dz \tag{39}$$

für den Weg $\gamma_R : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$.
(2) Gib einen Weg δ_R an, sodass $\gamma_R * \delta_R$ ein geschlossener Weg ist. Für den Fall, dass sogar $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$, so tut es bereits der bekannte Halbkreisbogen. Ansonsten

liefert ein Rechtecksweg bessere Abschätzungen.
(3) Berechne das Integral

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R*\delta_R}\exp(iz)\frac{p(z)}{q(z)}dz \tag{40}$$

mit dem Residuensatz.
(4) Zeige, dass der Integralwert des Weges δ_R für $R\to\infty$ gegen 0 konvergiert. Der Wert des gesuchten Integrals stimmt somit mit dem Real- bzw. Imaginärteil des Ergebnisses überein.

Rezept (Berechnung von reellen Integralen durch Pizzakontur) Zu berechnen ist ein Integral der Form

$$I=\int_0^\infty f(x)dx. \tag{41}$$

Anstatt eines Halbkreises lässt sich hier ein Kreissektor als Weg wählen.
(1) Bestimme die Singularitäten der Funktion in Polarkoordinaten. Bezeichne mit $z_0=r_0\exp(i\theta)$ die Singularität mit dem kleinsten Winkel θ.
(2) Definiere den Weg $\Gamma_R=\gamma_q*\gamma_2*\gamma_3$ durch $\gamma_1:[0,R]\to\mathbb{C},t\mapsto t$, $\gamma_2:[0,2\theta]\to\mathbb{C},t\mapsto R\exp(it)$ und $\gamma_3:[0,R]\to\mathbb{C},t\mapsto(R-t)\exp(2i\theta)$.
(3) Das Integral über γ_3 lässt sich durch die Substitution $t\mapsto R-t$ in ein Vielfaches des Integrals über γ_1 überführen. Das Integral über γ_2 geht für $R\to\infty$ gegen 0. Es gilt somit für ein $c\in\mathbb{C}$

$$\int_{\Gamma_R}f(z)dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}f(z)dz+\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3}f(z)dz=(1+c)I. \tag{42}$$

(4) Bestimme das Residuum $\operatorname{Res}(f,z_0)$ und mit dem Residuensatz das Integral über Γ_R.
(5) Löse die so entstandene Gleichung nach I auf. Dabei ist es oft sinnvoll, die Darstellungen des Sinus- und Kosinusfunktion über die komplexe Exponentialfunktion zu bemühen.

2.6 Satz von Rouché

Satz (Satz von Rouché) Sei $U\subseteq\mathbb{C}$ eine nicht-leere offene Teilmenge, $f,g:U\to\mathbb{C}$ seien holomorphe Funktionen. Weiter sei $\gamma:[a,b]\to U$ eine in U nullhomologe geschlossene Kurve, die jeden Punkt in ihrem Inneren genau einmal umläuft, und es gelte $|g(z)|<|f(z)|$. Dann gilt für sowohl f als auch $f+g$
(1) Auf $\operatorname{Spur}(\gamma)$ keine Nullstelle,
(2) Im Inneren der Kurve γ gleich viele Nullstellen (Mit Vielfachheiten gezählt).

Rezept (Zählen von Nullstellen in Kreis- und Ringgebieten) Für reelle Zahlen $r,R>0$ und $a\in\mathbb{C}$ definieren wir $B_r(a)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<r\}$ und $K_{r,R}(a)=\{z\in\mathbb{C}:r<|z-a|<R\}$. Gegebene sei eine holomorphe Funktion $p:B_r(a)\to\mathbb{C}$.

(1) Finde eine Zerlegung $p = f + g$ mit holomorphen Funktionen $f, g : B_r(a) \to \mathbb{C}$, sodass $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \partial B_r(a)$. Diese Zerlegung sollte so gewählt werden, dass sich die Nullstellen von f leicht bestimmen lassen.

- Dabei wählt man f meist so, dass sich $|f(z)|$ für $z \in \partial B_r(a)$ direkt angeben lässt, z.B., ein Monom $c_n z^n$ im Falle $a = 0$ für ein Polynom. Andernfalls kann man versuchen, mithilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung eine untere Schranke für $|f(z)|$ anzugeben.

- Anschließend kann man $|g(z)|$ mithilfe der Dreiecksungleichung nach oben abschätzen. Mit etwas Glück ist diese kleiner als die untere Schranke für $|f(z)|$, d.h., $|g(z)| < |f(z)|$.

(2) Parametrisiere $\partial B_r(a)$ durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto a + r\exp(it)$ und zeige, dass das so erhaltene γ den Voraussetzungen des Satzes von Rouché genügt.
(3) Nach dem Satz von Rouché hat p auf $B_r(a)$ genauso viele Nullstellen wie f.
(4) Ist nach der Anzahl der Nullstellen in einem Ringgebiet $K_{r,R}(a)$ gefragt, bestimme die Anzahl der Nullstellen in $B_r(a)$ und $B_R(a)$ wie oben aufgezeigt. Da nach dem ersten Teil des Satzes von Rouché p auf $\partial B_r(a)$ keine Nullstellen hat ist die Anzahl der Nullstellen in $K_{r,R}(a) = B_R(a) \setminus \bar{B}_r(a)$ gleich der Differenz der zuvor bestimmten Anzahlen.
(5) Bei Polynomen ist insbesondere der Fundamentalsatz der Algebra im Hinterkopf zu behalten: Die mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen eines Polynoms in $\mathbb{C}$ sind anzahlsgleich mit dem Grad des Polynoms. Hat man also alle Nullstellen bereits in $B_r(a)$ lokalisiert, kann außerhalb keine mehr sein.

Rezept (Imaginärteil von Nullstellen) Manchmal ist nicht nur die Anzahl der Nullstellen einer holomorphen Funktion, sondern auch, wie viele davon reell sind bzw. eine positiven (o. negativen) Imaginärteil haben.
(1) Die Existenz einer reellen Nullstelle kann man häufig über den Zwischenwertsatz erhalten, indem man diesen auf die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}}$ anwendet. Auch weitere Hilfsmittel der Analysis, wie der Satz von Rolle oder die Betrachtung von Ableitungen können hilfreich sein.
(2) Echt komplexe Nullstellen treten bei Polynomen aus $\mathbb{R}[z]$ immer in komplex konjugierten Paaren auf. D.h., die Anzahl der Nullstellen mit positivem und mit negativem Imaginärteil ist in diesem Falle gleich.

Satz (Satz von Rolle) Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodass $f'(\xi) = 0$.

Satz (Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in \mathbb{R} : a < b$. Dann gilt $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] \subseteq f([a, b])$.

2.7 Biholomorphe Abbildungen

Definition (Biholomorphe Abbildung) Eine holomorphe Abbildung, die eine holomorphe Umkehrfunktion hat, heißt *biholomorphe Abbildung* bzw. *konforme*

Abbildung.

Proposition (Holomorphie der Umkehrfunktion) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \to V$ eine Abbildung. Ist f bijektiv und holomorph, so ist bereits die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ eine holomorphe Funktion.

Satz (Riemann'scher Abbildungssatz) Sei $G \subset\neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung $G \to \mathbb{E} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Definition (Riemann'sche Zahlenkugel) Durch stereographische Projektion erhält man eine Abbildung $S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$. Durch Hinzufügen des Punktes ∞ zu $\mathbb{C}$ und Zuweisung $N \mapsto \infty$, erhält man eine Fortsetzung $S^2 \to \hat{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei $\hat{\mathbb{C}}$ als Riemann'sche zahlenkugel bezeichnet wird.

Definition (Möbius-Transformation) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, so definieren wir für $c \neq 0$ die Abbildung

$$\varphi_{a,b,c,d} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \in \mathbb{C} \setminus \{-dc^{-1}\} \\ \infty & z = -dc^{-1} \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases}, \tag{43}$$

und für $c = 0$ setzen wir

$$\varphi_{a,b,0,d} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{d} & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty \end{cases}. \tag{44}$$

Proposition (Matrizen und Möbiustransformationen) Die Abbildung $\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \{\varphi_{a,b,c,d} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} | a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\}$ definiert durch

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varphi_{a,b,c,d} \tag{45}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus von Gruppen. Zwei Matrizen aus der Definitionsmenge definieren ferner genau dann die gleiche Möbiustransformation, wenn sie skalare Vielfache voneinander sind für eine von Null verschiedene komplexe Zahl.

Proposition (Klassifikation biholomorpher Abbildungen der Riemann'schen Zahlenkugel) Die Möbius-Transformationen sind genau die bi-holomorphen Abbildungen $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Definition (Verallgemeinerte Kreislinie) Eine *verallgemeinerte Kreislinie* bezeichnet eine Kreislinie in $\mathbb{C}$ oder eine Gerade in $\mathbb{C}$, wobei letztere mit dem Punkt ∞ zu vereinigen ist.

Proposition (Kreistreue) Seien $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation, $L \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ eine verallgemeinerte Kreislinie sowie K_1, K_2 die beiden Zusammenhangskomponenten von $\hat{\mathbb{C}} \setminus L$. Wir bezeichnen die beiden Zusammenhangskomponenten von $\hat{\mathbb{C}} \setminus \varphi(L)$ mit M_1 und M_2 und die Indizes so gewählt sind, dass $\phi(a) \in M_1$ für ein $a \in K_1$. Dann gilt bereits $\varphi(K_1) = M_1$ und $\varphi(K_2) = M_2$.

Rezept (Bestimmung einer Möbiustransformation) Seien für $j \in \{1, 2, 3\}$ Werte $z_j, w_j \in \hat{\mathbb{C}}$ gegeben. Gesucht ist eine Möbius-Transformation $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dergestalt, dass $f(z_j) = w_j$.
(1) Löse die Doppelverhältnisgleichung

$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \equiv \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \mathrm{DV}(w, w1, w_2, w_3) \qquad (46)$$

nach w auf.
(2) Setze $f(z) = w$. Definiere das Bild der Nennernullstelle und für $z = \infty$ gemäß der Definition der Möbiustransformation.

Rezept (Konstruktion von Möbiustransformationen zwischen zwei Gebieten) Gegeben seien zwei Gebiete, die biholomorph aufeinander abgebildet werden sollen. Wir gehen davon aus, dass die Ränder von G_1 und G_2 verallgemeinerte Kreislinien sind.
(1) Wähle drei Punkte auf dem rand von G_1 und drei Punkte auf dem Rand von G_2. Man spart sich viel Rechenarbeit, wenn man, falls möglich den Punkt ∞ dort, wo möglich, verwendet.
(2) Bestimme nun diejenige Möbiustransformation, die die Punkte von oben nach geeigneter Indizierung (frei wählbar) aufeinander abbildet.
(3) Überprüfe für einen Punkt aus G_1, ob dieser durch das Ergebnis aus dem vorherigen Schritt nach G_2 abgebildet wird oder nach $\hat{\mathbb{C}} \backslash G_2$. Ist ersteres der Fall, so ist die entsprechende Einschränkung der Möbiustransformation auf G_1 eine biholomorphe Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft. Im zweiten Fall vertausche man in der Konstruktion aus Schritt (1) zwei Bildpunkte miteinander. Die dann entstehende Abbildung hat die gewünschte Eigenschaft.

Satz (Wichtige biholomorphe Abbildungen) Je nach Form der gegebenen Mengen, die biholomorph aufeinander abgebildet werden sollen, bieten sich verschiedene Abbildungen an:
(1) Kreise und Halbebenen, berandet durch verallgemeinerte Kreislinien, lassen sich mittels Möbiustranstranformation aufeinander abbilden.
(2) Die Exponentialfunktion kann dazu genutzt werden, Streifen der Form $\{z \in \mathbb{C} | a < \Im[z] < b\}$ auf die Mengen $\{r \exp(i\theta) | r \in \mathbb{R}^+, a < \theta < b\}$ abzubilden.
(3) Mithilfe der Abbildung $z \mapsto z^2$ kann ein Quadrant auf eine Halbebene oder eine Halbebene auf eine geschlitzte Ebene abgebildet werden. Allgemein gilt: Abbildung der Form $z \mapsto z^n$ "ver-n-fachen den Öffnungswinkel".
(4) Drehungen um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn lassen sich durch Multiplikation mit der Konstanten $\exp(2\pi i\theta)$ erreichen.
(5) Manchmal ist es nötig, die Einheitskreisscheibe auf sich selbst abzubilden, um eine bestimmte Anfangsbedingung zu erfüllen. Die bi-holomorphen Abbildungen $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit $\varphi(a) = 0$ für ein $a \in \mathbb{E}$ sind genau die Abbildungen

$$\varphi(z) = \zeta \frac{z - a}{a\bar{z} - 1}, \qquad (47)$$

wobei $a \in \mathbb{E}, \zeta \in \partial\mathbb{E}$. Im Falle $\varphi(0) = 0$ vereinfachen sich diese Abbildungen zu $z \mapsto \zeta z$.

2.8 Weitere nützliche Sätze

Satz (Satz von Casaroti-Weierstraß) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $a \in U$ $f : U \setminus \{a\}$ eine holomorphe Funktion, die bei $z = a$ eine wesentliche Singularität besitzt. Dann gilt für alle Umgebungen $V \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(a)$ von a in $\mathbb{C}$, dass $\overline{f(U \setminus \{a\} \cap V)} = \mathbb{C}$. Ebenso gilt die Umkehrung. Mit anderen Worten ist $a \in U$ genau dann eine wesentliche Singularität, wenn das Bild jeder noch so kleinen punktierten Umgebung von a unter f dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

Satz (Satz von Hurwitz) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nullstellenfreier holomorpher Funktionen $G \to \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen die (holomorphe) Grenzfunktion f konvergieren. Dann gilt $f \equiv 0$ oder f ist nullstellenfrei auf G.

Satz (Satz von Montel) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Falls $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig beschränkt ist, dann hat $(f_n)_n$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Satz (Satz von Vitali) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$. Besitzt die Menge $A := \{z_0 \in G | (f_n(z_0))_n \text{ konvergiert}\}$ einen Häufungspunkt in G, so konvergiert $(f_n)_n$ bereits lokal gleichmäßig auf G.

Satz (Konvergenzsatz von Weierstraß) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf einer offenen Menge G, die lokal gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph und es gilt $(\lim_{n\to\infty} f_n(z))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$.

Satz (Satz von Mittag-Leffler/Mittag-Leffler-Reihe) Sei $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, die keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ hat. Zu jedem z_m sei ein Polynom P_m mit $P_m(0) = 0$ vorgeschrieben. Dann gibt es eine meromorphe Funkition f, die Polstellen genau in z_m hat, und deren Laurentreihe in einer punktierten Kreisschreibe um den Entwicklungspunkt z_m gerade den Hauptteil $P_m((z - z_m)^{-1})$ hat.

Proposition (Elementarfunktion) Die Funktion $E_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) \tag{48}$$

ist eine ganze Funktion, die sogenannte *Elementarfunktion*, für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und hat bei $z = 1$ eine einfache Nullstelle.

Satz (Konvergenz unendlicher Produkte) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, sodass $|u_n| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(i) Es konvergiert $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + u_k)$ konvergiert.
(ii) Es konvergiert $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ genau dann absolut, wenn $\sum_{k=1}^{n} u_k$ absolut konvergiert.

Satz (Produktsatz von Weierstraß) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit paarweise verschiedenen Folgengliedern in $\mathbb{C}$ mit $a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ für $n > 0$ und ohne Häufungspunkt. Sei ferner $(k_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{N}_0$, sodass sogar $k_n \in \mathbb{N}$ für alle $n > 0$ gilt.
(i) Zu einer vorgegebenen ganzen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt es eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}_0$, sodass

$$f(z) = \exp(g(z))z^{k_0} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}. \tag{49}$$

(ii) Umgekehrt wird durch die obige Formel mit ganzem $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stets eine ganze Funktion erklärt.
Insbesondere hat die so definierte Funktion Nullstellen bei a_n für $n \geq 0$, die jeweils Nullstellenordnung k_n für $n \geq 0$ besitzen.

Satz (Zusatz zum Riemann'schen Abbildungssatz) In der Situation des Riemann'schen Abbildungssatzes ist die biholomorphe Abbildung eindeutig, wenn $f : G \to \mathbb{E}, z \mapsto f(z)$ so gewählt wird, dass $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \in \mathbb{R}^+$.

Satz (Lemma von Schwarz) (i) Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$.
(ii) Gilt zudem in einem $z_0 \in \mathbb{E}\backslash\{0\}$ die Gleichheit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $f(z) = \exp(i\lambda)z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

3 Zusammenfassung gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition Seien $m.n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\cdot m}$ Menge und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Eine Gleichung der Form $x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)})$ heißt *m–dimensionale, explizite gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n*. Eine *Lösung* dieser Gleichung ist eine n–mal differenzierbare Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}^m$ mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass (1) $(t, \lambda(t), ..., \lambda^{(n-1)}(t)) \in D$ für alle $t \in I$ und (2) $\lambda^{(n)}(t) = f(t, \lambda(t), ..., \lambda^{(n-1)}(t))$ für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Definition Wird in der vorherigen Definition zusätzlich noch gefordert, dass $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, ..., x^{(n-1)} = x_{n-1}$ für $(t_0, x_1, ..., x_{n-1}) \in D$, so spricht man von einem *Anfangswertproblem.* Eine Lösung des Anfangswertproblems $\lambda : I \to \mathbb{R}^m$ erfüllt dann zusätzlich zu den Bedingungen (1) und (2) der vorherigen Definition noch (3) $\lambda^{(k)}(t_0) = x_k$ für $0 \leq k \leq n - 1$.

Definition Ist die Funktion f der am Anfang formulierten Definition unbahängig von t, also $f = f(x, x', ..., x^{(n-1)})$, so nennt man die Differentialgleichung $x^{(n)} = f(x, ..., x^{(n-1)})$ *autonom.*

3.1 Elementare Lösungsmethode skalarer gewöhnlicher Differentialgleichungen

Satz (Trennung der Variablen) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $t_0 \in I$, $x_0 \in J$ und $g : I \to \mathbb{R}$ sowie $h : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann hat das Anfangswertproblem $x' = g(t)h(x)$ mit $x(t_0) = x_0$: (1) Im Falle $h(x_0)$ zumindest die konstante Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x_0$ und (2) im Falle $h(x_0) \neq 0$ eine lokal eindeutige Lösung, d.h., es gibt ein Intervall $I' \subset I$ mit $t_0 \in I'$ so dass es auf I' eine eindeutige Lösung λ gibt. Diese lässt sich durch Auflösen von

$$\int_{x_0}^{\lambda(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau \tag{50}$$

nach λ bestimmen.

Definition Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung $f(t, x) + g(t, x)x' = 0$ heißt *exakt* falls eine stetig differenzierbare Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\partial_t F(t, x) = f(t, x)$ und $\partial_x F(t, x) = g(t, x)$ für alle $(t, x) \in G$ gilt. Die Funktion F wird *Stammfunktion* der Difefrentialgleichung genannt.

Satz (Integrabilitätskriterium) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet und seien $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Differentialgleichung $f(t, x) + g(t, x)x' = 0$ ist genau dann exakt auf G wenn die *Integrabilitätsbedingung* $\partial_x f(t, x) = \partial_t g(t, x)$ für alle $(t, x) \in G$ gilt.

Satz (Lösungen exakter Differentialgleichungen) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, $\mathbb{R} \supset I \neq \emptyset$ offenes Intervall und $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetig. Für eine exakte Differentialgleichung $f(t, x) + g(t, x)x' = 0$ mit Stammfunktion F gilt die Äquivalenz: $\lambda : I \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung genau dann wenn $\lambda : I \to \mathbb{R}$ ist (1) eine stetig differenzierbare Funktion mit (2) $(t, \lambda(t)) \in G$ für alle $t \in I$ und (3) $F(t, \lambda(t))$ ist konstant für alle $t \in I$.

Rezept für exakte Differentialgleichungen Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $(\tau, \xi) \in G$. Ziel ist die Lösung des Anfangswertproblems $f(t, x) + g(t, x)x' = 0$ mit $x(\tau) = \xi$. (1) Prüfe mittels Integrabilitätskriterium die Exaktheit der Differentialgleichung. (2) Bestimme eine Stammfunktion. (a) Für $(x_0, t_0) \in G$ berechne

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau = F(t, x) - F(t_0, x) \,\&\, \int_{x_0}^{x} g(\omega) d\omega = F(t, x) - F(t, x_0). \tag{51}$$

(b) Werte die erste Gleichung bei x_0 aus und setze in die zweite ein oder werte diezweite Gleichung bei t_0 aus und setze in die erste ein. (c) Die verbleibende Konstante $F(t_0, x_0)$ kann frei gewählt werden. (3) Löse die Gleichung $F(t, \lambda(t)) = F(\tau, \xi)$ nach $\lambda(t)$ auf und bestimme den Definitionsbereich der dadurch definierten Funktion. Nach der Charakterisierung von Lösungen exakter Differenialgleichungen ist das so gefundene λ eine Lösung des Anfangswertproblems.

Definition Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet und seien $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen. Gibt es für die Differentialgleichung $f(t,x) + g(t,x)x' = 0$ eine stetig differenzierbare Funktion $m : G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass die Differentialgleichung $m(t,x)f(t,x)+m(t,x)g(t,x)x' = 0$ exakt ist, so heißt m *integrierender Faktor* dieser Differentialgleichung.

Rezept Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen. Ziel ist die Bestimmung eines integrierenden Faktors für $f(t,x)+g(t,x)x' = 0$. (1) Wähle eine Funktion $u = u(t,x)$ und berechne

$$H(t,x) = \frac{\partial_x f(t,x) - \partial_t g(t,x)}{g(t,x)\partial_t u(t,x) - f(t,x)\partial_x u(t,x)}. \tag{52}$$

Gängige Ansätze sind $u(t,x) = t$, $u(t,x) = x$, $u(t,x) = t \pm x$ und $u(t,x) = tx$. (2) Falls $H(t,x)$ für einen der Ansätze nur eine Funktion von u ist, berechne $M = \exp\left(\int H(u)du\right)$. Durch $m(t,x) = (M \circ u)(t,x)$ ist dann ein integrierender Faktor der zu untersuchenden Differentialgleichung gegeben.

Rezept Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $\tau \in I, \xi \in \mathbb{R}$. Ferner sei $a : I \to \mathbb{R}$ stetig. Das Anfangswertproblem $x' = a(t)x$ mit $x(\tau) = \xi$ besitzt die auf ganz I definierte Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $\lambda(t) = \xi \exp(\int_\tau^t a(s)ds)$.

Rezept (Variation der Konstanten) Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $\tau \in I, \xi \in \mathbb{R}$. Ferner seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Das Anfangswertproblem $x' = a(t)x + b(t)$ mit $x(\tau) = \xi$ besitzt die auf ganz I definierte Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\lambda(t) = \xi \exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right) + \int_\tau^t \exp\left(\int_s^t a(r)dr\right) b(s)ds. \tag{53}$$

Rezept (Variablentransformation) Gegeben sei ein Anfangswertproblem der Form $x' = f(t,x)$ mit $x(t_0) = x_0$. (1) Führe eine neue Funktion $u(t) = u(t, x(t))$ ein, so dass $x(t) = x(t, u(t))$ lokal aufgelöst werden kann. Bestimme ihre Ableitung $u'(t)$. Setze darin $x'(t) = f(t, x(t, u(t)))$ ein. Bestimme den neuen Anfangswert $u(t_0) = u(t_0, x_0)$. (2) Bestimme eine Lösung μ des so erhaltenen Anfangswertproblems. (3) Bestimme eine Lösung λ der ursprünglichen Differentialgleichung durch Auflösen der Gleichung für $u(t) = \mu(t)$ nach $x(t) = \lambda(t)$. (4) Überprüfe, dass λ Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ ist und bestimme das Existenzintervall.

Proposition Gilt für die Differentialgleichung $x' = f(t,x)$, dass $f(\sigma t, \sigma x) = f(t,x)$ für $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ergibt die Substitution $y = x/t$ die Differentialgleichung $y' = (f(1,y) - y)/t$, die mittels Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Proposition Eine Differentialgleichung der Form $x' = g(\alpha t + \beta x + \gamma)$ mit reellen α, β, γ lässt sich mittels Substitution $y = \alpha t + \beta x + \gamma$ in $y' = \alpha + \beta g(y)$ führen, die sich mittels Trennung der Variablen lösen lässt.

3.2 Existenz– und Eindeutigkeitssätze

Satz (Peano) Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann besitzt jedes Anfangswertproblem der Form $x' = f(t,x)$ mit $x(\tau) = \xi$ für $(\tau, \xi) \in D$ eine *lokale Lösung*, d.h., es gibt $\epsilon > 0$ so dass das Anfangswertproblem zumindest auf $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ (abeschlossen!) eine Lösung besitzt.

Definition Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$ eine Funktion. (1) Gibt es ein $L > 0$ mit $\|f(t,x) - f(t,y)\| < L\|x - y\|$ für alle $(t,x),(t,y) \in D$ so heißt f *global Lipschitz–stetig bzgl. des zweiten Arguments* auf D. (2) Gibt es für alle $(t,x) \in D$ jeweils eine Umgebung $U = U((t,x)) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, so dass $f|_{U \cap D}$ global Lipschitz stetig bzgl. des zweiten Arguments auf $U \cap D$ ist, so heißt f *lokal Lipschitz–stetig bzgl. des zweiten Arguments* auf $U \cap D$.

Proposition Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}^n$,$(t,x) \mapsto f(t,x)$ stetig partiell differenzierbar in x. Dann ist f lokal Lipschitz–stetig bzgl. x auf D.

Satz (qualitativer Picard–Lindelöff) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$ stetig und lokal Lipschitz–stetig bzgl. x. Für beliebiges $(\tau, \xi) \in D$ besitzt das Anfansgwertproblem $x' = f(t,x)$ mit $x'(\tau) = \xi$ dann eine eindeutige lokale Lösung, d.h., es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem auf dem Intervall $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ genau eine Lösung besitzt.

Rezept (Picard–Iteration) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige und global Lipschitz–stetige Funktion. Wir betrachten das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(\tau) = \xi$ mit $(\tau, \xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$. (1) Definiere den Integraloperator $T : \mathcal{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ durch

$$T[g](t) \equiv \xi + \int_\tau^t f(s, g(s))ds. \tag{54}$$

(2) T definiert eine Kontraktion auf dem Banachraum $(\mathcal{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n), \|.\|_{\infty,n})$ so dass der Banachsche Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt $\lambda_\infty \in \mathcal{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ liefert, der sogar einmal stetig differenzierbar ist (folgt aus der Definition von T). Dieser Fixpunkt ist die Lösung des eingangs definierten Anfangswertproblems. (3) Induktiv definiert man die Funktionenfolge $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ durch $\lambda_0 \equiv \xi$ und $\lambda_{k+1} = T[\lambda_k]$. (2) liefert die Konvergenz der Folge gegen den Fixpunkt λ_∞.

Satz (Globaler Existenz– und Eindeutigkeitssatz) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$ stetig und lokal Lipschitz–stetig bzgl. x. Dann gibt es für jedes $(\tau, \xi) \in D$ ein eindeutiges Interval $I =]a,b[$ (offen!) mit $\tau \in I$ so dass (1) das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(\tau) = \xi$ auf I genau eine Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ besitzt und (2) jede weitere Lösung $\mu : J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems eine Einschränkung des Anfangswertproblems aus (1) ist und $J \subset I$ gilt. Die Lösungsfunktion aus (1) heißt *maximale Lösung* des Anfangswertproblems und wird mit $\lambda_{(\tau,\xi)}$ bezeichnet.

Proposition (Gleichheit bzw. Disjunktheit von Lösungskurven) Für zwei maximale Lösungen $\lambda_{(\tau,\xi)}$ und $\lambda_{(\tau',\xi')}$ einer Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ mit Anfangswerten im obigen Sinne gilt $\lambda_{(\tau,\xi)} = \lambda_{(\tau',\xi')}$ genau dann wenn $(\tau,\xi) \in \operatorname{graph}(\lambda_{(\tau',\xi')})$. Ist $(\tau,\xi) \notin \operatorname{graph}(\lambda_{(\tau',\xi')})$, so gilt $\lambda_{(\tau,\xi)}(t) = \lambda_{(\tau',\xi')}(t')$ für alle $t \in I_{(\tau,\xi)}$ und $t' \in I_{(\tau',\xi')}$.

Satz (Randverhalten maximaler Lösungen) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$ stetig und lokal Lipschitz–stetig bzgl. x. Zu $(\tau,\xi) \in D$ sei $\lambda :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$, $x(\tau) = \xi$. λ ist genau dann die maximale Lösung des Anfangswertproblems wenn jeweils eine der Bedingungen aus (I) und (II) erfüllt ist: (I): (i) $a = -\infty$, (ii) $a > -\infty$ und $\limsup_{t\to a^+} \|\lambda(t)\| = \infty$ oder (iii) $a > -\infty$, $\partial D \neq \emptyset$ und $\lim_{t\to a^+} \operatorname{dist}(\partial D, (t,\lambda(t))) = 0$. (II) (i) $b = \infty$, (ii) $b < \infty$ und $\limsup_{t\to b^-} \|\lambda(t)\| = \infty$ oder (iii) $b < \infty$, $\partial D \neq \emptyset$ und $\lim_{t\to b^-} \operatorname{dist}(\partial D, (t,\lambda(t))) = 0$.

Rezept (Anschätzung maximaler Lösungen) Gegeben sei eine Differentialgleichung $x' = f(t,x)$, die die Voraussetzungen des globalen Existenz– und Eindeutigkeitssatzes erfüllt (mit $n = 1$). Gesucht sind obere bzw. untere Schranke für eine maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ zum Anfangswert $\lambda(\tau) = \xi$. (1) Bestimme stationäre Lösungen der Differentialgleichung, d.h., diejenigen $x_0 \in \mathbb{R}$, die $f(t,x_0) = 0$ für alle t erfüllen. Dies liefert eine konstante Lösung $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x_0$, die die eindeutige Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$ ist und ferner auch maximale Lösung ist, da auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. (2) Falls $\lambda(\tau) < x_0$, so folgt über den Zwischenwertsatz $\lambda(t) < x_0$ für alle t im Existenzintervall von λ. Analog folgt $x_0 < \lambda(t)$ im Existenzintervall der Lösung falls $x_0 < \lambda(\tau)$. (3) Ferner liefert die Abschätzung von $f(t,\lambda(t))$ mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung für endliches t eine Abschätzung der Form $m(t-\tau) \leq \lambda(t) - \lambda(\tau) \leq M(t-\tau)$, wobei die Konstanten m, M aus dem Maximumsprinzip für stetige Funktionen auf $[\tau, t]$ folgen.

Satz (Existenz– und Eindeutigkeit bei linear beschränkter rechter Seite) Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$ und $f :]a,b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$ eine stetige und bzgl. des zweiten Arguments lokal Lipschitz–stetige Funktion, die *linear beschränkt ist*: Das heißt, es gibt stetige $\rho, \sigma :]a,b[\to [0,\infty[$, so dass $\|f(t,x)\| \leq \rho(t)\|x\| + \sigma(t)$. Dann existiert für alle $(\tau,\xi) \in D$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)}$ für das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(\tau) = \xi$, die auf ganz $]a,b[$ definiert ist.

3.3 Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Definition Eine Differentialgleichung der Form $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ mit $t \in I$ und I Intervall mit einer $n \times n$–Matrix $A(t)$, deren Einträge stetige Funktionen von t sind und einem stetigen $b : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto b(t)$ bezeichnet man als *lineares System von Differentialgleichungen*. Ist $b = 0$, nennt man das lineare System *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

Satz (Existenz und Eindeutigkeit) Ein lineares System von Differentialgleichungen wie oben mit $x(\tau) = \xi \in \mathbb{R}^n$ für ein $\tau \in I$ besitzt eine auf ganz I definierte eindeutige Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$.

Satz (Lösungsraum) Sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $A : I \to \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ und $g : I \to \mathbb{R}^n$ jeweils stetig. Dann gilt: (1) Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des homogenen Systems $x'(t) = A(t)x(t)$ wird mit der punktweise Addition und der skalaren Multiplikation zu einem n–dimensionalen reellen Vektorraum. (2) Die Lösungsmenge des inhomogenen Systems $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ bildet einen affinen Raum, hat also die Struktur $\mu_p + \mathcal{L}$, wobei μ_p eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (*partikuläre Lösung*) und $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge des homogenen Systems aus (1) ist.

Definition Eine Basis des Vektorraums $\mathcal{L}$ aus dem vorherigen Satz wird als *Fundamentalsystem* bezeichnet. Diejenige Matrixwertige Funktion $\Phi : I \to \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$, deren Spalten gerade aus dem Fundamentalsystem stammen, wird als *Fundamentalmatrix* bezeichnet.

Satz Sei $k \in \mathbb{N}$, $\mu_1, ..., \mu_k$ Lösungen eines homogenen linearen Systems von Differentialgleichungen. Dann sind äquivalent: (1) $\mu_1, ..., \mu_k$ sind als vektorwertige Funktionen linear unabhängig. (2) Die Vektoren $\mu_1(t), ..., \mu_k(t)$ sind für jedes $t \in I$ linear unabhängig. (3) Die Vektoren $\mu_1(t), ..., \mu_k(t)$ sind für ein $t \in I$ linear unabhängig.

Satz Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mu_1, ..., \mu_n : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des homogenen Systems $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $A : I \to \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ stetig. $\mu_1, ..., \mu_n$ linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems genau dann wenn es ein $t \in I$ gibt, so dass $\omega : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \det(\mu_1, ..., \mu_n)$ (*Wronski–Determinante*) für dieses t von Null verschieden ist, $\omega(t) \neq 0$.

Rezept (Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten und diagonalisierbarer Matrix) Gegeben sei eine diagonalisierbare $n \times n$–Matrix A und die Differentialgleichung $x' = Ax$, für die ein Fundamentalsystem bestimmt werden soll. (1) Berechne die Eigenwerte von A und die Basen der dazugehörigen Eigenräume. (2) Für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ definiere die Funktionen $\mu_{\lambda,i} = \exp(\lambda t)v_i$, wobei $1 \leq i \leq \dim\ker(A - \lambda E)$. (3) Für alle Eigenwerte Zusammen bildet $\{\mu_{\lambda,i} : I \to \mathbb{R}^n | \lambda \in \sigma(A), 1 \leq i \leq \dim\ker(A - \lambda E)\}$ eine n–elementige Menge linear unabhängiger Lösungen des Differentialgleichung, d.h., ein Fundamentalsystem.

Rezept (Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten und nicht–diagonalisierbarer Matrix) Gegeben sei eine nicht–diagonalisierbare $n \times n$–Matrix A und die Differentialgleichung $x' = Ax$, für die ein Fundamentalsystem anzugeben ist. (1) Berechne die Eigenwerte von A. (2) Bestimme für jeden Eigenwert λ wie bei der Jordanschen Normalform k linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, ..., v_k$, wobei k die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts ist. (3) Für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ definiere die k Funktionen $\mu_{\lambda,i} = \sum_{k=0}^{i} t^{k-1} \exp(\lambda t)v_k$. (4) Die Wronski–Determinante an der Stelle $t = 0$ besteht aus verallgemeinerten Eigenvektoren und die $\{\mu_{\lambda,i} : I \to \mathbb{R}^n | \lambda \in$

$\sigma(A), 1 \leq i \leq k(\lambda)\}$, wo $k(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ bezeichnet, bilden ein Fundamentalsystem.

Definition Sei $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$. Die *Matrix–Exponentialfunktion* $\exp : \mathcal{M}(n;\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{55}$$

Proposition Seien $A, B \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt: (1) $\exp(0 \cdot A) = E$ und $\exp(tA)^{-1} = \exp(-tA)$. (2) Falls $AB = BA$, dann gilt $\exp(tA)\exp(tB) = \exp(t(A+B))$. (3) Gilt $B = TAT^{-1}$ für eine invertierbare Matrix T, so ist $\exp(tB) = T\exp(tA)T^{-1}$. (4) Für $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$ gilt $\exp(t\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)) = \mathrm{diag}(\exp(ta_1), ..., \exp(ta_n))$. (5) Für eine Jordan–Block Matrix A gilt

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} \lambda & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & \lambda & 1 \\ 0 & .... & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & t^2/2e^{\lambda t} & ... & t^{n-1}/(n-1)!e^{\lambda t} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & t^2/2!e^{\lambda t} \\ ... & ... & ... & ... & te^{\lambda t} \\ 0 & ... & ... & ... & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Rezept (Bestimmung des Matrix–Exponentials) Sei A eine reelle $n \times n$–Matrix, für die $\exp(tA)$ bestimmt werden soll. (1) Berechne die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A und prüfe, ob A diagonaliserbar ist (geometrische gleich algebraische Vielfachheit?). (i) Falls ja, berechne die Transformationsmatrix, so dass $D = T^{-1}AT$ Diagonalmatrix ist. (ii) Falls nein, so führe A ggf. über $\mathbb{C}$ in Jordansche Normalform über, d.h., berechne die Transformationsmatrix T, so dass $J = T^{-1}AT$ in Jordanscher Normalform vorliegt. (3) Berechne die Exponentiale von $\exp(tD)$ bzw. $\exp(tJ)$ mittels der obenstehenden Proposition. (4) Verwende Teil (3) der Proposition, um $\exp(tA)$ zu erhalten.

Rezept (Lösen von Anfangswertproblemen) Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}, \tau \in I, \xi \in \mathbb{R}^n$, eine stetige Abbildung $G : I \to \mathbb{R}^n$ sowie das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax + g(t)$, $x(\tau) = \xi$. (1) Berechne eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ für die homogene Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. (2) Berechne die Übergangsmatrix $\Lambda(t,\tau) := \Phi(t)\Phi(\tau)^{-1}$. Im Falle einer inhomogenen Gleichung muss zudem für alle $s \in I$ die Übergangsmatrix $\Lambda(t,s)$ bestimmt werden. (3) Die Lösung des homogenen Anfangswertproblems ist gegeben durch $\mu(t) = \Lambda(t,\tau)\xi$ für alle $t \in I$. (4) Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems erhält man durch Variation der Konstanten zu

$$\mu(t) = \Phi(t)\left[\Phi(\tau)^{-1}\xi + \int_\tau^t \Phi(s)^{-1}g(s)ds\right] \tag{57}$$

$$= \Lambda(t,\tau)\xi + \int_\tau^t \Lambda(t,s)g(s)ds. \tag{58}$$

Das Integral über den Vektor $\Phi(s)^{-1}g(s)$ bzw. $\Lambda(t,s)g(s)$ ist dabei komponentenweise zu berechnen.

Rezept (Komplexe Eigenwerte) In aller Regel wird man darauf abzielen, reelle Lösungen anzugeben, falls die Koeffizientenmatrix A reell ist. Falls diese allerdings komplexe Eigenwerte besitzt, so treten die Eigenwerte in komplex konjugierten Paaren auf, d.h., mit λ ist auch $\bar{\lambda}$ Eigenwert. Das Fundamentalsystem besteht dann aus $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen. Da $\Re[\lambda] = 1/2(\lambda + \bar{\lambda})$ und $\Im[\lambda] = 1/(2i)(\lambda - \bar{\lambda})$, kann nun anstelle der komplexwertigen Lösung einfach Real- und Imaginärteil einer entweder zu λ oder $\bar{\lambda}$ korrespondierenden Lösung für die Angabe eines reellwertigen Fundamentalsystem genutzt werden.

Rezept (Nicht–konstante Koeffizienten) Der Fall, dass allgemeines $A(t)$ eine matrixwertige Funktion von t ist, kann nicht geschlossen analytisch behandelt werden. Eine oftmals zielführende Strategie besteht darin, die beiden Gleichungen getrennt voneinander zu lösen.

Rezept (Fundamentalsystem bei Jordan-Normalform) Gesucht ist für das homogene System $x' = Ax$ zu einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ein Fundamentalsystem.
(i) Bestimme das charakteristische Polynom χ_A. Zerfällt χ_A über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, dann existiert eine Jordan-Normalform über $\mathbb{R}$.
(ii) Bestimme die (hier: reellwertigen) Nullstellen von χ_A. Diese sind die Eigenwerte von A.
(iii) Bestimme nun zu jedem Eigenwert λ eine Jordan-Kette $(v_1, ..., v_k)$. Aus diesen konstruiert man k unabhängige Lösungen des linearen Systems, indem man

$$\Phi_j(t) = e^{\lambda t} \sum_{i=1}^{j} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} v_i$$

für $j \in \{1, 2, ..., k\}$ setzt.
(iv) Verfahre gemäß Schritt (iii) für alle Eigenwerte. Die Gesamtheit der so gefundenen Φ_k's ist dann ein Fundamentalsystem des linearen Systems.

Definition (Trajektorie & Phasenportrait) Eine *Trajektorie* eines ebenen System bezeichnet die Bildmenge einer Lösung $\mu : I \to \mathbb{R}^2$, d.h., $\mu(I) \subset \mathbb{R}^2$. Als *Phasenportrait* bezeichnet man die Gesamtheit aller Trajektorien eines vorgegebenen ebenen Systems.

Satz (Klassifikation stationärer Lösungen) Eine abschließende Klassifikation der Ruhelagen des System $\dot{x} = Ax$ für die Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ für die reelle Koeffizientenmatrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ findet sich in Abb. 1.

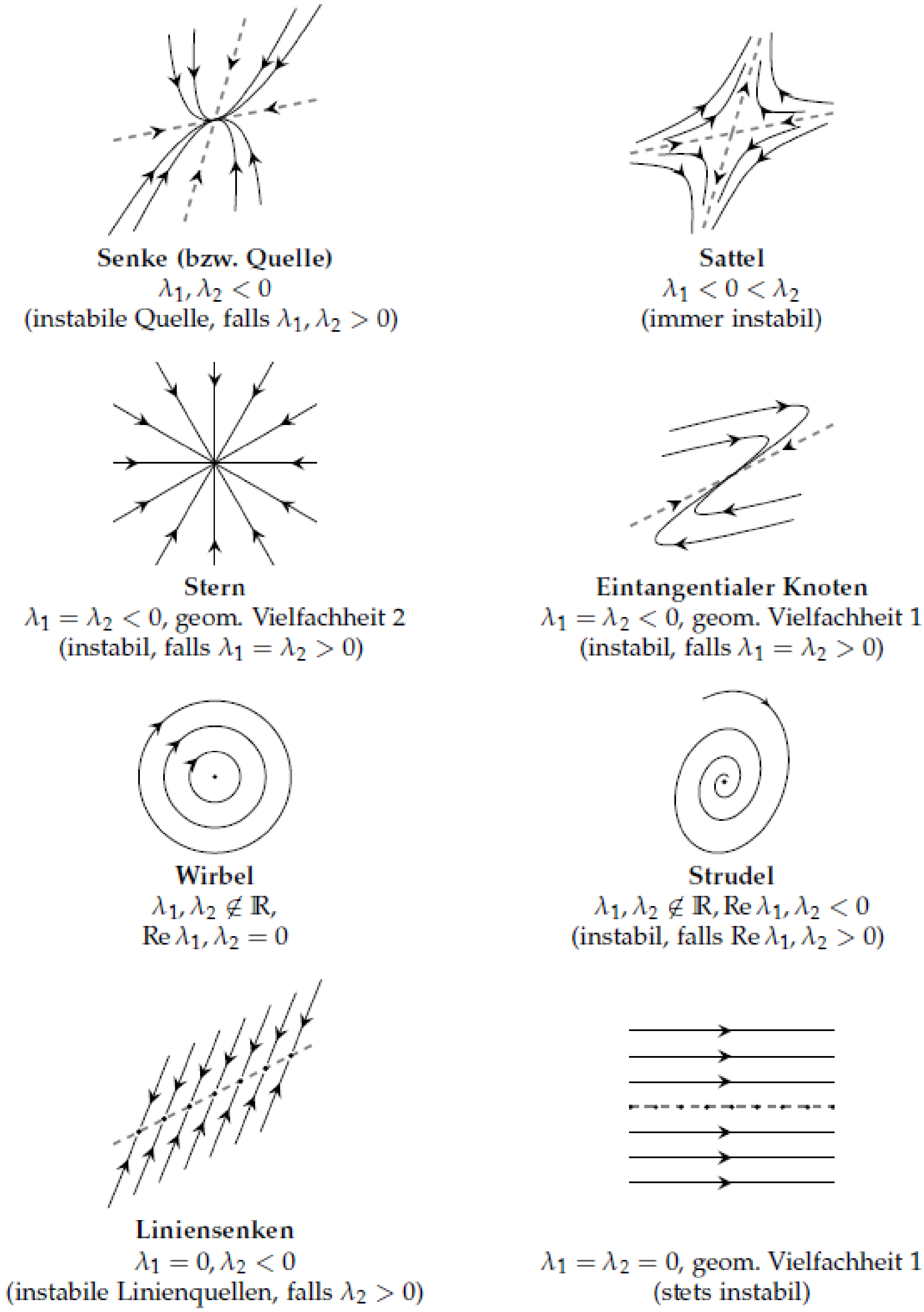


Abbildung 1: Aus dem Buch von Bullach, Funk, S. 446

3.4 Skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition (Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung) Unter eine *linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten* verstehen wir eine Gleichung der Form $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Proposition (Zusammenhang Lineare Systeme und Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung) (i) Durch die Definition $u_k = y^{(k)}$ mit $0 \leq k \leq n-1$ können wir diese als Lineares system von Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben, genauer

$$\begin{pmatrix} u_0' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

(ii) Ist μ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung, so definiert $(\mu, \mu', ..., \mu^{(n-1)})$ eine Lösung des dazu korrespondierenden linearen Systems. Ist umgekehrt $(\lambda_0, ..., \lambda_{n-1})$ eine Lösung des Systems, so ist $\lambda = \lambda_0$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.
(iii) Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit nicht notwendigerweise konstanten Koeffizienten bildet eine n-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{L}$, dessen Basis als *Fundamentalsystem* bezeichnet wird.
(iv) Im Falle einer inhomogenen Gleichung hat die Lösungsmenge die Form $\mu_p + \mathcal{L}$, wobei $\mathcal{L}$ der Lösungsraum der zugehörigen homogenen Gleichung ist und μ_p eine *partikuläre* bzw. *spezielle* Lösung der Gleichung bezeichnet.

Definition (Charakteristisches Polynom) Für eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und von der Form $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$ heißt das Polynom $\chi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung. Dieses stimmt mit dem charakteristischen Polynom des korrespondierenden Systems erster Ordnung überein.

Satz (Fundamentalsystem) (i) Gegeben sei eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit charakteristischem Polynom χ und sei ρ eine k-fache Nullstelle von χ. Dann sind $\exp(\rho t), t\exp(\rho t), ..., t^{k-1}\exp(t\rho)$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung.
(ii) Ist eine m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ mit reellwertigen Koeffizienten von der Form $\rho + i\sigma$, wo $\rho \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^\times$, so ist auch $\rho - i\sigma$ eine m-fache Nullstelle der Form und die $2m$ Funktionen

$$e^{\rho t}\cos(\sigma t), te^{\rho t}\cos(\sigma t), ..., t^{m-1}e^{\rho t}\cos(\sigma t) \tag{60}$$
$$e^{\rho t}\sin(\sigma t), te^{\rho t}\sin(\sigma t), ..., t^{m-1}e^{\rho t}\sin(\sigma t) \tag{61}$$

sind linear unabhängige Lösungen.
(iii) Indem man mittels (i) und (ii) sämtliche Nullstellen von χ abarbeitet, erhält man ein Fundamentalsystem der Gleichung.

Satz (Variation der Konstanten) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 = b(t) \tag{62}$$

wobei $B : I \to \mathbb{R}$ stetig und $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $t_0 \in I$ ist. Es seien ferner die Anfangswerte $y^{(k)}(t_0) = y_k$ für alle $0 \leq k \leq n-1$ spezifiziert. Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist also $y : I \to \mathbb{R}, t \mapsto y(t)$, wobei

$$y(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_n(t)) \left[W(t_0)^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} W(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} \right]. \tag{63}$$

Hierbei ist $\{\mu_k\}_{1 \leq k \leq n}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung und $W(t)$ bezeichnet die *Wronski-Matrix*, gegeben durch

$$W(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) & \cdots & \mu_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \mu_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Satz (Ausgewählte spezielle Lösungen) Aus Platzgründen findet sich das auf einer Tabelle aus der nächsten Seite.

	Rechte Seite der DGL	Parameter	Ansatz
(1)	$e^{\alpha t}$	α	$Ct^k e^{\alpha t}$
(2)	$p_l(t)e^{\alpha t}$	α	$t^k r_l(t)e^{\alpha t}$
(3)	$A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)$	$\pm\beta i$	$t^k(C\sin(\beta t) + D\cos(\beta t))$
(4)	$(p_l(t)\sin(\beta t) + q_l(t)\cos(\beta t))\, e^{\alpha t}$	$\alpha \pm i\beta$	$t^k e^{\alpha t}(r_l(t)\sin(\beta t) + s_l(t)\cos(\beta t))$

- Falls das konkrete α Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, so bezeichnet k die Vielfachheit der Nullstelle. Man spricht dann von *Resonanz*. Falls keine Resonanz vorliegt, setze $k = 0$.

- Im Fall (3) und (4) ist stets die polynomial gewichtete Superposition aus Sinus und Cosinus zu wählen, selbst wenn die Inhomogenität nur eine der beiden Funktionen beinhaltet.

- In der kompletten Tabelle bezeichnen $p_l, q_l, r_l, s_l \in \mathbb{R}[x]$ Polynome mit reellen Koeffizienten und vom Grad l.

Man wählt nun denjenigen Ansatz, der auf den zu behandelnden Fall passt, und bestimmt alle auftretenden Ableitungen. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung findet man nun ein Gleichungssystem mittels dessen die noch verbleibenden freien Parameter im Ansatz bestimmt werden können.

Rezept (Nicht-konstante Koeffizienten) Im Falle, dass die Koeffizienten der Differentialgleichung nicht konstant, sondern nicht-konstante Funktionen der dynamischen Variable t sind, lässt sich die Gleichung gegebenenfalls durch Substitution $\tau = \tau(t)$ bzw. $u = u(y)$ in eine neue Form bringen, die mit den Standardmethoden, die zur Verfügung stehen, behandelt werden kann.

3.5 Ebene autonome Systeme

Definition (Ebenes autonomes System) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend. Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ mit lokal Lipschitz-stetigen $f, g : D \to \mathbb{R}$. Eine derartige Differentialgleichung nennen wir *ebenes, autonomes System.*

Definition (Erhaltungsgröße) Gegeben sei ein ebenes autonomes system $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$. Eine C^1-Funktion $E : D \to \mathbb{R}$, die für alle $(x, y) \in D$ die Gleichung $\partial_x E(x, y) f(x, y) + \partial_y E(x, y) g(x, y)$ erfüllt, nennt man *Erhaltungsgröße* bzw. *Erstes Integral.* Insbesondere: Für eine Lösung $\mu : I \to \mathbb{R}^2$ des Systems gilt $d_t(E \circ \mu)(t) = 0$.

Definition (Hamilton-Funktion) Gegeben sei ein ebenes autonomes System im Sinne der obigen Definition. Eine *Hamilton-Funktion* des Systems ist eine C^1-Funktion $H : D \to \mathbb{R}$, sodass gilt $\partial_x H(x, y) = -g(x, y)$ und $\partial_y H(x, y) = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$.

Proposition (Integrabilitätsbedingung für hamilton'sche Systeme) Sei ein ebenes autonomes System im Sinne der Definition zu Beginn des Abschnitts gegeben. Ferner sei D stärker einfach zusammenhängendes Gebiet. Es existiert eine Hamilton-Funktion H für das System genau dann, wenn $\partial_x f(x, y) + \partial_y g(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in D$ gilt.

Rezept (Phasenportrait mittels Erhaltungsgröße) Gegeben sei ein ebenes autonomes System der Form $(\dot{x}, \dot{y})^T = f(x, y)$ mit $F : D \to \mathbb{R}^2$ lokal Lipschitz-stetig und $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet. Ferner sei $E : D \to \mathbb{R}$ Erhaltungsgröße des Systems. Ziel ist eine Skizze des Phasenportaits. (1) Bestimme die Ruhelagen des Systems, d.h., $\{(x_0, y_0) \in D : f(x_0, y_0) = (0, 0)\}$. (2) Da erste Integrale längs der Lösungskurven konstant sind, erfüllen Lösungen $(x(t), y(t))$, die sich auf eine vorgegebene Ruhelage zubewegen bzw. davon wegbewegen, die Gleichung $E(x(t), y(t)) = E(x_0, y_0)$. Diese Gleichung kann vereinfacht werden und die entsprechenden Niveaumengen im Koordinatensystem skizziert werden. (3) Der Tangentialvektor im Punkte (x, y) eine Trajektorie ist jeweils durch $f(x, y)$ gegeben. Auf diese Weise können die Richtungspfeile bestimmt werden. (4) Bei hinreichend gutartigen Systemen nähern sich die Trajektorien der übrigen Lösungen den soeben bestimmten Trajektorien an.

Rezept (Transformation auf Polarkoordinaten) Gelegentlich kommt es vor, dass die Aufgabenstellung eine Transformation des Systems auf Polarkoordinaten verlangt. Ein Punkt $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ hat in Polarkoordinaten die Form $(x(t), y(t)) =$

$(r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t)))$, wobei $r(t) = \|(x(t), y(t))\|$ und $\theta(t) = \arctan(y(t)/x(t))$ für $x(t) \neq 0$ und $\theta(t) = \operatorname{arccot}(x(t)/y(t))$ für $y(t) \neq 0$ gilt.

3.6 Stabilitätsuntersuchungen

Definition (Stabilität & Instabilität von Lösungen) Sei $n \in \mathbb{N}, V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : V \to \mathbb{R}^n$ stetig sowie lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Eine Lösung $\mu : (a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ von $x' = f(t, x)$ heißt *stabil* falls es zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $\tau > a$ ein $\delta > 0$ sodass für jeden Anfangswert $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi - \mu(\tau)\| < \delta$ die maximale Lösung zu jedem Anfangswert $\lambda(\tau) = \xi$ für alle $t \geq \tau$ existiert und die Abschätzung $\|\lambda(t) - \mu(t)\| < \epsilon$ für alle $t > \tau$ erfüllt. Andernfalls heißt μ *instabil*.

Definition (Attraktivität & Asymptotische Stabilität von Lösungen) Sei $n \in \mathbb{N}, V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : V \to \mathbb{R}^n$ stetig sowie lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Eine Lösung $\mu : (a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ von $x' = f(t, x)$ heißt *attraktiv* wenn es zu jedem $\tau > a$ ein $\eta > 0$ gibt, sodass für jeden Anfangswert $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi - \mu(\tau)\| < \eta$ die maximale Lösung $\lambda(t)$ zum Anfangswert $\lambda(\tau) = \xi$ für alle $t \geq \tau$ existiert und $\lim_{t\to\infty} \|\lambda(t) - \mu(t)\| = 0$ erfüllt. Ist μ stabil und attraktiv, so heißt μ asymptotisch stabil.

Proposition (Stabilitätsverhalten skalarer Differentialgleichungen) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und bzgl. x lokal Lipschitz-stetig. Ist eine Lösung von $x' = f(t, x)$ attraktiv, so ist sie bereits stabil, d.h., asymptotisch stabil.

Proposition (Einheitliches Stabilitätsverhalten aller Lösungen) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A : (a, \infty) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ sowie $g : (a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten das inhomogene Differentialgleichungssystem $x' = A(t)x + g(t)$. Eine Lösung des inhomogenen Systems ist genau dann stabil bzw. attraktiv wenn die Nulllösung des homogenen Differentialgleichungssystems $x' = A(t)x$ stabil bzw. attraktiv ist. Ferner ist bereits jede attraktive Lösung des inhomogenen Systems stabil, d.h., asymptotisch stabil.

Satz (Übergangsmatrizen-Kriterium) Sei $n \in \mathbb{N}, A : (a, \infty) \to M(n \times n; \mathbb{R})$ stetig und $\Lambda(t, \tau)$ die Übergangsmatrix von $x' = A(t)x$. Alle Lösungen dieser Differentialgleichung sind genau dann (1) stabil, falls es für alle $T_0 > a$ ein $\beta > 0$ gibt mit $\|\Lambda(t, T_0)\| \leq \beta$ für alle $t \geq T_0$ bzw. (2) stabil, falls $\lim_{t\to\infty} \Lambda(t, T_0) = 0$ für jedes $T_0 > a$ gilt. Ferner genügt es die Bedingung für eine einzelne Anfangszeit $T_0 > a$ zu überprüfen.

Satz (Eigenwertbedingung für Stabilität) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$. Alle Lösungen von $x' = Ax$ sind genau dann (1) stabil, wenn $\Re[\lambda_1], ..., \Re[\lambda_m] \leq 0$ und für jedes $j \in \{1, ..., m\}$ mit $\Re[\lambda_j] = 0$ die algebraische und geometrische Vielfachheit von λ_j übereinstimmen. bzw. (2) asymptotisch stabil, falls $\Re[\lambda_1], ..., \Re[\lambda_m] < 0$.

Definition (Stationärer Punkt) Sei $x' = g(x)$ ein autonomes System im $\mathbb{R}^n$. Die Nullstellenmenge von g wird auch als die Menge der stationären Punkte des Systems bezeichnet. Ein Element dieser heißt *stationärer Punkt* oder *Ruhelage*.

Satz (Linearisierte asymptotische Stabilität) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $g : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige differenzierbare Funktion und $\xi \in D$ stationärer Punkt. Es bezeichnen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(Dg)(\xi)$. (1) Gilt $\Re[\lambda_1], ..., \Re[\lambda_m] < 0$, so ist ξ eine asymptotisch stabile Ruhelage der autonomen Differentialgleichung $x' = g(x)$. (2) Gibt es ein $j \in \{1, ..., m\}$, sodass $\Re[\lambda_j] > 0$, dann ist ξ eine instabile Ruhelage des autonomen Systems $x' = g(x)$. (3) Im Falle, dass ein $j \in \{1, ..., m\}$ existiert mit $\Re[\lambda_j]$ und der Realteil aller anderen Eigenwerte kleiner oder gleich 0 ist, ist durch Linearisierung keine Stabilitätsaussage möglich.

Definition (Lyapunov-Funktion) Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, sowie $\langle \heartsuit, \clubsuit \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lyapunov-Funktion* der Differentialgleichung $x' = f(x)$, falls gilt $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ für alle $x \in D$.

Satz (Lyapunov-Kriterium) Sei $n \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. $f : D \to \mathbb{R}^n$ sei lokal Lipschitz-stetig und $V : D \to \mathbb{R}$ sei eine Lyapunov-Funktion zu $x' = f(x)$. Sei weiter $\xi \in D$ stationärer Punkt, d.h., $f(\xi) = 0$.
(1) Gilt $V(\xi) = 0$ und $V(x) > 0$ für alle $x \in D \setminus \{\xi\}$, so ist ξ eine stabile Ruhelage von $x' = f(x)$.
(2) Gilt $V(\xi) = 0$ und $V(x) > 0$ für alle $x \in D \setminus \{\xi\}$ und sogar die Ungleichung $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$ für alle $x \in D \setminus \{\xi\}$ für die Lyapunov-Funktion V, so ist ξ eine asymptotisch stabile Ruhelage von $x' = f(x)$.
(3) Gilt $V(\xi) = 0$ sowie $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$ für alle $x \in D \setminus \{\xi\}$ und gibt es ferner in jeder Umgebung U von ξ ein $u \in U$ mit $V(u) < 0$, so ist ξ eine instabile Ruhelage von $x' = f(x)$.

Rezept (Stabilitätsuntersuchung) Man unterscheidet die folgenden Methoden der Stabilitätsuntersuchung.

- Für Differentialgleichungen der Form $x' = A(t)x + g(t)$ charakterisiert man die Stabilität der Lösungen am effektivsten über das Kriterium zu den Übergangsmatrizen.

- Für eine Differentialgleichung der Form $x' = Ax + g(t)$ mit konstanter Matrix A charakterisiert man die Stabilität von Lösungen am effektivsten und vollständig über das Eigenwertkriterium für Stabilität.

- Für ein autonomes System $x' = f(x)$ führt oftmals linearisierte Stabilitätstheorie zum Ziel, die Stabilität eines stationären Punkts ξ zu untersuchen. Dazu muss man dann die Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(Df)(\xi)$ berechnen. Falls $\{0\} \oplus \mathbb{R} \cap \sigma(A) \neq \emptyset$, ist aber keine Aussage möglich. das bedeutet, es gibt einen Eigenwerte mit verschwindendem Realteil für die Jacobi-Matrix $(Df)(\xi)$.

- Kann man eine Lyapunov-Funktion V zum autonomen System $x' = f(x)$ bestimmen, so liefert das Kriterium von Lyapunov eine Stabilitätsaussage für jeden der drei Fälle (stabil, asymptotisch stabil bzw. instabil).

4 Kurs im Wintersemester 18/19

4.1 Aufgaben Übungen

Aufgabe 1 Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetig. Ferner sei $(\tau, \xi) \in U$und bezeichne V diejenige maximale und zusammenhängende offene Teilmenge von U, so dass $(\tau, \xi) \in V$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gilt nun, dass dan Anfagswertproblem $x' = f|_V(x, y)$, $x(\tau) = \xi$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)} : J \to \mathbb{R}^n$ besitzt, wobei $J \subset \mathbb{R}$ offen und so dass $(t, \lambda_{\tau,\xi}(t)) \in V$ für alle $t \in J$, $\lambda_{\tau,\xi}(\tau) = \xi$, $\lambda'_{\tau,\xi}(t) = f|_V(t, \lambda_{\tau,\xi}(t))$ für alle $t \in J$ und J maximal im folgenden Sinne ist: Ist $\mu : I \to \mathbb{R}^n$ weitere Lösung des Anfangswertproblems, dann gilt $I \subseteq J$ und $\lambda_{\tau,\xi}|_I = \mu$. Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x^2y^2$ und wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Gesucht ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems. Zunächst ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig im ersten Argument und stetig partiell differenzierbar im zweiten Argument, also lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument. Für beliebiges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existiert also eine Lösung des Anfangswertproblems.

- *Fall 1:* $y_0 = 0$ Dann ist die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ eine Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = 0$ für einen beliebigen Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ befriedigt und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Nach der Charaktersierung maximaler Lösungen ist damit $\lambda_{x_0,0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die (eindeutige)maximale Lösung des betrachteten Anfangswertproblems.

- *Fall 2:* $y_0 \neq 0$ Da eine Lösung der Differentialgleichung differenzierbar, also insbesondere stetig sein muss, garantiert die Eindeutigkeit der maximalen Lösung aus Fall 1, dass die maximale Lösung $\lambda_{\tau,\xi} : J_{\tau,\xi} \to \mathbb{R}$ zum Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(\tau) = \xi$ entweder positiv oder negativ auf dem ganzen Existenzintervall ist. Andernfalls lieferte der Zwischenwertsatz ein $t \in J_{\tau,\xi}$, so dass $0 = \lambda_{\tau,\xi}(t)$. Betrachtet man nun die Differentialgleichung zur neuen Anfangsbedingung $y(t) = 0$, so gibt es zwei maximale Lösungen, einmal die aus Fall 1, und einmal die soeben betrachtete. Das ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der maximalen Lösung nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, so dass tatsächlich $\lambda_{\tau,\xi}(t) > 0$ für alle $t \in J_{\tau,\xi}$ genau dann gilt wenn $\xi > 0$ und $\lambda_{\tau,\xi}(t) < 0$ für alle $t \in J_{\tau,\xi}$ genau dann gilt wenn $\xi < 0$. Trennung der Variablen der Differentialgleichung liefert, dass die Lösung μ des Anfangswertproblems durch Auflösen der Gleichung
$$\int_\tau^x s^2\, ds = \int_\xi^{\mu(x)} \frac{dy}{y^2} \tag{65}$$
gegeben ist. Es gilt dann $1/\mu(x) = 1/\xi - 1/3(x^3 - \tau^3)$, so dass
$$\mu(x) = \frac{\xi}{1 - \xi/3(x^3 - \tau^3)}. \tag{66}$$

Dies definiert eine differenzierbare Funktion $\mu : (-\infty, \sqrt[3]{3/\xi + \tau^3}) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\xi}{1-\xi/3(x^3-\tau^3)}$ falls $\xi > 0$ und $\mu : (\sqrt[3]{3/\xi + \tau^3}, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\xi}{1-\xi/3(x^3-\tau^3)}$ falls $\xi < 0$. Man sieht, dass in beiden Fällen τ Element des jeweiligen Existenzintervalls ist und Nachrechnen liefert:

$$\mu'(x) = -\frac{\xi^2}{(1-\xi/3(x^3-\tau^3))^2}(-x^2) = \mu(x)^2 x^2 = f(x, \mu(x)), \tag{67}$$

so dass wir tatsächlich eine Lösung des Differentialgleichung gefunden haben. Wegen $\limsup_{x \to \sqrt[3]{3/\xi+\tau^3}^-} |\mu(x)| = \infty$ im Falle $\xi > 0$ und $\limsup_{x \to \sqrt[3]{3/\xi+\tau^3}^+} |\mu(x)| = \infty$ im Falle $\xi < 0$, hat die jeweilige maximale Lösung kein über die endliche Intervallgrenze hinaus vergrößerbares Existenzintervall. Die jeweils andere Intervallgrenze ist $-\infty$ im Falle $\xi > 0$ und $+\infty$ im Falle $\xi < 0$ und nach der Charakterisierung maximaler Lösungen von Anfangswertproblemen durch ihr Randverhalten hat das jeweilige μ also das Randverhalten einer maximalen Lösung, ist also eine solche. Damit finden wir:

$$\lambda_{\tau,\xi>0} : (-\infty, \sqrt[3]{3/\xi + \tau^3}) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\xi}{1-\xi/3(x^3-\tau^3)}, \tag{68}$$

$$\lambda_{\tau,\xi<0} : (\sqrt[3]{3/\xi + \tau^3}, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\xi}{1-\xi/3(x^3-\tau^3)} \tag{69}$$

als jeweilige maximale Lösungen des Anfangswertproblems $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(\tau) = \xi$.

□

Aufgabe 2 Gesucht sind alle maximalen und beschränkten Lösungen der Differentialgleichung $y' = 3(xy)^2 - 12x^2$. Definiere zunächst $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3(xy)^2 - 12x^2$. Diese Funktion ist stetig im ersten Argument und stetig partiell differenzierbar nach dem zweiten Argument, genügt also einer lokalen Lipschitz-Bedingung in der zweiten Variablen y. Ferner ist $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ offen und zusammenhängend, also ein Gebiet. Für beliebiges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ liefert nun der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz also die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\lambda_{(x_0,y_0)} : I_{x_0,y_0} \to \mathbb{R}$ zum Angangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Wir beobachten zuerst, dass $y' = f(x, y) = 3x^2(y^2 - 4)$.

- *Fall 1 – Konstante Lösungen:* Für $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $y_0 = 2$, ist $\lambda_{x_0,y_0=2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2$ wegen im Sinne der Charaktersierung maximaler Lösungen richten Randverhaltens die eindeutige maximale Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $y(x_0) = 2$. Analog sieht man, dass für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ aber $y_0 = -2$, $\lambda_{x_0,y_0=-2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -2$ das für die Maximalität einer Lösung geforderte Randverhalten aufweist und das Anfangswertproblem bestehdend aus der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und der Anfangsbedingung $y(x_0) = -2$ löst.

- *Fall 2 – $y_0 \in (-2, 2)$:* Sei nun $y_0 \in (-2, 2)$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = 3x^2(y^2-4)$, $y(x_0) = y_0$. Da $(x_0, y_0) \notin \mathrm{graph}(x \mapsto$

$2)\cup\text{graph}(x \mapsto -2)$, bleibt die maximale Lösung wegen Eindeutigkeit stets im Intervall $(-2, 2)$ für alle $x \in J_{x_0,y_0}$, d.h., in ihrem maximalen Existenzintervall. Also ist $0 < |y^2(x) - 4| \leq 4$ für alle $x \in J_{x_0,y_0}$ und Separation der Variablen kann angewendet werden: Die Lösung μ des Anfangswertproblems ist danach durch Auflösen der Gleichung

$$3\int_{x_0}^{x} dss^2 = \int_{y_0}^{\mu(x)} \frac{dy}{y^2 - 4} = \frac{1}{4}\int_{y_0}^{\mu(x)} \frac{dy}{y-2} - \frac{1}{4}\int_{y_0}^{\mu(x)} \frac{dy}{y+2} \tag{70}$$

nach $\mu(x)$ zu erhalten. Das liefert zunächst als Zwischenergebnis:

$$4(x^3 - x_0^3) = \ln\left|\frac{\mu(x) - 2}{\mu(x) + 2}\frac{y_0 + 2}{y_0 - 2}\right|. \tag{71}$$

Auflösen nach $\mu(x)$ liefert

$$\frac{|\mu(x) - 2|}{|\mu(x) + 2|} = \frac{|y_0 - 2|}{|y_0 + 2|}\exp(4(x^3 - x_0^3)). \tag{72}$$

Wegen $y_0, mu(x) \in (-2, 2)$ ist der Nenner der die Beträge beinhalteten Quorienten jeweils positiv, der Zähler jeweils negativ. Restauration der entsprechenden Vorzeichen und anschließendes Kürzen eines Minus-Zeichen auf beiden Seiten führt zu

$$\frac{\mu(x) - 2}{\mu(x) + 2} = \frac{y_0 - 2}{y_0 + 2}\exp(4(x^3 - x_0^3)), \tag{73}$$

so dass

$$\mu(x)\left(1 - \frac{y_0 - 2}{y_0 + 2}\exp(4(x^3 - x_0^3))\right) = 2\left(1 + \frac{y_0 - 2}{y_0 + 2}\exp(4(x^3 - x_0^3))\right). \tag{74}$$

Indem nun gefordert wird, dass der zweite Faktor auf der linken Seite von 0 verschieden sei (dazu später), können wir nach $\mu(x)$ auflösen:

$$\mu(x) = 2\frac{1 + \frac{y_0-2}{y_0+2}\exp(4(x^3 - x_0^3))}{1 - \frac{y_0-2}{y_0+2}\exp(4(x^3 - x_0^3))} \equiv \mu_{x_0,y_0}(x). \tag{75}$$

Es ist nötig, dass

$$1 \neq \frac{y_0 - 2}{y_0 + 2}\exp(4(x^3 - x_0^3)) \Leftrightarrow \exp(-4(x^3 - x_0^3)) \neq \frac{y_0 - 2}{y_0 + 2}. \tag{76}$$

Wegen $-2 < y_0 < 2$ ist der Quotient rechts stets negativ und die Positivität der Exponentailfunktion stellt sicher, dass die obenstehende Bedingung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Also definiert $\mu_{x_0,y_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mu_{x_0,y_0}(x)$ einen Kandidaten für eine maximale Lösung des Anganfswertproblems gemäß des betrachteten Falles. Zu prüfen bleibt, ob die Separation der Variablen eine Lösung geliefert hat. In der Tat sieht man leicht, dass die Anfangsbedingung $\mu_{x_0,y_0}(x_0) = y_0$ und die Differentialgleichung $\mu'_{x_0,y_0}(x) = f(x, \mu_{x_0,y_0}(x))$ erfüllt werden. Damit haben wir eine maximale Lösung gefunden, die ebenfalls beschränkt ist.

- *Fall 3 – $y_0 \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$:* Es verbleibt der Fall $|y_0| > 2$ zu untersuchen. Analog zum Falls $|y_0| < 2$ gilt offenbar für die maximale Lösung λ_{x_0,y_0} der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ mit $|y_0| > 2$, dass für alle $x \in J_{x_0,y_0}$, dem maximalen Existenzintervall, $|\lambda_{x_0,y_0}| > 2$, da sonst Widerspruch zur Eindeutigkeit bzw. Stetigkeit der Lösung. Sei nun y_0 mit den beschriebenen Eigenschaften beliebig aber fest und bezeichne λ_{x_0,y_0} die zum Anfangswertproblem gehörige Lösung. Analog zu oben finden wir als Kandidaten:

  $$\mu(x) = 2\frac{1 + \frac{y_0-2}{y_0+2}\exp(4(x^3 - x_0^3))}{1 - \frac{y_0-2}{y_0+2}\exp(4(x^3 - x_0^3))} \equiv \mu_{x_0,y_0}(x), \tag{77}$$

  aber die Bedingung an der Nenner liefert uns diesmal wegen $(y_0-2)/(y_0+2) > 0$, dass bei

  $$x = x_c(y_0) \equiv \sqrt[3]{x_0^3 - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{y_0-2}{y_0+2}\right)} \tag{78}$$

  der Nenner des Ausdrucks in der vorletzten Gleichng singulär wird, der Zähler aber endlich bleibt. Damit finden wir jeweils 2 Zweige maximaler Lösungen, die aber bei $x_c(y_0)$ jeweils unbeschränkt sind. Daher sind sie für die Aufgabe nicht weiter relevant und die beiden in den ersten beiden Fällen gefundenen maximalen Lösungen decken alle maximalen Lösungen, die beschränkt sind, ab.

$\square$

Aufgabe 3 Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = \exp(y)\sin(y)$. Zu zeigen ist, dass jede auf ihren maximalen Definitionsbereich fortgesetzte Lösung bereits auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Zunächst stellen wir fest, dass die Differentialgleichung autonom ist und definieren $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \exp(y)\sin y$. Diese Funktion ist konstant, also insbesondere stetig, in x für alle $x \in \mathbb{R}$ und stetig partiell differenzierbar in y für alle $y \in \mathbb{R}$, genügt also in y einer lokalen Lipschitzbedingung. Wir suchen zuerst die konstanten Lösungen. Dies geschieht durch Lösen der Gleichung $f(x, y) = 0$, was wegen $\exp(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ äquivalent zu $\sin y = 0$ ist. Die Sinus-Funktion hat Nullstellen $y_n = n\pi$, wobei $n \in \mathbb{Z}$. Insofern finden wir für alle $n \in \mathbb{Z}$, dass die eindeutige und maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y) = \exp(y)\sin y$ mit $y(x_0) = y_n$ für beliebiges aber festes $x_0 \in \mathbb{R}$ durch $\lambda_{y_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y_n$ gegeben ist. Sei nun $y_0 \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$ beliebig aber fest. Dann gibt es ein eindeutiges $n \in \mathbb{Z}$, so dass $n\pi < y_0 < (n + 1)\pi$. Da $(x_0, y_0) \notin \Gamma(\lambda_{y_n})$ und $(x_0, y_0) \notin \Gamma(\lambda_{y_{n+1}})$, ist aus Stetigkeitsgründen $n\pi < \lambda_{x_0,y_0} < (n+1)\pi$ für die maximale Lösung $\lambda_{x_0,y_0} : J_{x_0,y_0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda_{x_0,y_0}(x)$ des Anfangswertproblems $y' = \exp(y)\sin(y)$, $y(x_0) = y_0$ für $x_0 \in \mathbb{R}$. Es handelt sich also um eine beschränkte maximale Lösung. Mit der Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten folgt nun, dass $J_{x_0,y_0} = \mathbb{R}$, mit anderen Worten, dass die maximale Lösung des betrachteten Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$ existiert. $\square$

Aufgabe 4 Gesucht sind alle Lösungen $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $u'(x) = \sqrt{1 - u(x)^2}$ zu (Fall 1) $u(0) = +1$ bzw. (Fall 2) $u(0) = -1$. Zunächst stellen wir fest, dass die Funktion $f : [0, \infty) \times [-1, 1] \to \mathbb{R}, (x, u) \mapsto \sqrt{1 - u(x)^2}$ stetig, nicht aber lokal Lipschitzstetig ist: Denn bereits die Funktion $\sqrt{} : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist nicht lokal Lipschitz-stetig bei $x = 0$: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt nämlich $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = 1/(2\sqrt{\xi})|(x - 0)|$ für ein $\xi \in (0, x)$. Wäre die Funktion lokal Lipschitzstetig, so gäbe es ein $U = [0, x_0)$, so dass für alle $x \in U$ $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq L|x|$ erfüllt wäre mit einem $L \in [0, \infty)$. Indem wir nun in den obenstehenden Rechnung $0 < \xi < L^2/4$, sehen wir, dass es keine endliche Lipschitzkonstante geben kann, so dass $\sqrt{}|_U$ Lipschitz-stetig in 0 ist. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist also nicht anwendbar.

- *Fall 1* In diesem Fall finden wir $\lambda_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ eine konstante Lösung der autonomen Differentialgleichung, die maximales Existenzintervall laut Aufgabenstellung hat und die Anfangesbdingung $\lambda_1(0) = 1$ befriedigt. Wegen $u' = \sqrt{1 - u^2} \geq 0$ ist dies auch die einzige Lösung.

- *Fall 2* In diesem Fall finden wir durch $\lambda_{-1} : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto -1$ eine weitere konstane Lösung der autonomen Differentialgleichung, die maximales Existenzintervall laut Aufgabenstellung hat und die Anfangsbedingung $\lambda_{-1}(0) = -1$ befriedigt. Sei nun $(\tau, \xi) \in (0, \infty) \times (-1, 1)$. Indem wir den Definitionsbereich der Differentialgleichung einschränken auf Gebiet $G = (0, \infty) \times (-1, 1)$ wird der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar. Dieser liefert uns die Existenz eines eindeutigen, maximalen Lösung des Anfangswertproblems $u' = \sqrt{1 - u^2}$, $u(\tau) = \xi$. Da dann $|u(x)| < 1$ im Existenzintervall gilt, finden wir unter Beachrung von $d_x \arcsin(u(x)) = u'(x)/\sqrt{1 - u(x)^2}$, dass

  $$\arcsin(u(x)) - \arcsin(\xi) = x - \tau \Rightarrow u(x) = \sin((x - \tau) + \arcsin \xi) \tag{79}$$

  für $x \in (-\pi/2 + \tau - \arcsin \xi, \pi/2 + \tau + \arcsin \xi)$. Wir erhalten nun für die Ausgangsdifferenialgleichung weitere Lösungen durch "Anstückeln" von Lösungen für die Wahl $\tau = c \in [0, \infty)$ und $\xi = -1$ durch C^1-Fortsetzung der soeben erhaltenen Lösungen auf die Were -1 bzw. $+1$:

  $$\lambda_\tau : [0, \infty) \to [-1, 1], x \mapsto \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq c \\ \sin((x - c) - \pi/2) & c < x < c + \pi \\ +1 & c + \pi \leq x < \infty \end{cases} \tag{80}$$

  für alle $c \geq 0$. Wir haben alle Lösungen des reduzierten Problems, die sich für $x \in [0, \infty)$ hin zu $u(x_0) = -1$ fortsetzen lassen, verwendet, so dass es keine weiteren Lösungen des zu untersuchenden Anfangswertproblem gemäß der Voraussetzungen aus Fall (b) gibt.

$\square$

Aufgabe 5 Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = [\sin(t + y)]^{-1} - 1$, $y(0) = \pi/4$. Zu bestimmen ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems. Wir führen zuerst die Substitution $z(t) = t + y(t)$ durch. Ableiten liefert $z'(t) = 1 + y'(t) =$

$[\sin(t+y(t))]^{-1}-1 = [\sin(y(t)+t)]^{-1} = [\sin(z(t))]^{-1}$. Da $\sin x = 0$ für $x \in \pi\mathbb{Z}$, müssen wir den Definitionsbereich D der rechten Seite so wählen, dass $z(0) = \pi/4 \in D$,D Gebiet, d.h., offen und zusammenhängend, ist und $f : D \to \mathbb{R}, z \mapsto (\sin z)^{-1}$ lokal Lipschitz-stetig auf D in z ist. Dies erreichen wir, indem wir $D = (0, \pi)$ wählen. Denn auf $(0, \pi)$ ist f sogar C^1-differenzierbar in y, insbeondere also lokal Lipschitz-stetig in z. Für das Ausgangsproblem mit der gesuchten Funktion y nehmen wir also $\mathbb{R}^2 \supset G \equiv \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t + y < \pi\}$ als Kandidat für den Definitionsbereich der rechten Seite. G ist offen und, da konvex, auch zusammenhängend. Da $z = t + y$ eine y glatte Abbildung zu festem t erklärt, überträgt sich die Regularität von $f(z)$ in z auf $f(t + y)$ in y nach der Kettenregel. Addition der Konstanten -1 lässt das Regularitätsverhalten von $g : G \to \mathbb{R}, (t, y) \mapsto [\sin(t + y)]^{-1} - 1$ unberührt, d.h., g ist in y C^1-regulär auf dem gesamten Definitionsbereich und somit lokal Lipschitz-stetig. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert somit die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\lambda : I_{0,\pi/4} \to \mathbb{R}$ des eingangs genannten Anfangswertproblems so dass $\Gamma[\lambda] \subset G$. Wir wenden Separation der Variablen an, um eine Lösung z der auf z transformierten Gleichung zu bestimmen. Diese existiert in eindeutiger Weise ebenfalls wegen des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes und wir bezeichnen die maximale Lösung mit $\mu : I \to (0, \pi), t \mapsto \mu(t)$. Separation der Variablen erlaubt uns, diese als Lösung der Gleichung

$$\cos(\pi/4) - \cos(\mu(t)) = \int_{\pi/4}^{\mu(t)} dz \, \sin(z) = \int_0^t ds = t \tag{81}$$

zu finden. Damit

$$\mu(t) = \arccos(\sqrt{2}^{-1} - t), \tag{82}$$

wobei nun $\sqrt{2}^{-1} - t \in (0, \pi)$ zu fordern ist, damit der Cosinus invertiert werden kann. Äquivalent zu vorherigen Inklusion: $t \in (\sqrt{2}^{-1} - \pi, \sqrt{2}^{-1}) = I$. Wir stellen fest, dass $0 \in I$ und $\mu(0) = \pi/4$. Ferner gilt $\mu'(t) = -1/\sqrt{1 - (\sqrt{2}^{-1} - t)^2} \cdot (-1) = 1/(\sqrt{1 - (\cos \mu(t))^2}) = [\sin(\mu(t))]^{-1}$, da $\sin \circ \mu : I \to \mathbb{R}$ positive Funktion ist. Wir stellen ferner fest, dass $\limsup_{t \to (\sqrt{2}^1)^-} (\mu(t)) = 0$ und $\limsup_{t \to (\sqrt{2}^{-1} - \pi)^+} \mu(t) = \pi$, so dass die Lösung am Rand von I gegen den Rand von D, $\partial D = \{0, \pi\}$ strebt. Nach der Charakterisierung maximaler Lösungen haben wir somit eine maximale Lösung des Anfangswertproblems in z gefunden, $\mu : (\sqrt{2}^{-1} - \pi, \sqrt{2}^{-1}) \to (0, \pi), t \mapsto \arccos(\sqrt{2}^{-1} - t)$. Die maximale Lösung λ ergibt sich nun durch Rücktransformation und für ihr Existenzintervall $J_{0,\pi/4}$ gilt $J_{0,\pi/4} = I = (\sqrt{2}^{-1} - \pi, \sqrt{2}^{-1})$. Insgesamt also:

$$\lambda : (\sqrt{2}^{-1} - \pi, \sqrt{2}^{-1}) \to G \tag{83}$$

$$t \mapsto \arccos(\sqrt{2}^{-1} - t) - t. \tag{84}$$

Wegen Stetigkeit der zugrundeliegenden Transformation von y auf z resultiert das für eine maximale Lösung erforderliche Randverhalten. □

Aufgabe 6

- *(a): Falsch* Gegenbeispiel. Das Anfangswertproblem $x' = 1+x^2$, $x(0) = 0$ wird von der Funktion $x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}, t \mapsto \tan t$ gelöst, die $\limsup_{t\to(\pi/2)^-} |x(t)| = \infty$ und $\limsup_{t\to(-\pi/2)^+} |x(t)| = \infty$ als Randverhalten aufweist, d.h., nach der Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten, tatsächlich die (eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems ist. Dabei ist $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto 1 + x^2$ stetig in t (als konstante Funktion in t) und C^1 in x, also lokal Lipschitz-stetig, so dass der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz greift. Mithin haben wir für den Fall $n = 1$ ein Gegenbeispile gefunden.

- *(b): Richtig* Bei der Charakterisierung durch Randverhalten können wir den Fall, dass die maximale Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist wegen $(-1, 1) \neq \mathbb{R}$ ausschließen. Da $\partial\mathbb{R}^2 = \emptyset$, kann der Graph der Lösung, $\Gamma[x]$, auch keinen nicht-leeren Schnitt mit dem Rand von $\mathbb{R}^2$ haben. Also bleibt nur übrig, dass $\limsup_{|t|\to1^-} |x(t)| = \infty$.

- *(c): Falsch* Gegenbeispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1+\sqrt{|x|}$ ist bei $x = 0$ nicht lokal Lipschitz-stetig. Andererseits hat das durch $x' = f(x)$, $x(0) = 0$ mittels Trennung der Variablen eine, zunächst implizit gegebene, Lösung,
$$t = \int_0^{x(t)} \frac{dy}{1 + \sqrt{|y|}}, \tag{85}$$
die nach $x(t)$ in einer offenen Umgebung der 0, d.h., in einem Intervall $(-\delta, \delta)$ $(\delta > 0)$ aufgelöst werden kann.

- *(d): Richtig* Die Lipschitzstetigkeit von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liefert zusammen mit der Gebietseigenschaft von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung $\lambda : I_{(0,0)} \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $x' = f(x)$, $x(0) = 0$ auf dem Existenzintervall I. Da f nun beschränkt ist, ist $x(t)$ für alle endlichen Zeiten $t \in \mathbb{R}$ endlich, so dass der Fall, gegeben ein $t_\partial \in \partial I_{(0,0)} \subset \mathbb{R}$, dass $\limsup_{I_{(0,0)}\ni t\to t_\partial} |x(t)| = \infty$ nicht für endliches t_∂ auftreten kann. Da ferner $\partial(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \emptyset$, kann die Lösung auch nicht aus dem Gebiet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ für eine endliche Zeit $t_\partial \in \partial I \subset \mathbb{R}$ entweichen. Somit haben wir alle möglichen Fälle, dass die maximale Lösung ein nicht beidseitig unendliches Existenzintervall besitzt, abgehandelt. Nach der Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten bleibt somit nur noch übrig, dass die maxiale Lösung λ Existenzintervall $I_{(0,0)} = \mathbb{R}$ besitzt.

$\square$

Aufgabe 7 Gegeben sei $c > 0$ und das Anfangswertproblem $x' = x^2/(1 + t^2)$, $x(0) = c$. Sei $\phi_c : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems definiert auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $0 \in I$. Zu zeigen ist, dass ϕ_c keine Nullstelle hat. Definiere zunächst die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto x^2/(1 + t^2)$. Diese ist in t für alle $t \in \mathbb{R}$ stetig und in x für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, also lokal Lipschitz-stetig. Da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ferner Gebiet, liefert der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\lambda_c : J_c \to \mathbb{R}$ mit dem offenen (maximalen) Existenzintervall J_c. Da wegen Maximalität jede weitere Lösung, insbesondere also das ϕ_c, durch Einschränkung der maximalen Lösung λ_c von J_c auf I zustande kommt, reicht es aus, zu zeigen, dass die maximale Lösung λ_c auf ihrem Existenzintervall J_c keine Nullstelle besitzt. Wir betrachten zunächst das Hilfs-Anfangswertproblem $x' = x^2/(1+t^2)$, $x(0) = 0$. Das obige Argument über den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\lambda_0 : J_0 \to \mathbb{R}$. Wegen $f(t,0) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 0$ eine Lösung des Anfangswertproblem mit dem für eine maximale Lösung erforderlichen Randverhalten laut Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten: Ihr Existenzintervall ist ganz $\mathbb{R}$. Da ferner $(0,c) \notin \Gamma(\lambda_0)$ für alle $c \neq 0$, insbesondere ale $c > 0$, schneiden sich die Graphen der maximalen Lösungen λ_0, λ_c für kein $c > 0$. Damit gilt für beliebiges $c > 0$ und $t \in J_c$ stets $\lambda_c(t) \neq 0$ und aus Stetigkeitsgründen sogar $\lambda_c(t) > 0$. Insbesondere hat zu vorgegebenem $c > 0$ die maximale Lösung λ_c des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$, $x(0) = c$ keine Nullselle. Infolge der Bemerkung zur Beziehung zwischen Nullstellen von Lösungen und der maximalen Lösung des Anfangswertproblems, hat keine Lösung $\phi_c : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems eine Nullstelle für $c > 0$. Wir suchen nun eine Lösung des Anfangswertproblems. Dazu stellen wir fest, dass die Differentialgleichung separabel ist: Separation der Variablen liefert, dass eine Lösung ϕ_c des Anfangswertproblems durch Lösen der Integralgleichung

$$\int_c^{\phi_c(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2} \tag{86}$$

zu finden ist. Wir finden $c^{-1} - (\phi_c(t))^{-1} = \arctan(t)$ und durch Umformen $\phi_c(t) = c/(1 - c\arctan(t))$. Das Auflösen nach ϕ_c funktioniert allerdings nur solange $t \in \mathbb{R}$ für $c \leq 2\pi^{-1}$ und für $t \in (-\infty, \tan(c^{-1}))$ für $c > 2\pi^{-1}$. Ansonsten wird der Nenner in $\phi_c(t)$ Null. Insofern finden wir die Kandidaten:

$$0 < c \leq 2\pi^{-1} : \ \phi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{c}{1 - c\arctan t}, \tag{87}$$

$$c > 2\pi^{-1} : \ \phi_c : (-\infty, \tan(c^{-1})), t \mapsto \frac{c}{1 - c\arctan t}. \tag{88}$$

Bezeichnen wir die Existenzintervalle mit I_c. In jedem Fall gilt $0 \in I_c$ für $c > 0$. Ferner gilt $\phi_c(0) = c$ und wir finden $\phi_c'(t) = -c/(1 - c\arctan(t))^2(-c)/(1+t^2) = (\phi_c(t))^2/(1+t^2) = f(t, \phi_c(t))$ für beliebiges $t \in I_c$. Also haben wir eine Lösung des Anfangswertproblems gefunden, und die Intervalle I_c haben für jedes $c > 0$ die geforderten Eigenschaften. Zum Schluss behaupten wir, dass wir so bereits die maximalen Lösungen gefunden haben

- *Fall 1 (*$0 < c \leq 2\pi^{-1}$*):* In diesem Fall ist die Maximalität derLösung bereits nach der Charakterisierung über das Randverhalten klar: Beide Seiten des Existenzintervalls sind unendlich, so dass der soeben genannte Satz die Maximalität der gefundenden Lösungen sicherstellt. Somit ist ϕ_c wie angegeben bereits die maximale Lösung.

- *Fall 1 ($c > 2\pi^{-1}$):* In diesem Fall ist zwischen unterer und oberer Grenze des Existenintervalls zu unterscheiden. Die untere Existenzintervallgrenze ist $-\infty$, so dass die gefundene Lösung keine Einscrhänkung einer für weitere $t < 0$ erklärten Lösung sein kann. Bei der oberen Existenzintervallgrenze stellen wir fest, dass $\limsup_{t\to\tan(c^{-1})^-} |\phi_c(t)| = \infty$ gilt. Nach der Charakterisierung maximalerLösungen durch ihr Randverhalten besitzt also die angegebene Lösung ϕ_c auch an der oberen Existenzintervallgrenze das für eine maximale Lösung erforderliche Randverhalten. Somit ist ϕ_c wie angegeben also bereits die maximale Lösung.

Für die Entweichzeiten gilt $t_c^- = -\infty$ für alle $c > 0$ und $t_c^+ = \infty$ für $0 < c \leq 2\pi^{-1}$ sowie $t_c^+ = \tan(c^{-1})$ für $c > 2\pi^{-1}$. Wir halten fest: Für $0 < c < 2\pi^{-1}$ gilt $0 < \lim_{t\to t_c^+=\infty} \phi_c(t) = c/(1-c\pi/2) < \infty$ und für $c = 2\pi^{-1}$ gilt $\lim_{t\to t_c^+=\infty} \phi_c(t) = \infty$ und für $c > 2\pi^{-1}$ gilt $\lim_{t\to t+_c<\infty} \phi_c(t) = \infty$. Analog finden wir für alle $c > 0$, dass gilt $0 < \lim_{t\to t_c^-=\infty} \phi_c(t) = c/(1+c\pi/2) > 0$. □

Aufgabe 8 Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto \exp(t^2x^2)+t^2$. Wir finden zunächst $\partial_t F(t,x) = 2t(x^2\exp(t^2x^2)+1)$ und $\partial_x F(t,x) = 2xt^2\exp(t^2x^2)$. Gesucht sind nun alle Lösungen zu $xt^2x' + t(x^2 + \exp(-x^2t^2)) = 0$ so dass $x(1) = x_0 \in \mathbb{R}$. Wir stellen zunächst fest, dass für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto 2\exp(t^2x^2)$ positiv ist. Multiplikation der Differentialgleichung mit dieser Funktion liefert nun $2xt^2\exp(t^2x^2)x' + 2t(x^2\exp(t^2x^2)+1) = 0$ oder aber, durch die Funktion F ausgedrückt, $\partial_x F(t,x)x' + \partial_t F(t,x) = 0$. Mithin ist F eine Stammfunktion der Differentialgleichung, diese also durch den integrierenden Faktor μ exakt geworden. Mithin erfüllt jede Lösung $x : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $d_t F(t,x(t)) = 0$, d.h., es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass die implizite Darstellung der Lösung gegeben ist durch $F(t,x(t)) = c$. Wegen $x(0) = x_0$ finden wir $F(t=1, x(1)=x_0) = \exp(1^2 \cdot x_0^2) + 1^2 = 1 + \exp(x_0^2)$, so dass die Lösung implizit gegeben ist durch $\exp(x(t)^2t^2) + t^2 = 1 + \exp(x_0^2)$. Dies können wir nach $x(t)^2$ auflösen $x(t)^2 = t^{-2}\ln(1+\exp(x_0^2)-t^2)$, so lange $t \in (-\sqrt{\exp(x_0^2)}, \sqrt{\exp(x_0^2)}) \setminus \{0\}$. Wegen $\exp(x_0^2) \geq 1$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ finden wir, dass das offene Lösungsintervall gegeben ist durch $I_{x_0} = (0, \sqrt{\exp(x_0^2)})$, da dann auch $1 \in I_{x_0}$. Wir definieren nun:

$$\lambda_{x_0\geq 0} : I_{x_0} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{\ln(1+\exp(x_0^2)-t^2)}/t \tag{89}$$

$$\lambda_{x_0\leq 0} : I_{x_0} \to \mathbb{R}, t \mapsto -\sqrt{\ln(1+\exp(x_0^2)-t^2)}/t. \tag{90}$$

Insbeondere sehen wir, dass zum Startwert $x_0 = 0$ zwei Lösung existieren. Es gilt für jedes x_0: $\limsup_{t\to 0^+} |\lambda_{x_0}| = \infty$ und für jedes x_0: $\lim_{t\to\exp(x_0^2/2)^-} |\lambda_{x_0}(t)| = 0$ aber $\lim_{t\to\exp(x_0^2/2)} |\lambda'_{x_0}(t)| = \infty$, so dass die Ableitung an dieser Stelle nicht definiert ist. Insofern haben wir auch keine Chance, die Lösungen C^1-regulär über $\exp(x_0^2/2)$ hinaus fortzusetzen. Wegen $\exp(x_0^2/2)$ ist $|I_{x_0}| = \exp(x_0^2/2) < \infty$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und die Lösungen existieren maximal auf einem endlichem Intervall.

Aufgabe 9 Sei $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachte das Anfangswertproblem $x'(2x^3 + 2x + 2xt^2) = -2t^3 - 2x^2t$. Wir definieren $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto 2x^3 + 2x + 2xt^2$

und $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto 2t^3 + 2x^2t$. Die Funktionen sind auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^2$ definiert und auf dem ganzen Definitionsbereich $\mathcal{C}^1$-regulär. Ferner gilt $\partial_t p(t,x) = 4xt$ sowie $\partial_x q(t,x) = 4xt$, also $\partial_t p(t,x) = \partial_x q(t,x)$. Die Differentialgleichung von oben ist gerade $p(t,x)x' + q(t,x) = 0$ und, da die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, gibt es eine Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto F(t,x)$ so dass $\partial_t F(t,x) = q(t,x)$ und $\partial_x F(t,x) = p(t,x)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Wir behaupten, dass vermöge $F(t,x) = x^4/2 + x^2 + x^2t^2 + t^4/2$ eine solche Stammfunktion definiert ist. In der Tat gilt $\partial_x F(t,x) = 2x^3 + 2xt^2 + 2x = p(t,x)$ und $\partial_t F(t,x) = 2tx^2 + 2t^3 = q(t,x)$ für beliebiges $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Mithin ist die zu betrachtende Differentialgleichung exakt und für eine Lösung $\lambda_{\tau,\xi} : I_{\tau,\xi} \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda_{\tau,\xi}(t)$ des Anfangswertproblems $p(t,x)x' + q(t,x) = 0$, $x(\tau) = \xi$ gilt: $F(t, \lambda_{\tau,\xi}(t)) = c \in \mathbb{R}$ mit einer konstanten c. Wir setzen nun $c = F(\tau,\xi)$ und lösen $F(t,\lambda_{\tau,\xi}(t)) = F(\tau,\xi)$ nach $\lambda_{\tau,\xi}(t)$ auf. Es gilt:

$$\lambda_{\tau,\xi}(t)^4 + 2\lambda_{\tau,\xi}(t)^2(1+t^2) + t^4 = \xi^4 + 2(1+\tau^2)\xi^2 + \tau^4. \tag{91}$$

Wir lösen die bi-quadratische Gleichung zunächst nach $\lambda_{\tau,\xi}(t)^2$ auf. Das liefert uns die zwei Möglichkeiten

$$\begin{aligned}
\lambda_{\tau,\xi}(t)^2 &= \frac{-2(1+t^2) + \sqrt{4(1+t^2)^2 - 4(t^4 - F(\tau,\xi))}}{2} && (92)\\
&= -(1+t^2) + \sqrt{1+2t^2+F(\tau,\xi)}, && (93)\\
\lambda_{\tau,\xi}(t)^2 &= \frac{-2(1+t^2) - \sqrt{4(1+t^2)^2 - 4(t^4 - F(\tau,\xi))}}{2} && (94)\\
&= -(1+t^2) - \sqrt{1+2t^2+F(\tau,\xi)}. && (95)
\end{aligned}$$

Wegen $F(t,x) = t^4/2 + (1+t^2)x^2 + x^2/2 \geq 0$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ und $-(1+t^2) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ scheidet die zweite Möglichkeit für $\lambda_{\tau,\xi}(t)^2$ aus: Wir können keine reellwertige Lösung für $t \neq 0$ erhalten, da eine negative Zahl radiziert werden muss. Also finden wir durch Radizieren der ersten Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
\lambda^+_{\tau,\xi}(t) &= \sqrt{\sqrt{1+2t^2+F(\tau,\xi)} - (1+t^2)}, && (96)\\
\lambda^-_{\tau,\xi}(t) &= -\sqrt{\sqrt{1+2t^2+F(\tau,\xi)} - (1+t^2)}. && (97)
\end{aligned}$$

Wir stellen zuerst fest, dass für $t = \tau$ gilt $(1+\tau^2 \geq 1)$

$$\begin{aligned}
\lambda^+_{\tau,\xi}(\tau) &= \sqrt{\sqrt{((1+\tau^2)+\xi^2)^2} - (1+\tau^2)} = \sqrt{\xi^2} = |\xi|, && (98)\\
\lambda^-_{\tau,\xi}(\tau) &= -\sqrt{\sqrt{((1+\tau^2)+\xi^2)^2} - (1+\tau^2)} = -\sqrt{\xi^2} = -|\xi|. && (99)
\end{aligned}$$

Nun ist noch zu bestimmen, wann durch obigeAusdrücke tatsächlich eine Lösung erklärt ist. Es muss dazu der Ausdruck unter der äußeren Wurzel nicht-negativ sein. Der in der inneren Wurzel wurde bereits weiter oben als stets nicht-negativ bemerkt. Wir haben als Bedingung $\sqrt{1+2t^2+F(\tau,\xi)} \geq (1+t^2)$, also $1+2t^2 \geq (1+t^2)^2 - F(\tau,\xi)$, was die Ungleichungsäquivalenz

$$1+2t^2 \geq 1+2t^2+t^4 - F(\tau,\xi) \Leftrightarrow t^4 \leq F(\tau,\xi) \Leftrightarrow -\sqrt[4]{F(\tau,\xi)} \leq t \leq \sqrt[4]{F(\tau,\xi)} \tag{100}$$

liefert, wobei $F \geq 0$ als Funktion beachtet wurde. Allerdings ist $\lambda^+_{\tau,\xi}$ und $\lambda^-_{\tau,\xi}$ bei $t = \pm\sqrt{F(\tau,\xi)}$ nicht differenzierbar, d.h., kann an dieser Stelle die Differentialgleichng nicht erfüllen. Wir finden somit, dass:

- $\xi > 0$*:* Das Anfangswertproblem besitzt die Lösung $\lambda^+_{\tau,\xi} : (-\sqrt[4]{F(\tau,\xi)}, \sqrt[4]{F(\tau,\xi)}) \to \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{\sqrt{1+2t^2+F(\tau,\xi)} - (1+t^2)}$.
- $\xi < 0$*:* Das Anfangswertproblem besitzt die Lösung $\lambda^+_{\tau,\xi} : (-\sqrt[4]{F(\tau,\xi)}, \sqrt[4]{F(\tau,\xi)}) \to \mathbb{R}, t \mapsto -\sqrt{\sqrt{1+2t^2+F(\tau,\xi)} - (1+t^2)}$.
- $\xi = 0, \tau = 0$*:* In diesem Fall gibt es wegen $F(\tau,\xi)$ keine Lösung auf einem nicht-verschwindenden Existenzintervall.
- $\xi = 0, \tau \neq 0$*:* In diesem Fall gibt es keine Lösung, die den Anfangswert mit beinhaltet: $\sqrt[4]{F(\tau,0)} = \tau \notin (\sqrt[4]{F(\tau,0)}, \sqrt[4]{F(\tau,0)})$.

Bezeichne das Existenzintervall mit $I_{\tau,\xi}$. Wir stellen fest, dass bei $t_\partial \in \{\pm\sqrt{F(\tau,\xi)}\}$ jeweils $\lim_{I_{\tau,\xi}\ni t\to t_\partial} \lambda^+_{\tau,\xi}(t) = 0$ bzw. $\lim_{I_{\tau,\xi}\ni t\to t_\partial} \lambda^-_{\tau,\xi}(t) = 0$ gilt – die Lösungen sind also endlich am Rand der Existenzintervall, nur die Nicht-Existenz der Ableitung am Rand schränkte das Existenzintervall ein. Ferner sind $\lambda^\pm_{\tau,\xi}$ auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbar, insbesondere also stetig. Da $I_{\tau,\xi} \cup \partial I_{\tau,\xi} \subsetneq \mathbb{R}$ kompakt, liefert uns das Maximumsprinzip für stetige Funktionen einer Variablen die Beschränktheit von $\lambda^\pm_{\tau,\xi}$ für $\xi \in \mathbb{R}^\times$.

Aufgabe 10 Sei $L \in \mathbb{R}$ und betrachte die Differentialgleichung $(1-x^2)y' - 2xy' + Ly = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Wir suchen mittels Potenzreihenansatz eine Lösung. Setze $y = \sum_{k=1}^\infty a_k x^k$, wo $a_0 = 0$ bereits wegen der Bedingung $y(0) = 0$ gesetzt wurde. Differentiation und Einsetzen liefert nach Koeffizientenvergleich für den Koeffizienten der Potenz x^k:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k - k(k-1)a_k + La_k = 0. \tag{101}$$

für $k \geq 0$. Zusammen mit $b_1 = 1$ wegen $y'(0) = 0$ erhalten wir $a_{2j} = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und die Relation:

$$a_{2k+3} = a_{2k+1}\frac{(2k+1)(2k+2) - L}{(2k+3)(2k+2)} \tag{102}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Im Falle $L = (2K+1)(2K+2)$ für ein $K \in \mathbb{N}_0$, so ist $a_{2K+3} = 0$ und wir erhalten ein Polynom vom Grad $2K+1$, das die Differentialgleichung auf ganz $\mathbb{R}$ löst. Andernfalls finden wir wegen $a_{2k+3}/a_{2k+1} \to 1$ für festes aber beliebiges L im Limes $k \to \infty$, dass die Teilfolge $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Reihe mit Konvergenz-Radius 1 definiert. Die Koeffizienten a_{2k}, $k \in \mathbb{N}_0$ verschwinden alle, so dass wir sie nicht weiter beachten müssen. Insofern erhalten wir in jedem Fall eine auf $(-1,1)$ absolut konvergente Reihendarstellung der Lösung der Differentialgleichung. Da die Ausgangs-Differentialgleichung gerade eine lineare Differentialgleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten ist, normieren wir

$$y''(x) + \frac{-2x}{1-x^2}y(x) + \frac{L}{1-x^2}y(x) = 0, \tag{103}$$

so dass uns der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungen die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung auf demjenigen Intervall I liefert, auf dem Koeffizienten $-2x/(1-x^2)$ und $L/(1-x^2)$ stetig sind und das die 0 enthält. Das ist gerade das Intervall $I=(-1,1)$.

Aufgabe 11 Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem gegeben durch das System von lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizientenfunktionen:

$$y_1' = \frac{y_1}{2(1+t)} \;\&\; y_2' = \frac{t}{t^2-1}y_2 + \alpha y_1 \tag{104}$$

und $(y_1(0), y_2(0)) = (2,1)$. Die Lösung soll für den Fall $\alpha = 1$ erfolgen, indem zuerst der entkoppelte Fall, $\alpha = 0$, betrachtet wird. Bezeichnen wir die gesuchten Lösungen im entstehende Anfangswertproblem also mit z_1, z_2 so ist:

$$z_1' = \frac{z_1}{2(1+t)} \;\&\; z_2' = \frac{t}{t^2-1}z_2. \tag{105}$$

Die erste der beiden Differentialgleichungen hat eine linear beachränkte Seite und eine eine eindeutige maximale Lösung auf derjenigen Zusammenhangskomponente I des Stetigkeitsbereichs der durch $t \mapsto 1/(2(1+t))$ erklärten Koeffizientenfunktion, welche den Startzeitpunkt $t=0$ enthält. Also $I=(-1,\infty)$. Die zweite Differentialgleichung hat ebenfalls eine linear beschränkte rechte Seite, wenn wir uns auf $J=(-1,1)$ beschränken. Dieses Intervall enthält insbesondere den Startzeitpunkt $t=0$. Das System von Differentialgleichungen ist also auf $D=(-1,1)\times\mathbb{R}^2$ zu betrachten und hat dort nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine auf $K=(-1,1)$ definierte, eindeutige maximale Lösung. Wir finden als allgemeine Lösung, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ frei wählbar:

$$z_1(t) = c_1 \cdot \sqrt{|1+t|}, z_2(t) = c_2\sqrt{|t^2-1|} = c_2 \cdot \sqrt{1-t^2|}, \tag{106}$$

durch Separation der Variablen. Für $t \in (-1,1)$ fallen die Betragsstriche weg und wir finden $z_1(t) = 1/(1(1+t))z_1(t)$ sowie $z_2(t) = t/(t^2-1)z_2(t)$ für $t \in (-1,1)$. Also haben wir tatsächlich eine Lösung gefunden. Da $z_1(t) = y_1(t)$, finden wir $c_1 = 2^{1/2}$ Indem wir Variation der Konstanten anwenden, finden wir nun im Falle $\alpha = 1$:

$$\sqrt{1-t^2}c_2'(t) = \sqrt{2}\sqrt{t+1}, \tag{107}$$

also $c_2'(t) = \sqrt{2}\sqrt{1-t}^{-1}$, so dass $c_2(t) = -\sqrt{2}^3\sqrt{1-t}+c$. Indem wir nun $y_2(t) = (-\sqrt{2}^3\sqrt{1-t}+c)\sqrt{1-t^2}$ ansetzen, finden wir aus $y_2(0)=1$, dass $c = 2^{3/2}+1$. Somit finden wir die maximale Lösung des Anfangswertproblems durch $y_1 : (-1,1) \to \mathbb{R}, t \mapsto y_1(t)$ und $y_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}, t \mapsto y_2(t)$, wobei

$$y_1(t) = \sqrt{2}\sqrt{t+1} \;\&\; y_2(t) = (\sqrt{2}^3(1-\sqrt{1-t})+1)\sqrt{1-t^2}. \tag{108}$$

Aufgabe 12 Gegeben sei nun eine nilpotente Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ mit $A^k = 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m > k$. Zu zeigen ist, dass für eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = Ay$ die Asymptotik $\lim_{t\to\infty} \|y(t)\|/t^m = 0$ gilt. Sei $l \in \mathbb{N}_0$ der Nilpotenzgrad der Matrix A. Es gilt $l \leq k$. Ferner ist durch $t \mapsto Ay$ für eine C^1-Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion $y' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ erklärt. Wir sehen also induktiv, das die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ insbesondere glatt ist, denn es ist bereits $y' = Ay$ C^1 und für $q \in \mathbb{N}$ gilt $y^{(q)} = (y^{(q-1)})'$, so dass, unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung $y^{(q-1)} = A^{q-1}y$, infolge der Konstanz der Matrix A gilt $y^{(q)} = A^q y$, also wieder eine C^1-Funktion resultiert. Insgesamt existieren somit alle Ableitungen von y und sind stetig. y ist also glatt. Nun gilt auf jeden Fall $A^k = 0$ nach Voraussetzung und somit $A^m = 0$ für alle $m \geq k$. Für die k-te Ableitung von y gilt folglich $y^{(k)} = A^k y = 0 \cdot y = 0$. Damit gibt es Vektoren $v_0, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$y(t) = \sum_{f=0}^{k} v_f t^f. \tag{109}$$

Nun gilt für $t > 1$ nach Dreiecksungleichung:

$$0 \leq \frac{\|y\|}{t^m} \leq \sum_{f=0}^{k} \frac{\|v_f\|}{t^{m-k}} \leq \frac{\sum_{l=0}^{k} \|v_f\|}{t} \xrightarrow{t\to\infty} 0. \tag{110}$$

Die Annahme, dass $t > 1$ ist erlaubt, da uns nur die Asymptotik im Limes $t \to \infty$ interessiert. $\square$

Aufgabe 13 Gesucht sind alle reellen Lösung der Differentialgleichung $y'' + 3y' = \exp(4t)$. Wir substituieren zunächst $z = y'$ und erhalten $z' + 3z = \exp(4t)$. Dies ist eine linear Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Inhomogenität für z. Laut Existenz- und Eindeutigkeitstheorie für lineare skalare Differentialgleichungen existiert somit bei Vorgabe eines Anfangswerts $z(\tau) = \xi$ für $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Da wir keinen Anfangswert vorgegeben haben, bestimmen wir die allgemeine Lösung. Für das homoegen Problem stellen wir fest, dass $z_C(t) = C \exp(-3t)$ für $C \in \mathbb{R}$ eine allgemeine Lösung $z_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto z_C(t)$ definiert. Durch Variation der Konstanten finden wir, dass

$$z_p(t) = \exp(-3t) \int_0^t \exp(3\tau) \exp(4\tau) d\tau = \left(\frac{\exp(4t)}{7} - \frac{\exp(-3t)}{7} \right) \tag{111}$$

eine partikuläre Lösung des Differentialgleichung $z' + 3z = \exp(4t)$ definiert, $z_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto z_p(t)$. Denn es gilt $z_p'(t) + 3z_p(t) = (4+3)/7 \exp(4t) + (-3+3)/7 \exp(-3t) = \exp(4t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung des Hilfsproblems $z' + 3z = \exp(4t)$ lautet also mit beliebigem $C \in \mathbb{R}$, $\lambda_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda(t)$

$$\lambda_C(t) = C \exp(-3t) + 7^{-1} \exp(4t). \tag{112}$$

Nun bestimmen wir die allgemeine Lösung von $y'' + 3y' = \exp(4t)$, indem wir die zweite Differentialgleichung $y' = z$ durch elementare unbestimmte Integration lösen, wobei $z = \lambda_C$. Das liefert

$$y(t) = C' \exp(-3t) + \frac{\exp(4t)}{28} + C'', \tag{113}$$

wobei $C', C'' \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung $\mu_{C',C''} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto C' \exp(-3t) + \exp(4t)/28 + C''$ lebt also, wie von einer lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung erwartet, in einem zwei-dimensionalen affiner Raum von Funktionen. $\square$

Aufgabe 14 Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit $x(0) = v$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \& \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{114}$$

Gesucht ist zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wir berechnen hierzu zunächst die Eigenwerte der Matrix A. Für das charakteristische Polynom gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(z) = \det(A - zE_3) &= \det\left(\begin{pmatrix} -z & 1 & -1 \\ -2 & 3-z & -1 \\ -1 & 1 & 1-z \end{pmatrix}\right) && (115) \\ &= (-z)(3-z)(1-z) + 1 + 2 - (3-z) + z + 2(1-z) && (116) \\ &= (z^2 - 3z + 2)(1-z) && (117) \\ &= -(z-1)^2(z-2). && (118) \end{aligned}$$

Hiermit sehen wir, dass das charakteristische Polynom der Matrix A die zwei Nullstellen $\lambda_+ = 1$ und $\lambda_- = 2$ hat. Da $\mu_a(\lambda_+) + \mu_a(\lambda_-) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ sind dies auch alle Eigenwerte von A. Wir bestimmen nun die, ggf. verallgemeinerten Eigenvektoren von A. Es gilt

- *Fall 1:* $\lambda_- = 2$*:* Wir müssen eine Basis von $\ker(A - \lambda_- E_3)$ finden. Es gilt $v_- \in \ker(A - \lambda_- E_3) \Leftrightarrow Av_- = \lambda_- v_+$, also

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{119}$$

  Damit finden wir $v_- = (0, 1, 1)^T$ als mögliche Wahl, denn $\ker(A - \lambda_- E_3) = \text{lin}((0, 1, 1)^T)$.

- *Fall 2:* $\lambda_+ = 1$*:* Wir benötigen einen Basis für den Eigenraum zum zweifachen Eigenwert $\lambda_+ = 1$. Einsetzen liefert zunächst mit $v_+ \in \ker(A - \lambda_+ E_3) \Leftrightarrow$

$Av_+ = \lambda_+ v_+$, dass

$$\begin{array}{rrr|r}
-1 & 1 & -1 & 0 \\
-2 & 2 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0
\end{array} \tag{120}$$

Der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems ist also lediglich eindimensional, so dass $\mu_g(\lambda_+ = 1) < \mu_a(\lambda_+ = 1)$. Wir finden also lediglich einen Eigenvektor $v_+ = (1,1,0)^T$. Daher ist die Matrix A laut Linearer Algebra nicht diagonalisierbar. Zumindest können wir aber die Jordansche Normalform bestimmen. Da $\mu_g(\lambda_+ = 1) = 1$, gibt es nur ein Jordan-Kästchen der Größe 2 zum Eigenwert $\lambda_+ = 1$, so dass die Jordan-Normalform von A, J_A, lautet

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{121}$$

Die dazugehörige Ähnlichkeitstransformation $J_A = TAT^{-1}$ bestimmen wir nach dem gewohnten Algorithmus. Es ist

$$(A - \lambda_+ E_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{122}$$

Wir stellen also fest, dass $\dim\ker((A - \lambda_+ E_3)^2) = 2$ und genauer sind $w_1 = (0,0,1)^T$ und $w_2 = (1,1,0)^T$ zwei linear unabhängige Lösungen des Linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_+ E_3)^2 w = 0$. Nun gilt $w_2 = v_+$, also insbesondere $w_2 \in \ker(A - \lambda_+ E_3)$. Wir wählen also $w_+ = (0,0,1)^T$ und berechnen $w_{++} = (A - \lambda_+ E_3) w_+ = (-1,-1,0)^T$. Damit finden wir $T = (w_+ | w_{++} | v_-)$, also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{123}$$

Die inverse Matrix dazu berechnen wir mittels Gauss-Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array} \tag{124}$$

Damit finden wir

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{125}$$

Insgesamt finden wir also nach der Lösungsformel für lineare Systeme erster Ordnung mit nicht-diagonalisierbarer aber konstanter Koeffizienten-Matrix und den bekannten Rechenregeln für Matrix-Exponentiale, für die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = v$

$$\begin{aligned}
x_s(t) &:= \exp(At)v \\
&= T \exp(J_A t) T^{-1} v \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^t - 2te^t \\ -2e^t \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-2t)e^t \\ 2e^t - e^{2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das definiert nun die spezielle Lösung $x_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto x_s(t)$. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $x_{a;c_1,c_2,c_3} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto x_{a;c_1,c_2,c_3}(t)$, wobei

$$x_{a;c_1,c_2,c_3}(t) = \begin{pmatrix} (c_1 - c_2 t + c_3 t)\exp(t) \\ c_3 \exp(2t) + (c_2 - c_3)\exp(t) \\ c_3 \exp(2t) \end{pmatrix} \tag{126}$$

und $x(0) = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3$ gewählt wurde, um die Parameter $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ geeignet zu interpretieren. Test für $(c_1, c_2, c_3)^T = (1, 1, -1)^T$ bestätigt die Rechnung für die spezielle Lösung von weiter oben. $\square$

Aufgabe 15 Gegegben ist das ebene autonome System

$$\dot{x} = 8x + 10y,\ \dot{y} = -5x - 6y. \tag{127}$$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems. Dazu definieren wir $z := (x, y)^T$ und die Matrix $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}. \tag{128}$$

Das Differentialgleichungssystem hat also die Form $\dot{z} = Az$. Mithin handelt es sich um ein System von zwei linearen, homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanter Koeffizientenmatrix. Der Lösungsraum ist daher ein zweidimensionaler Vektorraum $\mathcal{L}$ über $\mathbb{R}$, bestehend aus Lösungen der Form $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme. Um diese explizit anzugeben, berechnen wir Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Definiere das charakteristische Polynom $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_2)$. Explizit gilt $\chi_A(z) = (8 - z)(-6 - z) - 10 \cdot (-5) = z^2 - 2z + 2$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bzw. der Ordnung sind laut Linearer Algebra gerade die Eigenwerte bzw. die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte von A. Wir finden vermöge Mitternachtsformel, $z_1 = 1/2(2+\sqrt{4 - 4 \cdot 2}) = 1+i$ und $z_2 = 1/2(2-\sqrt{4 - 4 \cdot 2}) = 1-i$. Damit haben wir zwei verschiedene, einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms gefunden, korrespondierend zu Eigenwerten $z_1 = 1 + i, \mu_a(z_1) = 1$ und $z_2 = 1-i, \mu_a(z_2) = 1$. Wegen $1 \leq \mu_g(z_k) \leq \mu_a(z_k)$ für $1 \leq k \leq 2$, ist $\mu_g(z_k) = 1$, d.h., insbesondere stimmt die geometrische mit der algebraischen Vielfachheit überein, weswegen laut Linearer Algebra A diagonalisierbar ist. Wir berechnen nun die Eigenvektoren zu einem der beiden, zueinander komplex konjugierten Eigenwerte. Wir müssen $\ker(A - z_1E_2)$ bestimmen. Wir rechnen mittels Gauss

$$\begin{array}{cc|c} 7-i & 10 & 0 \\ -5 & -7-i & 0 \\ \hline 2-i & 3-i & 0 \\ -5 & -7-i & 0 \\ \hline 2-i & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}, \tag{129}$$

denn $-5 = -(2 + i)(2 - i)$ und $-7 - i = -(2 + i)(3 - i)$. Wir finden also

$$v_1 = \begin{pmatrix} -(7+i)/5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2. \tag{130}$$

Wir sehen, dass $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(t)\exp(it)(7 + i, -5)^T$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Aus der Vorlesung zur gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass dann Real- und Imaginärteil von μ ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung sind. Wir finden $\lambda_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \Re[\mu(t)], \lambda_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \Im[\mu(t)]$ und explizit

$$\lambda_r(t) = \exp(t)(7\cos(t) - \sin(t), -5\cos(t))^T \tag{131}$$

$$\lambda_i(t) = \exp(t)(\cos(t) + 7\sin(t), -5\sin(t))^T. \tag{132}$$

Damit können wir die Wronski-Determinante bei $t = 0$ evaluaieren, um festzustellen, ob λ_r, λ_i zwei linear unabhängige Lösungen sind. Es gilt

$$W[\lambda_r, \lambda_i](0) = \det\left(\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\right) = 5 \neq 0. \tag{133}$$

Laut einem Vorlesungsresultat sind also λ_r, λ_i über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Lösungen des autonomen Systems. Damit spannen sie aus Dimensionsgründen den zwei-dimensionalen Lösungsraum $\mathcal{L}$ auf und wir finden

$$\Psi \in \mathcal{L} \leftrightarrow \exists(c_1, c_2) \in \mathbb{R} : \Psi(t) = c_1\lambda_1(t) + c_2\lambda_2(t). \tag{134}$$

Da A zwei nicht-verschwindende Eigenwerte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ hat, ist A invertierbar, $(0,0)^T$ also die einzige Gleichgewichtslösung des Systems. Da $\Im[z_k] \neq 0$ für $1 \leq k \leq 2$, aber $\Re[z_k] = 1 > 0$ handelt es sich um einen instabilen Strudel aus dem Ursprung des $x - y$-Koordinatensystems heraus. $\square$

Aufgabe 16 Gegeben sei die Matrix $A \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{135}$$

Wir suchen zunächst ein Fundamentalsystem von Lösungen für die homogene Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Dazu bestimmen wir vermöge des charaketeristischen Polynoms $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$ die Eigenwerte von A,

$$\chi_A(z) = \det\left(\begin{pmatrix} -z & 1 & 2 \\ 1 & -z & 1 \\ 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix}\right) = -(z^2 - 1)(z - 1). \tag{136}$$

Wir sehen also, dass A den Eigenwerte $z_1 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit $\mu_a(z_1) = 1$, und damit auch geometrischer Vielfachheit $\mu_g(z_1) = 1$, hat. Ferner hat A den Eigenwert $z_2 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\mu_a(z_2) = 2$. Wir müssen also untersuchen, ob $\mu_g(z_2) = 1$ oder $\mu_g(z_2) = 2$ ist, um herauszufinden, ob A diagonalisierbar ist. Hierzu berechnen wir einen Basisvektor für $\ker(A - z_2E_3) = \mathrm{Eig}(A, z_2) = \mathrm{Eig}(A, z_z, 1)$. Gauss-Algorithus liefert:

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0, \end{array} \tag{137}$$

so dass wir mit $v = (1,1,0)^T \in \ker(A - z_2E_3)$ einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor in $\mathrm{Eig}(A, z_2, 1) = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(v)$ gefunden haben. Das Lineare Gleichungssystem liefert ferner, nach Dimensionsformel, dass der Lösungsraum eindimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Da nun $\mu_g(z_2) = \dim\ker(A - z_2E_3) = 1 < 2 = \mu_a(z_2)$

ist A nicht diagonalisierbar und die Jordan'sche Normalform ist zu bestimmen. Wir rechnen

$$(A - z_e E_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{138}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{139}$$

Wir sehen, dass die ersten beiden Zeilen linear abhängig sind, die dritte Zeile die Nullzeile ist. Wir finden also die beiden Basisvektoren

$$w_1 = (1,1,0)^T \, , \, w_2 = (1,0,2)^T, \tag{140}$$

wobei wir für das weitere Vorgehen $w_1 \in \mathrm{Eig}(A, z_2, 1)$ ausschließen können. Setze nun $w_2 \equiv v_2$ und ferner $v_1 = (A - z_2 E_3) v_2$, sodass

$$v_1 = (3,3,0)^T \in \ker(A - z_2 E_3). \tag{141}$$

Zu guter Letzt benötigen wir noch einen Eigenvektor aus $\mathrm{Eig}(A, z_1 = -1)$. Dazu wenden wir wieder den Gauss-Algorithmus an, um $\ker(A - z_1 E_3)$ zu untersuchen

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}. \tag{142}$$

Wir sehen, dass durch $v_3 = (1,-1,0)^T$ eine nicht-verschwindende Lösung des Lineare Gleichungssystems gegeben ist, die als Basisvektor für $\mathrm{Eig}(A, z_1) = \ker(A - z_1 E_3)$ fungiert. Die Transformationsmatrix T, vermöge derer A über $J_A = T^{-1} A T$ in Jordan-Normalform J_A gebracht wird, lautet also $T = (v_1, v_2, v_3)$ bzw.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{143}$$

Die Inverse Matrix T^{-1} berechnen wir wiederum mittels Gauss-Algorithmus:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\
\hline
0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -0.5 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0.5 & -0.5 & -0.25 \\
3 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.25 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0.5 & -0.5 & -0.25 \\
1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & -1/12 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & -1/12 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/4
\end{array}
\tag{144}
$$

Damit ist die Inverse Matrix T^{-1} gegeben durch

$$
T^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}. \tag{145}
$$

Für die Jordan-Normalform finden wir aus $J_A = T^{-1}AT$, dass

$$
J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{146}
$$

Nun berechnen wir

$$
\exp(tA) = T\exp(tJ_A)T^{-1} \tag{147}
$$

$$
= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(t) & t\exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}. \tag{148}
$$

Ein Fundamentalsystem erhalten wir durch Definition von

$$
\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \exp(tA)\hat{e}_1 \tag{149}
$$

$$
\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \exp(tA)\hat{e}_2 \tag{150}
$$

$$
\Phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \exp(tA)\hat{e}_3, \tag{151}
$$

wobei

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\exp(t) \\ 0 \\ 6\exp(-t) \end{pmatrix} \tag{152}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{153}$$

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\exp(t) \\ 0 \\ -6\exp(-t) \end{pmatrix} \tag{154}$$

$$= \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{155}$$

$$\Phi_3(t) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6t\exp(t) - \exp(t) \\ 6\exp(t) \\ -3\exp(-t) \end{pmatrix} \tag{156}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.5t\exp(t) + 0.5\sinh(t) \\ 1.5t\exp(t) - 0.5\sinh(t) \\ \exp(t) \end{pmatrix}. \tag{157}$$

Nun konkretisieren wir auf das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax + b, x(0) = (0,0,0)^T$. Wir finden eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems durch $x_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definiert durh $x_s(t) = (0,-1,0)$. Denn $\dot{x}_s = (0,0,0)^T$ und $Ax_s + b = (-1,0,0)^T + (1,0,0)^T = (0,0,0)^T$. Offenbar, $x_s(t=0) = (0,-1,0)$. Wir suchen daher eine Lösung des homogenen Anfangswertproblems mit $\dot{x}_h = Ax_h$, $x_h(0) = -x_s(0) = (0,1,0)^T$. Indem wir das Fundamentalsystem $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ genauer betrachten, stellen wir fest, dass dieses Anfangswertproblem durch $x_h(t) = \Phi_2(t)$ gelöst wird. Indem wir definieren $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$ erhalten wir eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b, x(0) = (0,0,0)^T$, nämlich

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) - 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{158}$$

□

Aufgabe 17 Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}^\times. \tag{159}$$

Wir behaupten: Sämtliche Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $x' = Ax$ sind periodisch genau dann wenn $\beta\gamma^{-1} \in \mathbb{Q}$. Zunächst stellen wir fest, dass A eine konstante 4×4-Matrix ist. Der Lösunsgraum des linearen homogenen Differentialgleichungssystems ist daher ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, bezeichnet mit $\mathcal{L}$. Für $\Psi \in \mathcal{L}$ gilt ferner, da A konstante Matrix ist, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$. Um nun den ersten Schritt abzuschließen, bestimmen wir ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems. Dazu bemerken wir, dass A eine Block-Diagonal-Matrix ist, d.h.,

$$A = \begin{pmatrix} M_\beta & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & M_\gamma \end{pmatrix}, \; M_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \epsilon \in \mathbb{R}, \tag{160}$$

und notieren das als $A = \operatorname{diag}(M_\beta, M_\gamma)$. Wir stellen fest, dass $A = A_\beta + A_\gamma$ mit $A_\beta = \operatorname{diag}(A_\beta, 0_{2\times 2})$, $A_\gamma = \operatorname{diag}(0_{2\times 2}, M_\gamma)$ und $[A_\beta, A_\gamma] \equiv A_\beta A_\gamma - A_\gamma A_\beta = 0_{4\times 4}$. Daher gilt für die Fundamentalmatrix in Standardbasis $\mathbf{\Phi}(t) \equiv \exp(tA)$

$$\mathbf{\Phi} = \exp(tA_\beta)\exp(tA_\gamma). \tag{161}$$

Wir finden zunächst, dass für $\epsilon \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$:

$$M_\epsilon^k = \begin{cases} \epsilon^k E_2 & k \equiv 0 \bmod (4) \\ \epsilon^{k-1} M_\epsilon & k \equiv 1 \bmod (4) \\ -\epsilon^k E_2 & k \equiv 2 \bmod (4) \\ -\epsilon^{k-1} M_\epsilon & k \equiv 3 \bmod (4) \end{cases}. \tag{162}$$

Zusammen mit $\exp(t0_{2\times 2}) = E_2$, und

$$\exp(tM_\epsilon) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (t\epsilon)^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (t\epsilon)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (t\epsilon)^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (t\epsilon)^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} \tag{163}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t\epsilon) & -\sin(t\epsilon) \\ \sin(t\epsilon) & \cos(t\epsilon) \end{pmatrix} \tag{164}$$

finden wir

$$\exp(tA_\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) & 0 & 0 \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{165}$$

$$\exp(tA_\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t\gamma) & -\sin(t\gamma) \\ 0 & 0 & \sin(t\gamma) & \cos(t\gamma) \end{pmatrix}. \tag{166}$$

Zusammen mit $\exp(tA) = \exp(tA_\beta)\exp(tA_\gamma)$ folgt für $\mathbf{\Phi}$, dass

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) & 0 & 0 \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t\gamma) & -\sin(t\gamma) \\ 0 & 0 & \sin(t\gamma) & \cos(t\gamma) \end{pmatrix}. \tag{167}$$

Die Spaltenvektoren der Fundamentalmatrix definieren nun ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems und wir können eine beliebige Lösung $\Psi \in \mathcal{L}$ ausdrücken als

$$\Psi(t) = \mathbf{\Phi}(t)(c_1, c_2, c_3, c_4)^T, \tag{168}$$

wobei $c \equiv (c_1, c_2, c_3, c_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Nun wenden wir uns dem Beweis der Aussage zu, der in der Aufgabe gefordert ist. Sei $\Psi(t) = \mathbf{\Phi}(t)c$ ($c \in \mathbb{R}^4$) beliebige aber periodische Lösung des eingangs genannten Differentialgleichungssystems. Da Ψ periodisch ist, existiert ein $T > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\Psi(t+T) = \Psi(t)$. Insbesondere finden wir für $c = (1, 0, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^4$, dass

$$\cos(\beta(t+T)) = \cos(\beta t),\ \sin(\beta(t+T)) = \sin(\beta t) \tag{169}$$

$$\cos(\gamma(t+T)) = \cos(\gamma t)\ \sin(\gamma(t+T)) = \sin(\gamma t). \tag{170}$$

Da Sinus und Cosinus-Funktion jeweils 2π-Periodisch sind, finden wir $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $\beta T = k_1 \cdot 2\pi$ und $\gamma T = k_2 \cdot 2\pi$. Da $\gamma \neq 0, T > 0$ gilt auf jeden Fall $k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Division der beiden Gleichungen liefert nun $(\beta T)/(\gamma T) = (2\pi \cdot k_1)/(2\pi \cdot k_2) = k_1/k_2 \in \mathbb{Q}$. Also gilt $\beta\gamma^{-1} = k_1 k_2^{-1} \in \mathbb{Q}$. Für die Umkehrung sei nun vorausgesetzt, dass $\beta\gamma^{-1} \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$, so dass gilt $\beta = \gamma t$. Sei nun $c \in \mathbb{R}^4$ beliebig, und $\Psi \in \mathcal{L}$ von der Form $\Psi(t) = \mathbf{\Phi}(t)c$ mit $\beta = q\gamma$. Sei $k \in \mathbb{N}$ definiert durch $k = \min\{n \in \mathbb{N} | nq \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Im Falle $q = 0$ setzen wir $k = 1$. Dann gilt

$$\Psi(t + 2\pi k\gamma^{-1}) = \Psi(t), \tag{171}$$

denn falls $q = 0$, ist $\beta = 0$ und wir haben nur die periodischen Funktionen $\cos(\gamma t), \sin(\gamma t)$ in der dritten und vierten Komponente von Ψ übrig. Diese sind mit $k = 1$ im Falle $q = 0$ periodisch und $2\pi k/\gamma = 2\pi/\gamma$ ist gerade die Periode dieser Funktionen. Im Falle $q \neq 0$ ist auch $k \geq 1$ und da $2\pi k\gamma^{-1}$ ein Vielfaches der Periode von $\cos(\gamma t), \sin(\gamma t)$ ist, können wir zumindest die Periodizität der Lösung in der dritten und viertem Komponente folgern. Für die ersten beiden Komponenten beachten wir, dass infolge $0 \neq \beta = q\gamma$, $0 \neq l = kq \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nach Definition von k gilt

$$\Psi(t + 2\pi k\gamma^{-1}) = \Psi(t + 2\pi(kq)/(q\gamma)) = \Psi(t + 2\pi l/\beta). \tag{172}$$

Da aber $2\pi l/\beta$ gerade ein Vielfaches der Periode von $\cos(\beta t), \sin(\beta t)$ ($\beta \neq 0$) ist, ist Ψ also auch in den ersten beiden Komponenten periodisch. Somit haben wir durch $T = 2\pi k/\gamma = 2\pi l/\beta$ mit den oben definierten Abkürzungen ein $T > 0$ gefunden, sodass die Periodizitätsbedingung $\Psi(t+T) = \Psi(t)$ in allen vier Komponenten erfüllt ist, zu festem aber beliebigen $c \in \mathbb{R}^4$. Da die Beliebigkeit von $c \in \mathbb{R}^4$ nach den eingangs angestellten Überlegungen äquiavlent ist zur Beliebigkeit von $\Psi \in \mathcal{L}$ haben wir somit nachgewiesen, dass alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ periodisch sind. Insgesamt haben wir somit die Äquivalenz bewiesen. $\square$

Aufgabe 18 Gegeben sei eine komplexe 2×2 Matrix A und ein lineares System von Differentialgleichungen von der Form $u' = Au$.
(a) Die triviale Lösung $u_0 \equiv 0$ ist stabil bei $t \to \infty$ genau dann wenn für die

Eigenwerte $\lambda \in \sigma(A)$ von A jeweils gilt $\Re[\lambda] \leq 0$ und $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$ für all diejenigen $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\Re[\lambda] = 0$, d.h., algebraische und geometrische Vielfachheit stimmen für Eigenwerte mit verschwindendem Realteil überein.
Beweis: Definiere das charakteristische Polynom $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_2)$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, hat χ entweder zwei Nullstellen oder eine Nullstelle der Vielfachheit 2. Bezeichne mit J_A die Jordan-Normalform von A und mit λ_1, λ_2 die beiden, nicht notwendigerweise verschiedenen Nullstellen von χ, falls A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist und mit λ, falls A nicht über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist. Es gilt also genau einer der Fälle:

$$J_A \in \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\}. \tag{173}$$

Sei $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die Matrix der Ähnlichkeitstransformation, die A in J_A überführt, d.h., es gilt $T^{-1}AT = J_A$. Wir finden für das Matrix-Exponential $\exp(tA)$ nun nach den Rechenregeln für das Matrix-Exponential

$$\exp(tA) \in \left\{ T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} T, T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} T \right\}. \tag{174}$$

Für den Anfangswert $u_0 = u(t_0)$ haben wir auch die allgemeine Lösungsformel

$$u(t) = \exp(tA)u_0. \tag{175}$$

Nach der Vorbereitung wenden wir uns dem Beweis der Aussage zu. "$\Rightarrow$". Sei die Nulllösung als stabil bei $t \to \infty$ vorausgesetzt und $\epsilon > 0$ beliebig. Ferner sei $u(t)$ Lösung der Differentialgleichung, so dass es ein zugehöriges δ mit $|u(0)| = |u_0| < \delta$ gibt, sodass gilt $|u(t)| < \epsilon$ für alle $t > 0$. Zu zeigen ist nun, dass für $\sigma(A)$ gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_0^-$ und dass jeder Eigenwert halbeinfach ist. Angenommen, es gäbe $\lambda \in \sigma(A)$, sodass $\Re[\lambda] > 0$. Da die Nulllösung $U_0 \equiv 0$ nach Voraussetzung stabil ist, existiert zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass aus $|u(0)| < \delta$ folgt $u(t) < \epsilon$ für alle $t > 0$. Andererseits gilt nach der Lösungsformel

$$u(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} Tu(0) \text{ oder } u(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} Tu(0). \tag{176}$$

Im jedem Fall bezeichne λ_1 den Eigenwert mit $\Re[\lambda_1] > 0$. Wir finden in der 1-Norm mittels der Dreiecksungleichung

$$|Tu(t)| \geq |\exp(\lambda_1 t)||Tu(0)| = \exp(t\Re[\lambda_1]t)|Tu(0)|. \tag{177}$$

Da auf dem $\mathbb{R}^2$ je zwei Normen äuivalent sind, können wir uns auf die Betrachtung der Ungleichung für $\|u(t)\| := |Tu(t)|$ beschränken, denn durch $\|.\| := |T.|$ ist wegen $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ebenfalls eine Norm erklärt. Für $u(0) \neq 0$ produzieren wir eine von der Nulllösung verschiedene Lösung. In diesem Fall $0 < |u(0)| < \delta$ und es gilt insbesondere $\|u(0)\| = \delta$, wobei wir in der $\|.\|$-Norm arbeiten. Ferner, $\|u(t)\| > 0$ infolge des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes $\|u(t)\| > 0$. Insgesamt finden wir also

$$\|u(t)\| \geq \exp(t\Re[\lambda_1])\delta. \tag{178}$$

Für $t > \log(\epsilon/(\delta\Re[\lambda_1]))$ gilt aber infolge der Monotonie der Exponentialfunktion $|u(t)| \geq \epsilon$. Dies ist ein Widerspruch zur Stabilität der Nulllösung, bei der für das in Rede stehende u aus der Existenz eines geeigneten $\delta > 0$ zu beliebigem $\epsilon > 0$ so dass $|u(0)| < \delta$ gerade $|u(t)| < \epsilon$ auch für $\max\{\log(\epsilon/(\delta\Re[\lambda_1])), 0\} < t$ folgt. Wir nehmen nun an, dass λ nicht einfach ist. Dann gilt, dass A nicht über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist und ferner

$$u(t) = \exp(tA)u(0) = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} Tu(0). \tag{179}$$

Die obige Diskussion hat bereits gezeigt, dass $\Re[\lambda] > 0$ zu einem Widerspruch zur Stabilität der Nulllösung führt. Wir können uns also auf $\Re[\lambda] = 0$ beschränken und zeigen, dass dieser Fall nicht auftreten kann. Wie oben schätzen wir ab:

$$|Tu(t)| \geq |t\exp(\lambda t)||Tu(0)| = |t||Tu(0)|. \tag{180}$$

Mit der Definition von $\|.\|$ wie oben folgt $\|u(t)\| \geq |t|$. Indem wir nun die Abschätzung für Zeiten $t > \epsilon/\delta$ anwenden, finden wir $|u(t)| \geq \epsilon$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\delta(\epsilon)$ infolge der Stabilität der Nulllösung gewählt war, dass die Implikation $|u(0)| < \delta \Rightarrow |u(t)| < \epsilon$ für alle $t > 0$, insbesondere also auch alle $t > \epsilon/\delta$ gilt. Also kann auch der Fall, dass $\Re[\lambda_1] = 0$ und der einzige Eigenwert von A nicht halb-einfach ist, nicht auftreten. Damit haben wir gezeigt, dass aus der Stabilität der Nulllösung für $t \to \infty$ die Bedingung an die Eigenwerte von A resultiert. "$\Leftarrow$". Sei nun umgekehrt die Bedingung an das Spektrum der Matrix A vorausgesetzt. Wir zeigen, dass unter diesem Voraussetzungen die Nulllösung stabil für $t \to \infty$ ist.

- *Fall 1: A diagonalisierbar.* In diesem Fall gilt

  $$u(t) = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} Tu(0). \tag{181}$$

  Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|u(\delta)| < \delta \Rightarrow |u(t)| < \epsilon$. In der Tat finden wir für $\delta = \epsilon/2$, dass gilt $\|u(t)\|$, wobei wiederum $\|v\| := |Tv|$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ die "Arbeits-"Norm ist. Nun gilt nach Dreiecks-Ungleichung

  $$0 \leq \|u(t)\| \leq (\exp(\Re[\lambda_1]t) + \exp(\Re[\lambda_2]t))\|u(0)\|. \tag{182}$$

  Die Stabilitätsbedingung in der $\|.\|$-Norm kann nun verifiziert werden: In der Tat $\|u(t)\| < (\exp(\lambda_1 t) + \exp(\lambda_2)t)\epsilon/2 \leq 2 \cdot \epsilon/2 = \epsilon$ für alle $t > 0$, da $\Re[\lambda_1], \Re[\lambda_2] \leq 0$ und somit $\exp(t\Re[\lambda_1]), \exp(t\Re[\lambda_2]) \leq 1$ für alle $t > 0$.

- *Fall 2: A nicht diagonalisierbar.* In diesem Fall gilt $\Re[\lambda] < 0$ für den einzigen Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$. Wir finden nun, dass

  $$Tu(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} Tu(0). \tag{183}$$

  Nach der Dreiecksungleichung $|Tu(t)| \leq (2 + |t|)\exp(\Re[\lambda]t)|Tu(0)|$ und nach Definition der (im $\mathbb{R}^2$ zu $|.|$ äquivalenten) $\|.\|$-Norm wie vorher, $\|u(t)\| \leq (2+$

$|t|)\exp(\Re[\lambda]t)\|u(0)\|$. Da $(2+x)/\exp(\alpha x) \to 0$ für $x \to \infty$ und beliebiges aber festes $\alpha < 0$, suchen wir nach einem Kandidaten für δ. Es gilt $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, t \mapsto (t+2)\exp(-|\Re[\lambda]|t)$ ist glatt auf dem Definitionsbereich. Es gilt $f > 0$ Die kritischen Punkte von f können bestimmt werden aus

$$0 \stackrel{!}{=} d_t f(t) \Leftrightarrow 0 = -|\Re[\lambda]|(2+t) + 1, \tag{184}$$

also $t = (1-2|\Re[\lambda]|)/|\Re[\lambda]|$. Für $|\Re[\lambda]| \leq 1/2$ setzen wir $t_0 = (1-2|\Re[\lambda]|)/|\Re[\lambda]|$ und für $|\Re[\lambda]| > 1/2$ setzen wir $t_0 = 0$. Dies sind dann die Maxima die Funktion f in $\mathbb{R}^+$ und es gilt $f(t_0) > 0$ wegen strikter Positivität von f. Wir finden nun $\|u(t)\| \leq f(t)\|u(0)\| \leq f(t_0)\|u(0)\|$ und setzen $\delta = (\epsilon+1)/f(t_0)$. Die Abschätzung von oben zeigt mit dieser Wahl von δ, dass die Nulllösung stabil für $t \to \infty$ ist.

(b) Die triviale Lösung $u_0 \equiv 0$ ist asymptotisch stabil genau dann wenn für die Eigenwerte $\lambda \in \sigma(A)$ von A jeweils gilt $\Re[\lambda] < 0$.
Beweis: Das ergibt sich direkt aus Grenzübergang $t \to \infty$ im Fall $\Re[\lambda] < 0$ aus dem obigen Beweis. □

Aufgabe 19 Gegeben sei das autonome System $x' = -x - y + 3$ und $y' = x^2 - 4y - 20$. Dieses System ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, mit $\mathcal{C}^1$-regulärer und damit lokal Lipschitz-stetiger rechter Seite. Wir finden zunächst die stationären Punkte des Systems. Diese sind Lösungen $(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des autonomen Systems und gekennzeichnet durch $d_t(x,y) = (0,0)$. Wir müssen also $0 = -x-y+3$ und $x^2-4y-20 = 0$ befriedigen. Umformen liefert $y = 3-x$ und damit $x^2 - 4(3-x) - 20 = 0$, d.h., $x^2+4x-32 = 0 = (x-4)(x+8)$. Damit finden wir, dass $(x = 4, y = 3-x = -1)$ und $(x = -8, y = 3-x = 11)$ stationäre Punkte des autonomen Systems sind. Wir untersuchen die Stabilität durch Linearisierung. Für die Jacobi-Matrix der $\mathcal{C}^1$-Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \to (-x-y+3, x^2-4y+20)$ gilt:

$$\mathrm{Jac}[F](x,y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2x & -4 \end{pmatrix}. \tag{185}$$

Damit finden wir für den stationären Punkt $(4,-1)$

$$M_1 \equiv \mathrm{Jac}[F](4,-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \tag{186}$$

und für den stationären Punkt $(-8,11)$ analog

$$M_2 \equiv \mathrm{Jac}[F](-8,11) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -16 & -4 \end{pmatrix}. \tag{187}$$

Für die Stabilität verwenden wir den Stabilisierungssatz für linearisierte Systeme und berechnen die Eigenwerte von M_1, M_2. Sei $\chi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(M_1 - zE_2)$ das charakteristische Polynom für M_1 und $\chi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(M_2 - zE_2)$ das zu M_2

gehörige charakteristische Polynom. Es gilt

$$\chi_1(z) = (-1-z)(-4-z) - (8)(-1) = z^2 + (4+1)z + 8 + 4 = z^2 + 5z + 12, \tag{188}$$

$$\chi_2(z) = (-1-z)(-4-z) - (-16)(-1) = z^2 + (4+1)z - 16 - 4 = z^2 + 5z - 12. \tag{189}$$

Entsprechend gilt für einen Eigenwert z_1 von M_1, als Nullstellen von χ_1, $z_1 \in \{-5/2 + \sqrt{25-48}/2, -5/2 + \sqrt{25-48}/2\}$. Insbesondere gilt für jeden Eigenwert z_1 von M_1, dass $\Re[z_1] = -5/2 < 0$. Damit ist die Ruhelage $(4,-1)$ asymptotisch stabil. Für einen Eigenwert z_2 von M_2 gilt $z_2 \in \{-5/2 - \sqrt{25+48}/2 < 0, -5/2 + \sqrt{25+48}/2 > 0\} \subset \mathbb{R}$. Da es einen Eigenwert $z_2 = -5/2 + \sqrt{25+48}/2$ von M_2 mit positivem Realteil gibt, ist die Gleichgewichtslage $(-8, 11)$ instabil. □

Aufgabe 20 Gegeben sei nun das autonome System $x' = y$ und $y' = -x^3 + y$. Wir zeigen zunächst, dass $(0,0)$ die einzige Ruhelage ist. Das autonome System hat eine $\mathcal{C}^1$-reguläre Seite und ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ daher lokal Lipschitz-stetig. Sei nun $(x_s, y_s) \in \mathbb{R}^2$ eine Ruhelage des autonomen Systems. Dann gilt $0 = y_s$ und $0 = -x_s^3 + y_s$. Die erste Gleichung liefert $y_s = 0$, was in die zweite Gleichung eingesetzt werden kann. Das liefert $0 = x_s^3$. Da die Kubik-Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv ist, finden wir $x_s^3 = 0 \Leftrightarrow x_s = 0$. Somit ist die einzige Ruhelage in der Tat $(x_s, y_s) = (0,0)$. Um die Stabilität der Ruhelage zu untersuchen, finden wir eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ mit Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, die aus der Lyapunov-Eigenschaft von V noch zu bestimmen sind. Um die Forderung, dass V Lyapunov-Funktion ist, zu befriedigen, müssen wir insbesondere haben:

$$\partial_x V(x,y)(y) + \partial_y V(x,y)(-x^3 - y) \leq 0. \tag{190}$$

Es gilt $\partial_x V(x,y) = 4\alpha x^3$ und $\partial_y V(x,y) = 2\beta y$. Einsetzen liefert: $4\alpha x^3 y - 2\beta x^3 y - 2\beta y^2 \leq 0$. Indem wir nun setzen $2\alpha = \beta$, sehen wir, dass sich die gemischten Terme wegheben. β können wir auf eine beliebige positive Zahl setzen, sodass gilt $V(x,y) > 0$ für $(x,y) \in \bar{B}_\epsilon((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$. Das heißt, es muss gelten $\alpha x^4 + \beta y^2 > 0$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$. Es gilt also $\beta(x^4 + 2y^2) > 0$, was für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wahr ist. Zudem gilt $V(0,0) = \beta/2 0^4 + \beta 0^2 = 0$. Damit sind z.B. für die Wahl $\beta = 1 > 0$ die Voraussetzungen des Stabilitätssatzes von Lyapnuv erfüllt und wir können folgern, dass $(0,0)$ stabil (genauer sogar asymptotisch stabil) ist. □

Aufgabe 21 (a) Gegeben sei die Menge $A = \{z \in \mathbb{C} | |z| + \Re(z) \leq 1\}$. Wir fassen $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ auf, indem wir $z \mapsto (\Re[z], \Im[z])$ verwenden. Damit finden wir $\sqrt{x^2+y^2} + x \leq 1$ als Bedingung an $z = x + iy$. Wir definieren nun die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} + x$. Diese ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig, denn $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ ist nicht-negativ und stetig und die Wurzelfunktion ist stetig auf $\mathbb{R}^+$. Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist f somit stetig. Nun gilt $(-\infty, 1] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, weil $(-\infty, 1]^\complement = (1, \infty) \subset \mathbb{R}$ als offenes Teilintervall von $\mathbb{R}$ offen ist. Da laut Topologie die Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen wiederum abgeschlossen sind, ist auch $f^{-1}((-\infty, 1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -\infty < \sqrt{x^2+y^2} + x \leq 1\} =: A_r$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ und damit auch in $\mathbb{C}$. Andererseits ist

A_r unbeschränkt. Wäre A_r beschränkt, so gäbe es wegen $(0,0) \in A_r$ ein $R > 0$, sodass $A_r \subset B^2_R((0,0))$. Andererseits gilt für die komplexe Zahl $z = -(R+1) + i \cdot = 0$, dass $|z| + \Re[z] = (R+1) + (-(R+1)) = 0$, also $(-(R+1), 0) \in A_r$, aber $(-(R+1), 0) \notin B^2_R((0,0))$, da $\|(-(R+1), 0)\|_2 = R+1 > R$. Also ist A_r und damit auch A jeweils nicht beschränkt. Nach dem Satz von Heine-Borel ist damit A_r nicht kompakt, also ist auch A nicht kompakt.
(b) Gesucht ist der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n. \tag{191}$$

Wir definieren zunächst die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ durch die Vorschrift

$$a_n := \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{5n^2} \tag{192}$$

Nun beachten wir, dass sogar $a_n \in \mathbb{R}^+_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daher ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{5n} = \left(\left(1 + \frac{-1}{n}\right)\right)^5. \tag{193}$$

Die Funktion $x \mapsto x^5$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, sodass

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\limsup_{n \to \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n\right)^5. \tag{194}$$

Da gilt $\lim_{n \to \infty}(1 + x/n)^n = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, finden wir

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \exp(-1)^5 = \exp(-5). \tag{195}$$

Zusammen mit der Formel von Cauchy-Hadamard finden wir also für den Konvergenzradius ρ der in Rede stehenden Potenzreihe $\rho = (\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = \exp(5)$.
(c) Gegeben seien C^1-Funktionen $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf einem offenen U, sodass $(u, v) : \Omega \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Wir behaupten, dass dann auch $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = \exp(u(x, y)) \cos(v(x, y)) \ \& \ g(x, y) = \exp(u(x, y)) \sin(v(x, y)) \tag{196}$$

die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen. Laut Voraussetzung sind u, v $\mathcal{C}^1$-differenzierbar und genügen den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Die durch $F(z) = u(z) + iv(z)$ erklärte Funktion für $z = x + iy$ ist nach dem Satz über den Zusammenhang zwischen Holomorphie und den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen holomorph auf Ω, $F : \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto F(z)$. Aus der Vorlesung ist ferner bekannt, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ist, ebenso, dass die Komposition zweier holomorpher Funktionen wiederum eine holomorphe Funktion definiert. Damit ist auch die Funktion $\exp \circ F : \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(F(z))$ holomorph auf Ω. Indem wir Ω wieder als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ anstelle des $\mathbb{C}$ auffassen und $F(z = x+iy) = F(x,y)$ schreiben, finden wir für $z = x+iy$

$$\exp(F(x,y)) = \exp(\Re[F](x,y))\exp(i\Im[F](x,y)) = \exp(u(x,y))\exp(iv(x,y)), \tag{197}$$

was wegen der Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen das Ergebnis

$$\begin{aligned} \exp(F(x,y)) &= \exp(u(x,y))\cos(v(x,y)) + i\exp(u(x,y))\sin(v(x,y)) \\ &= f(x,y) + ig(x,y). \end{aligned} \tag{198}$$

Die Funktionen f und g enstprechen also gerade dem Real- bzw. Imaginärteil der holomorphen Funktion $\exp \circ F$ auf Ω. Wiederum vermittels des Satzes über den Zusammenhang zwischen Holomorphie und den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen finden wir, dass f, g den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen genügen. $\square$

Aufgabe 22 Gesucht sind alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass gilt $f(\exp(i\sqrt{2}\pi n)) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar erfüllt die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1$ die Voraussetzungen, denn es ist g holomorph und $g(\exp(\sqrt{2}i\pi n)) = 1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren nun die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Zuweisung $z_n = \exp(\sqrt{2}\pi i n) = \cos(\sqrt{2}\pi n) + i\sin(\sqrt{2}\pi n) =: x_n + iy_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und erhalten die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch Realteilbildung und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch Imaginärteilbildung, wie oben angezeigt. Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt $z_n \neq z_m, x_n \neq x_m, y_n \neq y_m$ genau dann wenn $n \neq m$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Wegen $\|\exp(i\sqrt{2}\pi n)\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $z_n \in \bar{B}_{\sqrt{\pi}}(0_{\mathbb{C}})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., in einem Kompaktum, das seinerseits im vollständigen metrischen Raum $(\mathbb{C}, d)$ zusammen mit der von der Norm $\|.\|$ induziert Metrik d enthalten ist. Der Satz von Bolzano-Weierstraß garantiert nun die Existenz einer Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass die Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Da der Betrag der einzelnen Folgenglieder jeweils 1 ist, liegt der Grenzwert z_∞ zumindest auf dem Einheitskreis. Wir nehmen nun an, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine weitere, von der Funktion g verschiedene, holomorphe Funktion, die die Bedingung aus der Aufgabenstellung erfüllt. Da f als holomorphe Funktion stetig ist, gilt auch $f(z_\infty) = 1$. Damit haben wir eine Menge $M := \{z_{n_k} | k \in \mathbb{N}\} \cup \{z_\infty\} \subseteq N \cup \{z_\infty\}$, wo f den Wert 1 annimmt. Als Menge, die die Glieder einer konvergenten Folge und deren Grenzwert enthält, hat M, und damit $N \cup \{z_\infty\}$ einen Häufungspunkt. Wir stellen also fest, dass $f|_M = g|_M$ auf der Menge M, die einen Häufungspunkt hat. Der Identitässatz für holomorphe Funktionen liefert uns nun, da $\mathbb{C}$ ferner ein Gebiet ist, dass $f = g$ auf ganz $\mathbb{C}$. Das bedeutet, die konstante Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1$ ist die einzige holomorphe Funktion, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. $\square$

Aufgabe 23 (a) Der Satz von Lioville lautet: "Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Ist f beschränkt, so ist f konstant.". Zum Beweis: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann hat f eine auf $B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ konvergente Taylor-Entwicklung für beliebiges $r \in \mathbb{R}^+$, d.h.,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{199}$$

wobei die Koeffizienten a_n für $n \geq 0$ aus der Cauchy'schen Integralformel bestimmbar sind:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz. \tag{200}$$

Wir können somit abschätzen:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \int_{\partial B_r(0)} dz \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \\ &\leq \frac{2\pi r \cdot \sup_{z\in\mathbb{C}}\{|f(z)|\}}{2\pi \cdot r^{n+1}} \\ &= \frac{\sup_{z\in\mathbb{C}}\{|f(z)|\}}{r^n}, \end{aligned} \tag{201}$$

wobei $\sup_{z\in\mathbb{C}}\{|f(z)|\} \in \mathbb{R}_0^+$ wegen Beschränktheit von f gemäß Voraussetzung. Wegen $r > 0$ beliebig, da f ganz ist, finden wir im Limes $r \to \infty$, dass $a_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit finden wir, dass $f(z) = a_0$, wobei $a_0 \in \mathbb{C}$, d.h., dass f konstant ist.
(b) Sei nun $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Zu zeigen ist, dass falls $a\Re[f] + b\Im[f]$ nach oben beschränkt ist, so ist f bereits konstant. Sei $\mathbb{C} \ni c = a - ib \neq 0$ und definiere die Funktion $h = \exp \circ (c \cdot f)$. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$h(z) = \exp(a\Re[f](z) + b\Im[f](z)) \exp(i(a\Im[f](z) - \Re[f](z))). \tag{202}$$

Als Komposition der ganzen Exponentialfunktion und der ganze Funktion $c \cdot f$ ist auch h ganz. Insbesondere gilt $|h(z)| = \exp(a\Re[f](z) + b\Im[f](z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da laut Voraussetzung das Argument der Exponentialfunktion eine nach oben beschränkte Funktion ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}_0^+$, sodass $a\Re[f](z) + b\Im[f](z) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, finden wir $0 \leq |h(z)| \leq \exp(M)$. Insbesondere ist h eine beschränkte ganze Funktion. Die Funktion f ist damit auch konstant. Denn, angenommen, f wäre nicht konstant. Dann wäre cf ebenfalls nicht konstant, aber ganz. Nach dem Satz von der Gebietstreue ist dann $(cf)(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, also insbesondere offen. Deswegen ist dann $\exp(cf(\mathbb{C})) \subseteq \mathbb{C}$ ebenfalls ein Gebiet und insbesondere nicht ein-elementig. Letzteres steht aber im Widerspruch dazu, dass $\exp \circ (cf)$ bereits vorher als konstant nachgewiesen worden ist. Folglich war die Annahme, f wäre nicht konstant, falsch und es gibt ein $c_{\text{fin}} \in \mathbb{C}$, sodass $f(z) = c_{\text{fin}}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Mithin ist f also tatsächlich konstant, wie behauptet. □

Aufgabe 24 Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch die Vorgabe einer Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{203}$$

und fordern zusätzlich, dass f holomorph ist. Gesucht ist zunächst eine Formel, die die Berechnung der Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ für beliebiges $k \geq 0$ erlaubt. Da $B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$

Gebiet und $\partial B_r(0) \subset \mathbb{C}$ für jede Wahl von $r \geq 0$ und zusätzlich f auf $\bar{B}_r(0)$ durch den obenstehenden Potenzreihenausdruck gegeben ist, finden wir zunächst anhand der Cauchy'schen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \tag{204}$$

für $z \in B_r(0)$. Formale Differentiation des Potenzreihen-Ausdrucks bei $z = 0$ (liegt in Konvergenzgebiet, da f ganz nach Voraussetzung), liefert nun

$$\frac{d^l}{dz^l} f(z = 0) = l! a_l \tag{205}$$

für alle $l \in \mathbb{N}_0$, wie man leicht durch Induktion verifiziert. Andererseits finden wir vermöge der Cauchy'schen Integralformel

$$\begin{aligned}
\frac{d^l}{dz^l} f(z = 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} f(w) \left.\frac{\partial^l}{\partial z^l}\right|_{z=0} \left(\frac{1}{w - z}\right) dw \\
&= \frac{(-1)^l (-1)^l l!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \left.\frac{f(w)}{(w - z)^{l+1}}\right|_{z=0} dw \\
&= \frac{l!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{l+1}} dw.
\end{aligned} \tag{206}$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $d_z^l f(z = 0)$ liefert nun eine Formel zur Bestimmung von a_l, nämlich,

$$a_l = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{l+1}} dw. \tag{207}$$

Indem wir beachten, dass $\partial B_r(0) = \{w \in \mathbb{C} | |w| = r\}$, stellen wir fest, dass wir den ersten Teil der Teilaufgabe (a) bereits gelöst haben. Wir beachten nun das folgende. Für alle $r > 0$ ist $\bar{B}_r(0)$ kompakt und $B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Das Maximumsprinzip statuiert nun, dass $f|_{\bar{B}_r(0)}$ auf $\partial B_r(0)$ sein Betrags-Maximum annimmt, d.h., dass $\max_{z \in \partial B_r(0)} \{|f(z)|\} \in \mathbb{R}_0^+$ existiert. Zusammen mit $z \in \partial B_r(0) \Leftrightarrow |z| = r$ können wir somit aus der Formel für die Koeffizienten a_l eine Abschätzung für $|a_l|$ gewinnen,

$$\begin{aligned}
|a_l| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{l+1}} dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_r(0)} dw \, \frac{|f(w)|}{|w|^{l+1}} \\
&\leq \frac{2\pi r \cdot \max_{z \in \partial B_r(0)} \{|f(z)|\}}{2\pi \cdot r^{l+1}} \\
&= \frac{\max_{z \in \partial B_r(0)} \{|f(z)|\}}{r^l}.
\end{aligned} \tag{208}$$

Wir untersuchen nun, wie sich diese Abschätzung mit Forderungen an die Funktion f verträgt. Sei dazu $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest vorgegeben. Wir fordern zusätzlich, dass $0 \leq \limsup_{|z|\to\infty} |z|^{-n}|f(z)| < \infty$ und zeigen, dass dann $f(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist. Sei $f(z)$ ein Polynom vom Grad $> n$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \tag{209}$$

für ein $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $N > n$ und einem $a_m \neq 0$ für $n < m \leq N$. Dann gilt mit $m - n > 0$, $|a_m| \neq 0$, dass

$$\begin{aligned}
\frac{|f(z)|}{|z|^n} &\geq \frac{|a_m||z|^m \sum_{k=0}^{m-1} |a_k||z|^k}{z^n} \\
&= |a_m||z|^{m-n} - \sum_{k=-n}^{m-1-n} |a_{k+n}||z|^k \\
&= |a_m||z^{m-n}| \left(1 - \sum_{k=-m}^{-1} \frac{|a_{k+m}|}{|a_m|}|z|^k\right) \\
&\geq |a_m||z|^{m-n} \left(1 - C\frac{1}{|z|}\right)
\end{aligned} \tag{210}$$

mit einer geeigneten Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$. In die Abschätzung ging die umgekehrte Dreiecksungleichung für Norm $|\heartsuit|$ auf $\mathbb{C}$ ein. Im Grenzübergang $|z| \to \infty$ stellen wir nun fest, dass die Schranke nach unten sich dem Wert ∞ annähert, da der erste Faktor gegen ∞ läuft, aber der $|z|$-abhängige Teil gegen 1 läuft. Damit haben wir die Gültigkeit der Kontraposition der zu beweisenden Aussage nachgewiesen, sodass die Aussage aus Teil (b) ebenfalls verifiziert ist. Zuletzt behandeln wir den Fall, dass für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\liminf_{|z|\to\infty} |z|^{-n}|f(z)| > 0$. Wir zeigen, dass $f(z)$ dann ein Polynom vom Grad $\geq n$ ist. Wiederum beweisen wir die Kontraposition der Aussage. Sei also f ein Polynom vom Grad $m < n$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \tag{211}$$

sowie $a_m \neq 0$ aus Gradgründen. Wir schätzen diesmal den Ausdruck $|f(z)|/|z|^n$ nach oben ab. Es gilt nach der Dreiecksungleichung für die Norm $|\heartsuit|$ auf $\mathbb{C}$:

$$\frac{|f(z)|}{|z|^n} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_m||z|^{m-n} \leq |a_m||z|^{-1}. \tag{212}$$

Im Grenzübergang stellen wir fest, dass $|a_m| \cdot |z|^{-1} \to 0$, wenn $|z| \to \infty$. Damit folgt auch $\liminf_{|z|\to\infty}(|z|^{-1}|f(z)|) = 0$ nach Definition des Limes Inferior. Damit haben wir die Kontraposition der zu beweisenden Aussage für wahr befunden. Also haben wir auch die Gültigkeit der zu Beginn zitierten Aussage nachgewiesen. $\square$

Aufgabe 25 (F09T3A4) (a) Nein. Angenommen, es gäbe eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, sodass $f(z)^3 = z^2$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Dann gilt $f(0) = 0$. Also hat f

eine auf $\mathbb{E}$ konvergente Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $z = 0$. Wegen $f(0) = 0$ ist diese von der Form

$$f(z) = z \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}. \tag{213}$$

Durch Einsetzen finden wir

$$z^3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} \right)^3 = z^2. \tag{214}$$

Ausexpandieren und Koeffizientenvergleich liefert für die niedrigste Potenz z^2 den Widerspruch $1 = 0$.
(b) Nein. Wir spezifizieren zunächst die Folge $(1/2k)_{k\in\mathbb{N}}$ und stellen fest, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f(1/2k) = (-1)^{2k}/(2k)^4 = 1/(2k)^4$. Ein geeigneter Kandidat ist also die Hilfsfunktion $h : \mathbb{E} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^4$. In der Tat, gilt $\lim_{k\to\infty}(1/(2k)) = 0$ und die Menge $N_1 \equiv \{1/2k | k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{E}$ hat einen Häufungspunkt, da sie gerade die Glieder der Folge $(1/(2k))_{k\in\mathbb{N}}$ und den Grenzwert 0 enthält.Der Identitätssatz liefer-te uns nun, zusammen mit der Gebietseigenschaft von $\mathbb{E}$, $f(z) = h(z)$. Damit finden wir $f(z) = z^4$. Allerdings gilt für $z = 1/3$, dass $h(1/3) = 1/243 > 0$ im Gegensatz zu $f(1/3) = (-1)^3/3^4 = -1/243$, wie gefordert. Damit haben wir den Widerspruch zur Gleichung aus dem Identiätssatz, dass $f = h$ auf $\mathbb{E}$. Eine derartige holomorphe Funktion existiert also nicht.
(c) Nein. Wegen $\lim_{|z|} |f(z)| = 1$ können wir die Funktion $|f| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_0^+, z \mapsto |f(z)|$ zumindest auf $\bar{\mathbb{E}}$ stetig fortsetzen. Da $\bar{\mathbb{E}} \subseteq \mathbb{R}^2$ als abgeschlossene und beshränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ nach Heine-Borel kompakt ist, gibt es laut reellem Maximumsprinzip $m, M \in \mathbb{R}^+$, sodass $m \leq |f(z) \leq M$ auf ganz $\bar{\mathbb{E}}$. Da $|f(0)| = 2 > 1$, gilt $M \geq 2$. Also gibt es bereits in $\mathbb{E}$ ein z_0, sodass $|f(z_0)| = M$ und f nimmt in $\mathbb{E}$ ein Betragsmaximum an. Das Maximumsprinzip, angewendet auf das holomorphe $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, liefert nun, dass f konstant auf $\mathbb{E}$ ist, d.h., $f(z) = f(0) = 2i$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Aber dann gilt $\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = \lim_{|z|\to 1} 2 = 2 \neq 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit kann es auch in diesem Fall ein f wie gewünscht nicht geben.
$\square$

Aufgabe 26 (H18T2A3) (a) Wir betrachte die für ein reelles $a > 1$ und beliebige $z \in \mathbb{E}$ definierte Gleichung $ze^{a-z} = 1$. Da die Exponentialfunktion auch auf $\mathbb{C}$ nicht auf 0 abbildet, können wir umformen: $z = \exp(z - a)$. Wir sehen also, dass die gesuchte Lösung $z_* \in \mathbb{E}$ die Nullstelle der holomorphen Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z - \exp(z - a)$ ist. Wir parameterisieren $\partial\mathbb{E}$ durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$. Dieser Weg verläuft ganz in $\mathbb{C}$ und ist nullhomolog, da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist. Wegen $\mathbb{R} \ni a > 1$ gilt ferner $|z| = 1 > | - \exp(z - a)| = \exp(-a + \Re[z])$, denn letzteres ist durch $\exp(-a + 1) < 1$ nach oben beschränkt. Da mit $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jeweils gegeben durch $g(z) = z$ und $h(z) = -\exp(-a + z)$ holomorph sind, und $f(z) = g(z) + h(z)$ für alle z erfüllen, liefert die obige Abschätzung mit dem Satz von Rouché, dass f und g in dem von γ berandeten Gebiet, d.h., in $\mathbb{E}$ dieselbe Anzahl von Nullstellen. Da g eine Polynomfunktion vom Grad 1 ist, hat g genau eine Nullstelle, die auch in $\mathbb{E}$ liegt, da $0 \in \mathbb{E}$ und $g(0) = 0$. Also hat auch f genau eine

Nullstelle $z_* \in \mathbb{E}$. Um zu zeigen, dass f sogar eine positive und reelle Nullstelle hat, schränken wir f auf $[0,1] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ein. Dort gilt dann $x - \exp(x-a) = f|_{[0,1]}(x)$ für $x \in [0,1]$. Als Verknüpfung stetiger Funktion ist $f|_{[0,1]}$ selbst stetig auf dem gesamten Definitionsbereich. Es gilt nun $f(0) = -\exp(-a) < 0$ und $f(1) = 1-\exp(1-a) > 0$, denn $a > 1$ nach Voraussetzung. Der Zwischenwertsatz liefert uns nun, dass ein ξ existiert, sodass $f(\xi) = 0 \in [f(0), f(1)]$, d.h., dass f eine positive reelle Nullstelle besitzt. Zusammen mit der oben bewiesenen Aussage, dass f genau eine Nullstelle besitzt in $\mathbb{E}$ finden wir, dass $z\exp(z-a) = 1$ genau eine Lösung in $\mathbb{E}$ besitzt, für die sogar $z \in (0,1)$ gilt.
(b) Wir sollen das Integral

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta} \tag{215}$$

berechnen. Wir beachten, dass $\cos(\theta) = 1/2(\exp(i\theta) + \exp(-i\theta))$ gilt. Damit

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{3 + \exp(i\theta) + \exp(-i\theta)} = -i\int_0^\pi \frac{d\theta\, i\exp(i\theta)}{\exp(2i\theta) + 3\exp(i\theta) + 1}. \tag{216}$$

Da die Cosinus-Funktion symmetrisch ist, finden wir

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta} &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta} \\ &= \frac{-i}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta\, i\exp(i\theta)}{\exp(2i\theta) + 3\exp(i\theta) + 1} \\ &= \frac{-i}{2}\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 3z + 1}.\end{aligned} \tag{217}$$

Wir bestimmen die Nullstrellen des Nennerpolynoms. Es gilt nach Mitternachtsformel

$$z_\pm = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{218}$$

Offenbar liegt nur die Nullstelle $z_+ \in B_1(0)$. Die andere Nullstelle genügt $z_- < -3/2 < 1$, liegt also in $\mathbb{C}\backslash\bar{B}_1(0)$. Wir schreiben die Rechnung also unter Verwendung von $z^2 + 3z + 1 = (z-z_-)(z-z_+)$ fort:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta} = \frac{\pi}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz\,(z-z_-)^{-1}}{z - z_+} = \frac{\pi}{z_+ - z_-} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}, \tag{219}$$

dank der Cauchy-Integralformel und der Beobachtung, dass $z \mapsto (z-z_-)^{-1}$ auf $B_{3/2}(0) \supsetneq \bar{B}_1(0)$ holomorph ist. Damit ist der Wert aus der Angabe hergeleitet. □

Aufgabe 27 (H18T3A2) (a) Definiere $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = (3z + 1)/(z+1)$. Gesucht ist das Bild von $B_1(0)$ unter f. Sei dazu $z = x + iy$ mit $x \neq$

$-1, y \neq 0$ beliebig. Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{3x+3iy+1}{1+x+iy} \\
&= \frac{(1+3x+3iy)(1+x-iy)}{(1+x)^2+y^2} \\
&= \frac{(1+x)(1+3x)+3y^2+3iy(1+x)-iy(1+3x)}{(1+x)^2+y^2} \\
&= \frac{(1+x)(1+3x)+3y^2}{(1+x)^2+y^2} + \frac{2iy}{(1+x)^2+y^2}.
\end{aligned} \tag{220}
$$

Da f Einschränkung einer Möbiustransformation $\Phi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ist, die -1 nach ∞ schickt, wird die Einheitskreislinie in $\hat{\mathbb{C}}$ auf eine Gerade abgebildet (Verallgemeinerte Kreistreue). Diese können wir in $\mathbb{C}$ aufsetzen, wenn wir die Bilder zweier von -1 verschiedener Punkte auf $\partial\mathbb{E}$ unter f bestimmt haben. Es gilt $f(1) = 2$ und $f(i) = 2+i$. Also ist $\Phi(\partial\mathbb{E}) = \{z \in \mathbb{C} | z = 2+it, t \in \mathbb{R}\}$. Damit kommen für $f(\mathbb{E}) = \Phi(\mathbb{E})$ nur die folgenden beiden Mengen in Betracht:

$$
M_1 := \{z \in \mathbb{C} : \Re[z] < 2\} \ \& \ M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \Re[z] > 2\}, \tag{221}
$$

wiederum infolge der Kreistreue biholomorpher Abbildungen. Da $f(0 \in \mathbb{E}) = 1$ Realteil kleiner als 2 hat, folgt

$$
f(\mathbb{E}) = \{z \in \mathbb{C} : \Re[z] < 2\}. \tag{222}
$$

Entsprechend wird $\bar{\mathbb{E}}^{\mathsf{C}}$ auf M_2 abgebildet.
(b) Gegeben sei $G_1 := B_2(1)$ und $G_2 := \{z \in \mathbb{C} | \Re[z] < 0\}$. Gesucht ist eine biholomorphe Abbildung $f : G_1 \to G_2$. Wir stellen fest, dass $G_1, G_2 \subsetneq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete sind. Wir setzen f als Einschränkung einer biholomorphen Abbildung $\Phi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ an. Wir spezifizieren, dass $\Phi(-1) = \infty$, $\Phi(3) = +i$, $\Phi(1+2i) = -i$. Dann ist Φ bereits von der Form

$$
\Phi(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{z+1} & z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \\ a & z = \infty \\ \infty & z = -1 \end{cases} \tag{223}
$$

Nun finden wir die beiden Gleichungen

$$
i = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \tag{224}
$$

$$
\begin{aligned}
-i &= \frac{(3+6i)(2-2i)}{8}a + \frac{2-2i}{8}b \\
&= \frac{9+3i}{4}a + \frac{1-i}{4}b.
\end{aligned} \tag{225}
$$

Damit finden wir

$$
\frac{12+3i}{4}a = -\frac{2-i}{4}b, \tag{226}
$$

d.h.,

$$b = -\frac{12+3i}{2-i}a = -\frac{(12+3i)(2+i)}{5}a = -\frac{21+18i}{5}a \tag{227}$$

Somit finden wir

$$i = \frac{15}{20}a - \frac{21+18i}{20}a \Rightarrow a = \frac{20i}{-6-18i} = \frac{-360-120i}{360} = -1 - \frac{i}{3}. \tag{228}$$

Entsprechend ist

$$b = -\frac{21+18i}{5}\left(-\frac{3}{3} - \frac{i}{3}\right) = -(-21+6)/5 - (-7i-18i)/5 = 3+5i. \tag{229}$$

Wir stellen aber fest, dass $\Re[\Phi(1)] > 0$, d.h., dass gerade $\Phi(B_2(1)) = (\bar{G_2})^{\complement}$. Um dies zu beheben vertauschen wir die Zuweisung, d.h., fordern, dass $\Phi(3) = -i$ und $\Phi(1+2i) = i$. In dem inhomogenen linearen Gleichungssystem von eben führt das dazu, dass $a \to -a$ und $b \to -b$, weil effektiv die Inhomogenität nur das vorzeichen tauscht (Generisch gilt das nicht, man muss im Allgemeinen neu lösen...). Wir finden also die gesuchte Abbildung durch

$$f(z) = \frac{(1+i/3)z - (3+5i)}{z+1}, \tag{230}$$

d.h., als Einschränkung der Möbius-Transformation Φ.
(c) Eine biholomorphe Abbildung $f : M \equiv \mathbb{C} \setminus \{(x+iy) \in \mathbb{C} | x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1), y = 0\} \to B_1(0)$ existiert. Offenbar ist M die disjunkte Vereinigung von $(-1,1) + i \cdot 0$ und der oberen sowie unteren Halbebenen. M ist offen und zusammenhängend, also ein Gebiet. Ferner ist M sogar einfach zusammenhängend, da jeder geschlossene Weg in M retrahierbar auf einen Punkt seiner Spur ist. Alternativ sieht man, dass $\mathbb{C} \setminus M = \{z \in \mathbb{C} | z = x, x \in (-\infty, -1]\} \cup \{z \in \mathbb{C} | z = x, x \in [1, \infty)\}$ keine beschränkte Zusammenhangskomponente hat, weil die Intervalle jeweils halbunendlich sind. Da ferner $\mathbb{C} \setminus M \neq \emptyset$ ist $M \subsetneq \mathbb{C}$. Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz gibt es also eine biholomorphe Abbildung $f : M \to \mathbb{E} = B_1(0)$. $\square$

Aufgabe 28 (H18T1A4) (a) Gegeben sei $S \equiv \{z \in \mathbb{C} | 0 < \Re[z] < 1\}$ und $H \equiv \{z \in \mathbb{C} | \Im[z] > 0\}$. Wir beachten zuerst, dass auch gilt $H = \{z \in \mathbb{C} || z| > 0, \mathrm{Arg}(z) \in (0, \pi)\}$. Die Abbildung $z \mapsto \pi z$ bildet S auf $\pi \cdot S$ ab. Durch Multiplikation mit $i = \exp(i\pi/2)$ können wir ferner πS um $90°$ Grad entgegen dem Uhrzeigersinn rotieren. Dann erhalten wir $i\pi S$. Vermöge der Exponentialfunktion können wir nun $z \in i\pi S$ auf ein $w = \exp(z) \in H$ abbilden. Insgesamt haben wir also die Abbildung $f : S \to H, z \mapsto \exp(i\pi z)$ gefunden. Da $i\pi S \subsetneq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ einfach zusammenhängend, existiert der Hauptzweig des Logarithmus, d.h., die Exponentialfunktion ist umkehrbar. Wir setzen also $g(z) = (\pi i)^{-1}\mathrm{Log}(z)$ und behaupten $g : H \to S$ ist die Umkehrfunktion zu f. In der Tat gilt für alle $z \in S$, $g(f(z)) = (\pi i)^{-1}\mathrm{Log}(\exp(\pi i z)) = (\pi i)^{-1}(\pi i z) = z = \mathrm{id}_S(z)$ und analog für alle $z \in \mathbb{H}$, $f(g(z)) = \exp(i\pi(\pi i)^{-1}\mathrm{Log}(z)) = \exp(\mathrm{Log}(z)) = z = \mathrm{id}_H(z)$. Damit ist nachgewiesen, dass f bijektiv ist. Als Verknüpfung holomorpher Funktion ist

f auch holomorph. Damit haben wir eine holomorhe bijektive Funktion mit den gewünschten Eigenschaften angegeben.
(b) Gesucht ist nun eine holomorphe bijektive Abbildung $h : S \to S$, sodass $h(1/2) = 1/4$. Dazu setzen wir wie folgt an. Wir bilden zunächst $1/2 \in S$ auf $i \in H$ ab. Dies können wir durch $f(z) = \exp(\pi i z)$ erreichen. Wir bilden ferner $1/4 \in S$ durch f auf $f(1/4) = \exp(i\pi/4) = \sqrt{2}^{-1} + \sqrt{2}^{-1} i$ ab. Wir suchen nun zwei biholomorphe Abbildungen $b_1 : H \to \mathbb{E}$ und $b_2 : H \to \mathbb{E}$, sodass $b_1(i) = 0 = b_2(\sqrt{2}^{-1} + \sqrt{2}^{-1} i)$. Das erreichen wir, indem wir

$$b_1(z) = \frac{z-i}{z+i} \ \& \ b_2(z) = \frac{z - \sqrt{2}^{-1} - \sqrt{2}^{-1} i}{z - \sqrt{2} + \sqrt{2}^{-1} i} \tag{231}$$

setzen (eine sogenannte *generalisierte Cayley-Transformation*). Diese ist bekanntermaßen biholomorph. Nun setzen wir $h(z) = f^{-1}(b_2^{-1}(b_1(f(z))))$ und stellen fest, dass nach Konstruktion $h : S \to S$ und $h(1/2) = 1/4$. Als Komposition biholomorpher Abbildungen, ist auch h biholomorph, insbesondere also holomorph und bijektiv. $\square$

4.2 Aufgaben Ernstfalltests

Aufgabe 1 Sei $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ der erste Quadrant im $\mathbb{R}^2$ versehen mit kartesischen Koordinaten. Laut Angabe ist die Differentialgleichung $xyy' = x^2 + y^2$ auf Q definiert. Da $x, y > 0$, gilt auch $y' = (x^2+y^2)/(xy)$. Definiere nun die Funktion $f : Q \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x^2+y^2)/(xy)$. Das soeben definierte f ist stetig partiell differenzierbar in y und stetig in x, beides für alle Punkte $(x,y) \in Q$. Mithin genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung auf Q. Laut Angabe ist ferner die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ zu erfüllen. Q ist trivialerweise offen und zusammenhängend, also ein Gebiet. Der globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöff ist also anwendbar und liefert für das Anfangswertproblem $y' = f(x,y) \Leftrightarrow xyy' = x^2+y^2$ so dass $y(1) = 1$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\lambda : I_{(1,1)} \to \mathbb{R}^+$, so dass $\Gamma(\lambda) \subset Q$. Diese ist nun zu bestimmen. Wir setzen $y = ux$ mit $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mindestens einmal stetig differenzierbar. Es gilt $x^2 + y^2 = x^2(1+u^2)$ und $xyy' = x^2 u(u'x + u)$. Aus $xyy' = x^2 + y^2$ folgt damit für u, dass $u(xu' + u) = (1 + u^2)$ vermittels Einsetzen der obenstehenden Ergebnisse und anschließender Division durch $x^2 > 0$. Da $x > 0$, existiert $\chi := \ln x$ für alle $(x,y) \in Q$. Wir transformieren auf $u(x) = U(\chi)$. Als Nebenrechnung führen wir $xu'(x) = (d\ln x/dx)^{-1}(x) du(x)/dx = du(x)/(d\ln x) = dU/d\chi$ durch. Nun finden wir $U dU(\chi)/d\chi + U^2 = 1 + U^2$, so dass $U dU(\chi)/\chi = 1$ oder aber $d(U(\chi)^2)/d\chi = 2$ nach der Kettenregel der Differentialrechnung in einer Variablen. Die Differentialgleichung ist nun elementar integrabel. Wir finden durch unbestimmte Integration, dass $U(\chi)^2 = 2\chi + C$ mit einer aus den Anfangswerten zu bestimmenden Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$. Wir transformieren zurück in die (x,y)–Variablen: $y(x)^2 = (2\ln x + C)x^2$, da $\chi = \ln x$ und $u = y/x$. Somit gilt $y(x) = +\sqrt{C + 2\ln x}x$, wobei wir uns wegen $(x, y(x)) \in Q$ für alle $x > 0$ auf das positive Vorzeichen beim Radizieren beschränken konnten. Da gelten soll $y(1) = 1$, finden wir $1 = \sqrt{C}$. Damit folgt $C = 1$. Das maximimale Existenzintervall $I_{(1,1)}$ ist von der Form (a,b) mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $a < b$ und $1 \in I_{(1,1)}$. Die obere Intervallgrenze ist bestimmt durch $b = +\infty$, denn $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \ln x}x = \infty$. Die untere Grenze ist bestimmt dadurch, dass wir nur für $x > e^{-0.5} > 0$ die Umkehrung, die uns $u(x)$ geliefert hat, namentlich, Wohldefiniertheit der Wurzel auch durchführen dürfen. Denn $y(e^{-1}) = \sqrt{1+(-1)e^{-0.5}} = 0$, aber die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{1+2\ln x}$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $x = \exp(-0.5)$! Vollständigeitshalber bemerken wir, $1 \in (\exp(-0.5), \infty)$. Damit ist $\lambda_{(1,1)} : I_{(1,1)} = (\exp(-0.5), \infty) \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{1+2\ln x}x$ die gesuchte maximale Lösung des Anfangswertproblems $xyy' = x^2 + y^2$.

Aufgabe 2 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet und seien $P, Q \in \mathcal{C}^1(G \to \mathbb{R})$ zwei auf G stetig differenzierbare reellwertige Funktionen. Eine Differentialgleichung $P(x,y)+Q(x,y)y' = 0$ auf G heißt *exakt*, falls es eine Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ mit $F \in \mathcal{C}^2(G \to \mathbb{R})$ gibt, so dass $\partial_x F(x,y) = P(x,y)$ und $\partial_y F(x,y) = Q(x,y)$ für alle $(x,y) \in G$. Eine zur Definition äquivalente Bedingung, ist das Irrotationalitätskriteriums, $\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y)$ für alle $(x,y) \in G$, gegeben. Wir spezialiseren nun $P(x,y) = 2x\exp(y)$ und $Q(x,y) = x^2\exp(y) - 1$ und definieren $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto P(x,y)$ sowie $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to Q(x,y)$. Auf $G \equiv \mathbb{R}^2$ sind das $\mathcal{C}^1$–Funktionen. Wir betrachten das Anfangswertproblem $P(x,y)+Q(x,y)y' = 0$ wobei $y(1) = 0$zu erfüllen ist. Wir behaupten, dass diese Differentialgleichung exakt ist. Zum einen gilt $\partial_y P(x,y) = 2x\exp(y)$ und $\partial_x Q(x,y) = 2x\exp(y)$ für alle $(x,y) \in G$, so dass das Irrotationalitätskriterium $\partial_y P(x,y) = 2x\exp(y) = \partial_y Q(x,y)$ auf G erfüllt ist. Nach den Bemerkungen weiter oben, ist also die betrachtete Differentialgleichung exakt. Damit gibt es ein zweimal stetig differenzierbares $F : G \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto F(x,y)$, so dass $\partial_x F(x,y) = P(x,y)$ und $\partial_y F(x,y) = Q(x,y)$. Offenbar erfüllt die Wahl $F(x,y;c) = x^2\exp(y) - y + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ die Anforderungen an F. Als Verknüpfung von auf Gglatten Funktionen ist F mindestens $\mathcal{C}^2$. Ferner gilt $\partial_y F(x,y) = x^2\exp(y) - 1 = Q(x,y)$ und $\partial_x F(x,y) = 2x\exp(x) = P(x,y)$ auf G. Exaktheit der Differentialgleichung, erlaubt uns $F(x,y(x);c) = 0$ entlang der Lösungskurve von $\lambda_{(1,0)} : \mathbb{R} \supset I_{(1,0)} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ des Anfangswertproblems zu setzen. Den Parameter $c \in \mathbb{R}$ fixiert die Bedingung $(1,0) \in \Gamma(\lambda_{(1,0)})$. Es gilt $0 = F(1,0;c)$, also $c = -1$. Hiermit finden wir, dass die Lösung implizit durch die Gleichung $x^2\exp(y) - y = 1$ für $(x,y) \in G$ gegeben ist.
Bemerkung: Die Äquivalenz gilt eigentlich nur, wenn G sogar einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 3 Gegeben ist die Anfangswertaufgabe $t^2 + x^2 + 2tx\dot{x}$, $x(1) = 1$. Die Differentialgleichung ist exakt: Definiere zunächst $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. G ist offen und zusammenhängend, also Gebiet. Ferner ist G einfach zusammenhängend. Außerdem gilt $(1, x(1) = 1) \in G$. Definiere $P : G \to \mathbb{R}, (t,x) \to t^2+x^2$ und $Q : G \to \mathbb{R}, (t,x) \to 2tx$. Als Polynomfunktionen in zwei Variablen gilt $P, Q \in \mathcal{C}^1(G \to \mathbb{R})$. Nach dem Irrotationalitätskriterium ist die Differentialgleichung $2tx\dot{x} + x^2 + t^2 = 0 \Leftrightarrow Q(t,x)\dot{x} + P(t,x) = 0$ exakt genau dann wenn $\partial_t Q(t,x) = \partial_x P(t,x)$ auf G. Es gilt in der Tat für $(t,x) \in G$, dass $\partial_t Q(t,x) = 2x$ und $\partial_x P(t,x) = 2x$, also $\partial_t Q(t,x) = \partial_x P(t,x)$. Damit liefert das Irrotationalitätskriterium die Exaktheit der betrachteten Differentialgleichung. Wir können nun aufgrund der Exaktheit der Differentialgleichung eine $\mathcal{C}^2$–Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ auf dem einfach zusammenhängenden G finden, so dass $\partial_t F = P$ und $\partial_x F = Q$. Offenbar erfüllt für alle $c \in \mathbb{R}$, $F(\heartsuit, \clubsuit; c)$ definiert durch $F(t,x;c) = t^3/3 + tx^2 + c$ für $(t,x) \in G$ die Anforderungen. Als Polynomfunktion in 2 Variablen ist $F(\heartsuit, \clubsuit; c)$ zwei stetig differenzierbar auf G und ferner gilt

$\partial_x F(t,x;c) = 2tx = Q(t,x)$ und $\partial_t F(t,x;c) = t^2 + x^2 = P(t,x)$ für alle $(t,x) \in G$ zu einem beliebigen aber festen $c \in \mathbb{R}$. Laut Vorlesung gilt für die Lösung also $F(t,x(t);c) = 0$ und der Parameter c ist durch die Bedingung, dass $F(1,x(1);c) = 0$ gelten soll, festgelegt. Das liefert $1/3 + 1 + c = 0$ also $c = -4/3$. Wir finden also $t^3/3 + tx^2 = 4/3$ als implizite Darstellung der Lösung. Diese Gleichung lösen wir nach x auf: $tx(t)^2 = (4-t^3)/3$ und, da $t > 0$, $x(t)^2 = (4-t^3)/(3t)$. Offenbar muss $4-t^3 > 0$, damit wir ein positives $x(t)^2$ und damit ein $x(t) \neq 0$ folgern können. Also ist $t < \sqrt[3]{4}$ zusätzlich zu $t > 0$ zu fordern. Radizieren liefert $x(t) = \sqrt{(4-t^3)/(3t)}$, wobei wir uns wegen $(t,x(t)) \in G$ auf das positive Vorzeichen beschränken dürfen. Wir finden also als Existenzintervall $t \in (0, \sqrt[3]{4})$. Da $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ Teilmenge von ∂G, können wir die Lösung nicht weiter nach links ausdehnen und zusätzlich gilt $\limsup_{t \to 0^+} |x|(t) = \infty$. Da ferner x bei $\sqrt[3]{4} = t$ nicht differenzierbar ist, ist die Differentialgleichung gar nicht definiert für x. Angenommen, es gäbe eine Lösung X für $t > \sqrt[3]{4}$. Dann erfüllt diese $t^3/3 + tX(t)^2 = 4/3$. Andererseits ist wegen $t > \sqrt[3]{4} > 0$ und $X(t)^2 > 0$ der Ausdruck $t^3/3 + tX(t)^2 > \sqrt[3]{4}^3/3 = 4/3$. Das steht im Widerspruch dazu, dass es eine auf $t > \sqrt[3]{4}$ definierte Lösung gibt, die $t^3/3 + X(t)^2 t = 4/3$ genügt. Damit ist in der Tat $I_{(1,1)} = (0, \sqrt[3]{4})$ das maximale Existenzintervall der eindeutig bestimmten und maximalen Lösung $\lambda_{(1,1)} : I_{(1,1)} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t) = \sqrt{(4-t^3)/(3t)}$.

Aufgabe 4 (a) Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto |y|$. Die Funktion f ist auf dem gesamten, offenen Definitionsbereich sogar global Lipschitz–stetig bzgl. des zweiten Arguments: Seien $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$ wegen der aus den Vorlesungen bekannten umgekehrten Dreiecksungleichung. Somit ist f global Lipschitz–stetig bzgl. des zweiten Arguments, insbesondere also lokal Lipschitz–stetig bzgl. der zweiten Arguments. Ferner ist f konstant bzgl. des ersten Arguments, also insbesondere eine stetige Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich. Zu guter Letzt ist der Definitionsbereich von f sogar ein Gebiet. Das Anfangswertproblem $y' = f(x,y), y(0) = 0$ hat nach dem globalen Existenz– und Eindeutigkeitssatz somit eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(0,0)} : I_{(0,0)} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda_{(0,0)}(x)$.
(b) Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{|y|}$. f hat offenen Definitionsbereich und ist wegen der Stetigkeit der Betrags– und Wurzelfunktion stetig auf dem gesamten Definitionsbereich. Der Existenzsatz von Peano liefert damit die Existenz von lokalen Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$, $y(0) = 0$. Diese Lösungen sind allerdings nicht eindeutig: Denn es gilt $f(x, y=0) = 0$ und $y(0) = 0$, so dass die konstante Funktion $\mu_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ das Anfangswertproblem löst. Andererseits ist durch die Funktion $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mu(t)$ mit $\mu(x) = x^2/4$ für $x \geq 0$ und $\mu(x) = -x^2/4$ für $x \leq 0$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems gegeben. Denn $\mu(0) = 0$ und es gilt $\mu'(x) = |x|/2$. Es ist aber zugleich $\sqrt{|\mu(x)|} = 2|x| = \mu'(x)$, so dass wir eine von μ_0 verschiedene Lösung des Anfangswertproblems gefunden haben. Folglich ist die Lösung des Anfangswertproblems nicht eindeutig. Offenbar nicht gefragt: Wählt man den Anfangswert $y(0)$ hingegen von 0 verschieden, kann man zumindest lokale Eindeutigkeit der Lösung mittels des qualitativen Satzes von Picard–Lindelöff bekommen, indem man den Definitionsbereich von f verkleinert. Globale Eindeutigkeit kann durch Zusammenstückeln widerlegt werden.
(c) Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y^2$. f ist zweimal stetig partiell

differenzierbar, somit gilt also $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. Laut Vorlesung genügt f damit insbesondere eine lokalen Lipschitz–Bedingung bzgl. der zweiten Variablen. Da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend, d.h., Gebiet, ist und ferner f auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig ist, hat das Anfangswertproblem $y' = f(x, y), y(0) = 0$ damit eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung. Da offenbar $\lambda_{(0,0)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ das Anfangswertproblem löst, ist die Nullfunktion die eindeutige, zunächst lokale, Lösung des Anfangswertproblems. Maximialität ergibt sich daraus, dass $\lambda_{(0,0)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und dort die betrachtete Differentialgleichung löst.

Aufgabe 5 Gesucht ist zunächst eine Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $x' = (x + t)^2$ mit $x(0) = 0$. Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto (t + x)^2$. Diese ist als Polynomfunktion in zwei Variablen insbesondere stetig partiell nach x differenzierbar und auf dem gesamten Definitionsbereich stetig. Da f stetig nach x partiell differenzierbar ist, genügt f einer lokalen Lipschitz–Bedingung bzgl. der zweiten Arguments. Als offene und zusammenhängende Menge ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ferner ein Gebiet und es gilt offensichtlicherweise $(t = 0, x(t = 0) = 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Damit ist der globale Existenz– und Eindeutigkeitssatz anwendbar, der die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösungen $\lambda_{(0,0)} : I_{(0,0)} \to \mathbb{R}$ des zu untersuchenden Anfangswertproblems liefert. Um diese zu berechnen, definieren wir eine neue Funktion durch $u(t) = x(t) + t$ und finden $u'(t) = 1 + x'(t) = 1 + ((t + x(t))^2) = 1 + (u(t))^2$. Ferner gilt $u(0) = 0 + x(0) = 0$. Das auf u transfomierte Anfangswertproblem lösen wir durch Trennung der Variablen. Da $1 + (u(t))^2 \geq 1 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ für eine reellwertige Funktion u erfüllt, finden wir $u(t)$ zu:

$$\int_0^{u(t)} \frac{dv}{1 + v^2} = \int_0^t dt \Leftrightarrow \arctan(u(t)) - \arctan(0) = t \Leftrightarrow u(t) = \tan t. \tag{232}$$

Die Äquivalenzumformung erfodern hierbei, dass $t \notin \{\pi/2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Damit wir ein Lösungsintervall I angeben können, so dass $0 \in I$, benötigen wir $t \in]-\pi/2, \pi/2[\equiv I$. $x(t)$ ergibt sich nun durch Rücktransformation $x(t) = u(t) - t = \tan t - t$. Wir überprüfen, dass $x(t)$ tatsächlich das Anfangswertproblem löst. Offenbar gilt $x(0) = \tan 0 - 0 = 0$ und durch Ableiten finden wir $x'(t) = 1/((\cos t)^2) - 1 = (1 - \cos(t)^2)/((\cos(t))^2) = (\tan(t))^2 = ((\tan(t) - t) + t)^2 = (x(t) + t)^2$ für alle $t \in] - \pi/2, \pi/2[$. Mithin haben wir durch $\lambda :] - \pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}, t \mapsto \tan t - t$ eine Lösung des Anfangswertproblems gefunden. Diese Lösung ist, da bereits die stärkeren Voraussetzungen des globalen Existenz und Eindeutigkeitssatzes gelten, nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz lokal eindeutig, falls wir auf ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset] - \pi/2, \pi/2[$ einschränken. Die Maximalität der Lösung ergibt sich aus dem Randverhalten: Es gilt nämlich $\limsup_{t \to \pi/2^-} |\lambda(t)| = \infty$, da der Tangens eine Polstelle bei $t = \pi/2$ hat. Ebenso gilt an der unteren Intervallgrenze des Existenzintervalls I, $\limsup_{t \to -\pi/2^-} |\lambda(t)| = \infty$, da der Tangens ebenfalls eine Polstelle bei $t = -\pi/2$ besitzt. In beiden Fällen ändert die Addition des endlichen $-t$'s am Randverhalten nichts. Der Satz über die Charakterisierung maximaler Lösungen sagt nun, dass $\lambda :] - \pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ tatsächlich die maximale Lösung des zu untersuchenden Anfangswertproblems ist.

Aufgabe 6 Definiere zunächst die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto p(t) \exp(x)$. Da p auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig und $\exp(x)$ sogar glatt auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist, ist f offenbar auf dem ganzen Definitionsbereich stetig. Ferner ist f infolge der Glattheit der Exponentialfunktion stetig partiell nach x differenzierbar. Laut einem Vorlesungsresultat genügt f also eine lokalen Lipschitz–Stetigkeits–Bedingung im zweiten Argument. Bekannt ist ferner, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend, also ein Gebiet, ist. Für beliebiges $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ liefert der globale Existenz–und Eindeutigkeitssatz also die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\lambda_{x_0} : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems. Dieses bestimmen wir mithilfe des Satzes über die Separation der Variablen. Da $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ finden wir die Lösung des Anfangswertproblems durch Lösen von

$$\int_{x_0}^{\lambda(t)} \frac{dx}{\exp(x)} = \int_0^t p(\tau) d\tau \tag{233}$$

nach $\lambda(t)$. Integration auf der linken Seite liefert links den Ausdruck $\exp(-x_0) - \exp(-\lambda(t))$. Damit finden wir

$$\exp(-x_0) - \int_0^t p(\tau) d\tau = \exp(-\lambda(t)). \tag{234}$$

Logarithmieren liefert nun den Kandidaten $\lambda(t) = -\ln\Big(\exp(-x_0) - \int_0^t p(\tau) d\tau\Big)$. Hierbei müssen wir auf $t < T$ mit $T > 0$ einschränken, wobei $\int_0^T p(\tau) d\tau = x_0$. Ableiten nach T liefert nun $p(T) = 0$ nach dem Hauptsatz der Analysis. Damit finden wir $t \in]\max\{T < 0 : p(T) = 0\}, \min\{T > 0 : p(T) = 0\}[\equiv I$. Wir fordern nun $\gamma \equiv \sup_{t \geq 0} \int_0^t p(\tau) d\tau < \infty$ und $1 > \exp(x_0)\gamma$. Durch Umschreiben der Lösung unter Verwendung der Logarithmus–Gesetze finden wir

$$\lambda(t) = x_0 - \ln\left(1 - \exp(x_0) \int_0^t p(\tau) d\tau\right). \tag{235}$$

Um die Existenz der Lösung für alle $t \geq 0$ sicherzustellen, muss also für alle $t \geq 0$ gelten

$$\exp(x_0) \int_0^t p(\tau) d\tau < 1. \tag{236}$$

Da aber sogar das Supremum des obenstehenden Ausdrucks nach Annahme in Teil (b) kleiner als 1 ist, existiert die Lösung nun für alle $t \geq 0$. Wir zeigen noch, dass (235) tatsächlich das Anfangswertproblem löst. Es gilt $\lambda(0) = x_0 - \ln(1) = x_0$ und durch Ableiten unter Verwendung des Hauptsatzes der Analysis bestätigen wir für $t \in I$

$$\lambda'(t) = \frac{p(t)}{\exp(-x_0) - \int_0^t p(\tau) d\tau} = \frac{p(t)}{\exp(-\lambda(t))} = p(t) \exp(\lambda(t)). \tag{237}$$

Aufgabe 7 zu (a): Diese Aussage ist falsch. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, dahe auf Kompakta eigentlich integrierbar, und es gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) dx = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} \big(1/2(R^2 - R^2)\big) = \lim_{R\to\infty} 0 = 0. \tag{238}$$

Andererseits ist f nicht uneigentlich integrierbar, denn angenommen, dass uneigentliche Integrale existiert, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}((b^2-a^2)/2) = \lim_{a\to-\infty}(\infty) = \infty\& \tag{239}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}((b^2-a^2)/2) = \lim_{b\to\infty}(-\infty) = -\infty, \tag{240}$$

im Widerspruch zur Existenz der Grenzwerts. □

zu (b): Diese Aussage ist richtig. Bezeichne $W \in \mathbb{R}$ den nach Aufgabenstellung endlichen Wert des uneigentlichen Integrals. Nach Definition des uneigentlichen Integrals existiert

$$W = \lim_{R\to-\infty, S\to\infty}\int_R^S f(x)dx \tag{241}$$

D.h., der Grenzwert existiert für jede Folge $(R_k, S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} R_k = -\infty$ und $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$:

$$W = \lim_{k\to\infty}\int_{R_k}^{S_k} f(x)dx. \tag{242}$$

Sei nun $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$. Offenbar konvergiert dann die Folge $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $R_k = -S_k$ für alle $k\in\mathbb{N}$ uneigentlich gegen $-\infty$. Die Folge $(R_k, S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liefert nun:

$$W = \lim_{k\to\infty}\int_{R_k}^{S_k} f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{-S_k}^{S_k} f(x)dx. \tag{243}$$

Da $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $S_k\to\infty$ uneigentlich für $k\to\infty$ beliebig war, folgt nun

$$W = \lim_{S\to\infty}\int_{-S}^{S} f(x)dx. \tag{244}$$

Die rechte Seite ist gerade der zu untersuchende Grenzwert. Die obenstehende Gleichung stellt nunmehr sicher, dass der zu untersuchende Grenzwert (im Sinne der Aufgabenstellung) existiert. □

zu (c): Diese Aussage ist falsch. Setze $I_1 = [0,1)$ und $I_{n+1} = [\sum_{k=1}^n 1/k, \sum_{k=1}^{n+1} 1/k)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Die dadurch defineirte Folge von Intervallen besteht aus disjunkten Intervallen, die eine Zerlegung von $[0,\infty)$ bilden. Definiere $f_n : I_n \to \mathbb{R}, x\mapsto \sin(2\pi n(x-\sum_{k=1}^{n-1} 1/k))$. Es gilt $\lim_{x\to 1/n^+} f_n(\sum_{k=1}^n 1/k) = 0$ und $f_n(\sum_{k=1}^{n-1} 1/k) = 0$ für $n\geq 2$ sowie $f_1(0) = 0 = f_1(1)$. Damit ist die Funktion $f : [0,\infty)\to\mathbb{R}, x\mapsto f(x)$ definiert durch $f(x) = f_n(x)$ falls $x\in I_n$ wohldefiniert und auf ganz $[0,\infty)$ stetig. Andererseits existiert $\lim_{x\to\infty}|f(x)|$ nicht, denn für die Folge $(a_n)_{n\to\infty}$ definiert durch $a_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ gilt $f(a_n) = 0$ für $n\in\mathbb{N}$ aber für $b_n = \sum_{k=1}^n 2/(k)$ gilt $|f(b_n)| = 1$. Das uneigentliche Integral von f existiert, denn sei $R > 1$ beliebig, dann gibt es ein

$n \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=1}^{n} 1/k < R \leq \sum_{k=1}^{n+1} 1/k$. Nun gilt wegen $\int_{I_n} f(x)dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Zerlegungseigenschaft von $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\int_0^R f(x)dx = \int_{\sum_{k=1}^{n} 1/k}^{R} f(x)dx = \frac{1 - \sin(2\pi n(R - \sum_{k=1}^{n})1/k)}{2\pi n}. \tag{245}$$

Der Limes $R \to \infty$ impliziert auch $n \to \infty$, und somit gilt

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sin(2\pi n(R - \sum_{k=1}^{n} 1/k))}{2\pi n} = 0, \tag{246}$$

insbesondere existiert also das uneigentliche Integral. Das ist aber ein Gegenbeispiel zur zu untersuchenden Aussage. $\square$

Aufgabe 8 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 4(x + y)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x^2 + y^2$. Beide Funktionen sind offenbar global C^2-regulär. Zu zeigen ist zunächst die Existenz eines globalen Maximums von f unter der Bedingung, dass $g(x, y) = 1$. Wir stellen zunächst fest, dass $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = g(x, y) = 1\}$ eine ein-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist. Hierfür verbleibt nur noch zu zeigen, dass $(\nabla g)(x, y) \neq (0, 0)^T$ für alle $(x, y) \in M$. Da $(\nabla g)(x, y) = (2x, 2y)$ folgt wegen $\|\nabla g(x, y)\| = 2\sqrt{2}g(x, y) = 2\sqrt{2} \neq 1$ für alle $(x, y) \in M$ die Behauptung $(\nabla g)(x, y) \neq (0, 0)^T$ für alle $(x, y) \in M$. Definiere nun $\psi : [0, 2\pi) \to M, \phi \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$. Wegen $\|\psi(t)\| = 1$ für alle $t \in [0, 2\pi)$ ist die Abbildung wohldefiniert. Dies ist eine Paramterisierung von M, und aus den Vorlesungen als Polarkoordinaten bekannt. Wir zeigen nun, dass $g \equiv f \circ \psi : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, t \mapsto 4(\cos t + \sin t)$ ein globales Maximum hat. Offenbar kann g mindestens C^2-regulär auf $[0, 2\pi]$ fortgesetzt werden, da g eine Verknüpfung von auf ganz $\mathbb{R}$ glatten Funktionen ist. Bezeichne diese Fortsetzung mit $G : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Ferner ist $[0, 2\pi]$ kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$. Da G insbesondere stetig ist, liefert das Maximumsprinzip für Funktionen einer reellen Variablen nun die Existenz eines $\chi \in [0, 2\pi]$, so dass G dort seinen maximalen Wert annimmt. Wegen $G(0) = G((1, 0)) = G(2\pi)$ folgt damit also auch die Existenz einer globalen Maximums von $g = G|_{[0,2\pi)}$. Da g als stetig differenzierbar auf dem ganzen Definitionsintervall festgestellt wurde, sei zuächst $t \in [0, 2\pi)$ kritischer Punkt von g. Dann gilt $d_t g(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = \cos(t)$. Diese Gleichung kann nur erfüllt werden falls $t \in \{\pi/4, 5\pi/4\}$, wegen der 2π-Periodizität der Sinus- und Cosinus-Funktion. Also ist $t = \pi/4$ oder $t = 5\pi/4$ Kandidat für das gesuchte Maximum. Nun gilt $g(\pi/4) = 4(\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)) = 4\sqrt{2}$ und $g(5\pi/4) = 4(\cos(5\pi/4) + \sin(5\pi/4)) = -4(\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)) = -4\sqrt{2}$. Insbesondere gilt $g(5\pi/4) < g(\pi/4)$, so dass bei $t = \pi/4$ das globale Maximum von g liegt. Damit ist $\psi(t = \pi/4) = (\sqrt{2}^{-1}, \sqrt{2}^{-1}) \in M$ die Maximalstelle von f. Ferner gilt $f(\sqrt{2}^{-1}, \sqrt{2}^{-1}) = g(\pi/4) = 4\sqrt{2}$, so dass wir auch den Wert von f an der globalen Maximalstelle gefunden haben. $\square$

Aufgabe 9 Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^∞-Vektofeld so dass $\langle v(x), x\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ für alle x mit $x \in S_1^{n-1}(0_{\mathbb{R}^n})$ gilt. Zu zeigen ist, dass die maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ von $\dot{x} = v(x)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$, wobei $x_0 \in S_1^{n-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n})$ erstens auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und zweitens $\|\lambda\|_2(t) = 1$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$. Abgenommen, $I \subsetneq \mathbb{R}$. v ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist und als C^∞-Vektorfeld insbesondere auf dem kompletten Definitionsbereich $\mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Zudem ist $\mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, also Gebiet. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert uns zu dem vorgegebenen Anfangswertproblem die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, welches nach Annahme nicht ganz $\mathbb{R}$ ist. Insbesondere ist die erste Ableitung $\lambda' : I \to \mathbb{R}^n$ wegen $\lambda' = v \circ \lambda$ auf I selbst glatt. Da λ maximale Lösung ist, können wir λ über sein Randverhalten auf ∂I charakterisieren. Da $\partial(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n) = \emptyset$ und I von $\mathbb{R}$ verschieden ist, bleibt nur die Möglichkeit, dass $\limsup_{t \to t_\partial} \|\lambda(t)\| = \infty$ für einen beliebigen Randpunkt $t_\partial \in \partial I$ des Existenzintervalls der maximalen Lösung. Dies kann wie folgt ausgeschlossen werden: Man definiert $w(x) = v(x/\|x\|) : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}^n$ ein weiteres C^∞-Vektorfeld auf dem Gebiet $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ und ist auf dem gesamten Definitionsbereich ferner glatt und lokal Lipschitz-stetig. Es gilt $\langle w(x), x \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ und ferner $w(x) = v(x)$ für alle $x \in S_1^{n-1}(0_{\mathbb{R}^n})$, inbesondere also für $x = x_0$. Es hat das Anfangswertproblem $\dot{x} = w(x)$ mit $x(0) = x_0$ eine maximale Lösung $\mu : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, welche wegen der obigen Beobachtungen mit λ übereinstimmt, falls $\mu(t) \in S_1^{n-1}(0_{\mathbb{R}^n})$ für alle $t \in J = \mathbb{R}$ (das wegen Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen) gilt. Nun gilt für alle $t \in J \subseteq \mathbb{R}$ zunächst $d_t \|\mu(t)\|^2 = 2\langle w(\mu(t)), \mu(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$, denn $\langle w(x), x \rangle = 0$ für nicht-verschwindende $x \in \mathbb{R}^n$. Also gibt es ein $c \in \mathbb{R}_0^+$ so dass $\|\mu(t)\|^2 = c$ für alle $t \in J$. Da $0 \in J$ und $\mu(0) = x_0$, folgt $c = \|x_0\|^2 = 1^2 = 1$, also $\|\mu(t)\|^2 = 1 \Rightarrow \|\mu(t)\| = 1$ für alle $t \in J$. Wäre nun $J \neq \mathbb{R}$, dann müsste $\mu : J \to \mathbb{R}^n$ mit dem analogen Argument zu oben $\limsup_{t \to t_\partial} \|\mu(t)\| = \infty$ für einen beliebigen Punkt $t_\partial \in \partial J \subset \mathbb{R}$ erfüllen. Letzteres ist aber ein Widerspruch zu $\|\mu(t)\| = 1$ für alle $t \in J$. Also gilt $J = \mathbb{R}$. Da nun gilt $\mu'(t) = w(\mu(t)) = v(\mu(t))$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\mu(0) = x_0$ haben wir über das Hilfsproblem eine Lösung μ der ursprünglichen Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$, die der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ ($\|x_0\| = 1$) genügt, gefunden. Diese existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und stimmt deswegen mit der maximalen Lösung λ überein, $\lambda = \mu$. Ferner gilt $\|\mu(t)\|_2 = \|\lambda(t)\|_2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so dass die maximale Lösung auch die geforderte Zusatzeigenschaft hat. □

Aufgabe 10 Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit $\langle f(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zu zeigen ist, dass für jede auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ definierte Lösung $\phi : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ gilt: $\|\phi(t)\|_2$ ist konstant für alle $t \in J$ und dass jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung zu einer maximalen Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fortgesetzt werden kann. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $J \subset \mathbb{R}$ Lösungsintervall für die Lösung $\phi : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ so dass für ein $\tau \in J$ (existiert wegen Offenheit des Intervalls) gilt $x(\tau) = \xi$. Da f Lipschitz-stetig ist, ist f insbesondere lokal Lipschitz-stetig. Ferner ist $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Gebiet. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert nun die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung $\lambda_{\tau,\xi} : J_{\tau,\xi} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ des eben skizzierten Anfangswertproblems, wobei $J_{\tau,\xi}$ ein offenes Intervall und maximal in dem Sinne ist, dass jede Lösung des betrachteten Anfangswertproblems eine Einschränkung der maximalen Lösung $\lambda_{\tau,\xi}$ ist, insbesondere das dazugehörige Existenzintervall J die Inklusion $J \subseteq J_{\tau,\xi}$ erfüllt. Da $\lambda_{\tau,\xi}$ maximale Lösung, gilt $\phi = \lambda_{\tau,\xi}|_J$, d.h., die zu untersuchende Lösung $\phi : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ entsteht gerade durch Einschränkung der gefundenen maximalen Lösung von $J_{\tau,\xi}$ auf J. Es reicht zu zeigen, dass die durch $t \mapsto \|\lambda_{\tau,\xi}(t)\|_2^2$ definierte Funktion für die zugehörige maximale Lösung konstant für alle $t \in J_{\tau,\xi}$ ist. Dann ist $\|\lambda_{\tau,\xi}(t)\|_2^2|_J = \|\lambda_{\tau,\xi}|_J(t)\|_2^2 = \|\phi(t)\|_2^2$ konstant für alle $t \in J$, und wegen $\|\lambda_{\tau,\xi}(t)\|^2 = c \geq 0$ in dem Fall ist auch $\|\lambda_{\tau,\xi}(t)\| = \sqrt{c} \geq 0$ insbesondere konstant. Für die maximale Lösung $\lambda_{\tau,\xi}$ gilt insbesondere für alle $t \in J_{\tau,\xi}$: $\lambda'_{\tau,\xi}(t) = f(\lambda_{\tau,\xi}(t))$, sie ist also insbesondere differenzierbar. Ferner gilt $d_t\|\lambda_{\tau,\xi}(t)\|_2^2 = d_t\langle\lambda_{\tau,\xi}(t), \lambda_{\tau,\xi}(t)\rangle = \langle\lambda'_{\tau,\xi}(t), \lambda_{\tau,\xi}(t)\rangle + \langle\lambda_{\tau,\xi}(t), \lambda'_{\tau,\xi}(t)\rangle = \langle f(\lambda_{\tau,\xi}(t)), \lambda_{\tau,\xi}(t)\rangle + \langle\lambda_{\tau,\xi}(t), f(\lambda_{\tau,\xi}(t))\rangle = 2\langle f(\lambda_{\tau,\xi}(t), \lambda_{\tau,\xi}(t))\rangle = 0$, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt laut Voraussetzung an das Vektorfeld f $\langle f(x), x\rangle = 0$. Also gibt es wegen Definitheit des euklidischen Skalarprodukts ein $c \geq 0$ so dass $\|\lambda_{\tau,\xi}(t)\|_2^2 = c \geq 0$ für alle $t \in J_{\tau,\xi}$. Radizieren liefert nun $\|\lambda_{\tau,\xi}(t)\|_2 = \sqrt{c}$ für alle $t \in J_{\tau,\xi}$ und Einschränkung auf J liefert gemäß den eingangs gemachten Bemerkungen $\|\phi(t)\|_2 = \sqrt{c}$, also dass die euklidische Norm der Lösung $\phi : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ konstant ist. Es verbleibt nun zu zeigen, dass für die Existenzintervalle maximaler Lösungen zu beliebigem $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $J_{\tau,\xi} = \mathbb{R}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Maximalität von $\lambda_{\tau,\xi}$ äquivalent durch das Randverhalten den Lösung $\lambda_{\tau,\xi}$ charakterisiert werden kann. Nehmen wir an, $J_{\tau,\xi} = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $a < b$. Wir zeigen $a = -\infty, b = \infty$. Zunächst gilt $\xi \neq 0$, also $\|\xi\|_2 > 0$ wegen Nicht-Degenerierthart der euklidischen Norm, also $\|\lambda_{\tau,\xi}\|_2 > 0$. Angenommen, $a \neq -\infty$. Dann ist $a \in \mathbb{R}$. Es gilt für den Teil-Graphen $\Gamma_-(\lambda_{\tau,\xi}) = \{(t, \lambda_{\tau,\xi}) \in (a, 0) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Insbesondere liegt $\Gamma_-(\lambda_{\tau,\xi}) \subseteq \{(t, x) \in [a, 0] \times \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : 0 < \|\xi\|_2^2/4 \leq \|x\|_2 \leq 9\|\xi\|_2^2/4 < \infty\}\}$, also in einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass $\mathbb{R} \times \{0\} \cap \Gamma_-(\lambda_{\tau,\xi}) = \emptyset$. Damit steht aber die Endlichkeit von a im Widerspruch zum zur Maximalität äquivalenten Randverhalten der Lösung $\lambda_{\tau,\xi}$. Also war die Annahme $a \neq -\infty$ falsch und es gilt $a = +\infty$. Analog sieht man, dass $b \neq \infty$ den zur Maximalität der Lösung äquivalenten Möglichkeiten für das Randverhalten der Lösung widerspricht. Also war die Annahme $b \neq \infty$ falsch. Somit ist nur noch $a = -\infty, b = \infty$ möglich und wir erhalten die maximale Lösung $\lambda_{\tau,\xi} : J_{\tau,\xi} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wie gefordert. □

Aufgabe 11 Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vermöge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{2n}/(1+x^{2n})$. Wir definieren ferner die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, wobei $f(x) = 1$ falls $|x| > 1$, $f(x) = 1/2$ falls $|x| = 1$ und $f(x) = 0$ falls $|x| < 1$. Nun behaupten wir $\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$. Sei zum Beweis $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

- *Fall 1:* $|x| = 1$. Dann gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^{2n}/(1 + x^{2n}) = |x|^{2n}/(1 + |x|^{2n}) = 1^{2n}/(1 + 1^{2n}) = 1/(1 + 1) = 1/2$. Also ist $(f_n(1) = 1/2)_{n\in\mathbb{N}}$ konstante Folge in $\mathbb{R}$ und für den Grenzwert gilt entsprechend $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1/2 = f(x)$ für $x \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow |x| = 1$.

- *Fall 2:* $|x| < 1$. Wir halten zunächst fest, dass $0 \leq f_n(x) = x^{2n}/(1 + x^{2n}) = |x|^{2n}/(1 + |x|^{2n}) \leq |x|^{2n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, denn $1 + |x|^{2n} \leq 1$ in diesem Fall. Für beliebiges, aber festes x gemäß Fallvoraussetzung, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = |x|^{2n}$ eine Nullfolge. Das Quetschlemma liefert nun, dass $0 \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} |x|^{2n} = 0$, also $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ für die betrachteten $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

- *Fall 3:* $|x| > 1$. In diesem Fall gilt insbesondere $x \neq 0$, so dass $f_n(x) = x^{2n}/(1 + x^{2n}) = 1/(1 + 1/x^{2n}) = 1/(1 + |y|^{2n})$, wobei $y = 1/x$ definiert wurde und $|x| > 1$ zu $0 < |y| < 1$ äquivalent ist. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte konvergenter Folgen folgt aus $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = (y^{2n})$ für festes aber beliebiges $y \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, dass $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} 1/(1 + |y|^{2n}) = 1 = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$.

Insgesamt ist damit die punktweise Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Grenzfunktion f nachgewiesen. Wir zeigen nun, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allerdings nicht gleichmäßig gegen f konvergiert. Angenommen, $(f_n)_{n\to\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f auf $\mathbb{R}$. Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$, insbesondere also in $x = +1$, stetig. Laut Vorlesung ist die Grenzfunktion f einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge stetiger Funktionen ebenfalls stetig. Also ist f insbesondere bei $x = 1$ stetig. Andererseits gilt $f(1) = 1/2$ und $\lim_{n\to\infty} f(1 - 1/n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = f(\lim_{n\to\infty}(1 - 1/n)) = f(1)$ infolge Stetigkeit der Grenzfunktion. Aber $1/2 \neq 0$, so dass die Grenzfunktion nicht stetig ist. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergierte gleichmäßig gegen f auf $\mathbb{R}$. Sei zuletzt $q \in [0, 1)$ und $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq q\}$. Wir behaupten, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leq f_n(x) \leq q^{2n}$ gilt für $n > 0.5 \cdot \ln\epsilon/\ln q$, dass $q^{2n} < \epsilon$. Setze also $N \equiv \lceil 0.5 \cdot \ln\epsilon/\ln q \rceil$. Unter Beachtung von $f(x) = 0$ für alle $x \in A \subset [0, 1)$ gilt für alle $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = f_n(x) < \epsilon$ für beliebiges $x \in [0, q]$ mir beliebigem $q \in [0, 1)$. Mithin konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig gegen f. $\square$

Aufgabe 12 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f'(t) \geq f(t)$ für alle $t \geq 0$ sowie $f(0) \geq 1$. Zunächst zeigen wir, dass f auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend ist. Zunächst gilt $f'(0) \geq f(0) \geq 1 > 0$. Da f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R}$ stetig. Der Zwischenwertsatz liefert eine in $[0, \infty)$ relativ offene Umgebung U der 0, so dass $f(t) > 0$ für alle $t \in U$, da $f(0)$ insbesondere größer 0. Die Eigenschaft $f'(t) \geq f(t)$ liefert nun, dass für $t \in U$ insbesondere $f'(t) > 0$. Für $t, \tau \in U$ mit $t > \tau$ beliebig finden wir mittels Mittewertsatz der Differentialrechnung $f(t) - f(\tau) = f'(\xi)(t - \tau) \geq f(\xi)(t - \tau) > 0$ mit $\xi \in (\tau, t) \subset U$. Also ist f in U streng monoton steigend. Wir zeigen nun, dass $U = [0, \infty)$. Die Inklusion $U \subseteq [0, \infty)$ ist klar. Für die Inklusion $U \supseteq [0, \infty)$ reicht es aus, zu zeigen, dass $U \neq [0, \infty)$ nicht auftreten kann. Angenommen, $U \neq [0, \infty)$. Dann ist U von der Form $U = [0, a)$ mit $a > 0$, denn $0 \in U$ nach Konstruktion und U relativ offen in $[0, \infty)$. Bekannt ist ferner, dass f auf U streng monoton wachsend ist und $f'(t) \geq f(t) > 0$. Da f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, gilt $\lim_{t\to a^-} f(x) = f(a)$ und $f(t) > 0$ liefert nun $f(a) > 0$. Gäbe es ein $t \in U$, so dass $f(a) - f(t) < 0$, dann gibt es nach Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in (t, a) \subset U$, so dass $0 > f(a) - f(t) = f'(\xi)(a - t) \geq f(\xi)(a - t) > 0$. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $a \in U$, so dass nur $U = [0, a]$ möglich ist. Da aber $f(a) > 0$ finden wir auch zu a nach dem Zwischenwertsatz eine relativ offene Umgebung $U_a \subseteq [0, \infty)$, so dass wir die Konstruktion am Anfang wiederholen können. Das ist ein Widerspruch zur Endlichkeit von a und es folgt $a = \infty$, so dass insgesamt $U = [0, \infty)$. Wir schätzen in einem zweiten Schritt f auf $[0, \infty)$ nach unten ab, indem wir $f(t) \geq \exp(t)$ zeigen. Für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt zunächst, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, $g(0) = 1 \leq f(0)$ und $g'(t) = g(t)$ befriedigt. Definiere nun $h = f - g$. Dann gilt auf $[0, \infty)$, dass $h' = f' - g' \geq f - g = h$ und $h(0) = f(0) - g(0) \geq 0$, also insbesondere $h'(0) \geq 0$. Wir zeigen nun $h(t) \geq 0$ für alle $t \in (0, \infty)$. Angenommen, es gäbe ein $t \in (0, \infty)$, so dass $h(t) < 0$. Dann gibt es eine in in $(0, \infty)$ offene Umgebung V von t, so dass $h(s) < 0$ für alle $s \in V$. Nun gilt $0 > h(t) - h(0) = h'(\tau)\tau$, also $h'(\tau) < 0$ für $\tau \in (0, t)$. Damit folgt aber auch $0 > h'(\tau) \geq h(\tau)$ für alle $\tau \in (0, t)$. Lassen wir $t \to 0^+$, so liefert die Abschätzung $h(0) < 0$ im Widerspruch zu $h(0) \geq 0$. Also gibt es zumindest eine relativ offene Umgebung V_0 der 0 in $[0, \infty)$, so dass $h(t) \geq 0$. Da $[0, \infty)$ zusammenhängend, reicht es zu zeigen, V_0 auch relativ abgeschlossen in $[0, \infty)$ ist. Wegen $V_0 \neq \emptyset$ ist dann $V_0 = [0, \infty)$. Wegen $0 \in V_0$ setzen wir $V_0 = [0, a)$ an, ggf. beschränkt man die Umgebung von 0 auf eine zusammenhängende Umgebung. Nun gilt aber $0 \leq h(t)$ auf $[0, a)$, so dass $h(a) = \lim_{t \to a^-} h(t) \geq 0$ infolge Stetigkeit von h auf $\mathbb{R}$. Also ist V_0 sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen in $[0, \infty)$ und damit $V_0 = [0, \infty)$. Also ist $h(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$, und somit $f(t) \geq g(t) = \exp(t)$, was zu zeigen war.

Geht einfacher durch Integration, s. H07T2A4, denn Ableitungsfunktion ist auf jeden Fall integrierbar. □

Aufgabe 13 Gegeben ist die Differentialgleichung

$$d_t^4 x + 2d_t^2 x + x = 0. \tag{247}$$

Gesucht sind alle reelwertigen Lösungen, die beschränkt sind. Hierbei handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung von Ordnung vier mit konstanten Koeffizienten, die ferner homogen ist. Der zur Differentialgleichung gehörige Lösungsraum ist ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Lösungen der Differentialgleichung sind des wegen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für lineare Differentialgleichungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da dies das Stetigkeitsgebiet der (konstanten) Koeffizienten ist. Die Bestimmung des für die Konstruktion der allgemeinen Lösung erforderlichen, vierelementigen Fundamentalsystems erfolgt durch Exponentialansatz: Setze $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x(t) = \exp(\mu t)$, $C \in \mathbb{C}$ und $\mu \in \mathbb{C}$ Nullstellen der resultierenden quartischen Gleichung nach Einsetzen. Die so zu erhaltenden Funktionen sind mindestens viermal differenzierbar. Einsetzen liefert die Gleichung $(\mu^4 + 2\mu^2 + 1)\exp(\mu t) = 0$. Da die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sogar strikt positive Funktion ist, ist die letzte Gleichung äquivalent zu $\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = (\mu^2 + 1)^2 = 0$. Wir finden also, dass $\mu \in \{+i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$. Da beide Nullstellen jeweils Ordnung 2 haben, verwenden wir das Resultat aus der Vorlesung, dass neben $t \mapsto \exp(it), t \mapsto \exp(-it)$ auch $t \mapsto t\exp(it)$ und $t \mapsto t\exp(-it)$ Lösungen definieren. Reellwertigkeit erlaubt uns statt der betrachteten komplexwertigen Exponentialfunktionen auch geeignete Linearkombinationen (über $\mathbb{C}$) als Basis-Kandidat des Lösungsraums der zu untersuchenden Differentialgleichung zu nehmen. Setze also $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \cos t$, $\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(t)$, $\Phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t \sin t$ und $\Phi_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t \sin t$. Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_2'(t) = \cos(t),\ \Phi_2''(t) = -\sin(t),\ \Phi_2'''(t) = -\cos(t),\ \Phi_2^{(4)}(t) = \sin(t) \tag{248}$$

$$\Phi_1'(t) = -\sin(t),\ \Phi_1''(t) = -\cos(t),\ \Phi_1'''(t) = \sin(t),\ \Phi_1^{(4)}(t) = \cos(t) \tag{249}$$

$$\Phi_3'(t) = \cos(t) - t\sin(t),\ \Phi_3''(t) = -2\sin(t) - t\cos(t), \tag{250}$$

$$\Phi_3'''(t) = -3\cos(t) + t\sin(t),\ \Phi_3^{(4)}(t) = 4\sin(t) + t\cos(t) \tag{251}$$

$$\Phi_4'(t) = \sin(t) + t\cos(t),\ \Phi_3''(t) = 2\cos(t) - t\sin(t), \tag{252}$$

$$\Phi_4'''(t) = -3\sin(t) - t\cos(t),\ \Phi_4^{(4)}(t) = -4\cos(t) + t\sin(t), \tag{253}$$

so dass $d_t^4\Phi_i(t) + 2d_t^2\Phi_i(t) + \Phi_i(t) = 0$ für alle $i \in \{1,2,3,4\}$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Es handelt sich also tatsächlich um Lösungen der Differentialgleichung, die zu untersuchen ist. Um zu zeigen, dass diese tatsächlich linear unabhängig sind, berechnen wir die Wronski-Detreminante $W(t) \equiv W[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4](t = 0)$ an der Stelle $t = 0$. Es gilt mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) & \Phi_3(0) & \Phi_4(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) & \Phi_3'(0) & \Phi_4'(0) \\ \Phi_1''(0) & \Phi_2''(0) & \Phi_3''(0) & \Phi_4''(0) \\ \Phi_1'''(0) & \Phi_2'''(0) & \Phi_3'''(0) & \Phi_4'''(0) \end{pmatrix} \tag{254}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{255}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{256}$$

$$= 4 - 2 \tag{257}$$

$$2 \neq 0, \tag{258}$$

weswegen die vier gefundenen Lösungen nun tatsächlich linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. Aus Dimensionsgründen spannen sie also den Lösungsraum $\mathcal{L}$ der Differentialgleichung auf, $\mathcal{L} = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\}$. Da nur nach denjenigen Lösungen gefragt ist, die beschränkt sind, also nach denjenigen $\Phi \in \mathcal{L}$, so dass $\|\Phi(t)\| \leq C$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten C in $\mathbb{R}$, scheiden Φ_3, Φ_4 aus: Diese sind unbeschränkt. Also gilt $\Phi \in \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{\Phi_1, \Phi_2\}$, so dass die allgemeinste, reellwertige und beschränkte Lösung von der Form

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto A\Phi_1(t) + B\Phi_2(t) = A\sin(t) + B\cos(t) \tag{259}$$

ist mit reellen A, B.

Aufgabe 14 Gesucht sind nun alle Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto u(t)$ der Differentialgleichung $u'' - 10u' + 34u = 0$ zusammen mit den Randbedingungen (a) $u(0) = 0, u(\pi/2) = 1$, (b) $u(0) = 0, u(\pi) = 1$, (c) $u(0) = 0, u(\pi) = 0$. Wir bestimmen das Fundamentalsystem wiederum durch Exponentialansatz. Das liefert das Fundamentalsystem $\mathcal{F} \equiv \{\Phi_1, \Phi_2\}$, wobei $\Phi_1(t) = \exp(5t)\sin(3t)$ und

$\Phi_2(t) = \exp(5t)\cos(3t)$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, irrespektive der Randbedingungen, lautet nun $\Phi(t) = A\Phi_1(t) + B\Phi_2(t)$ mit reellen A, B. Letztere werden nun für die drei Fälle aus den Randbedingungen bestimmt.

- *Fall (a)* Da $\Phi(0) = 0$ folgt $0 = A\Phi_1(0) + B\Phi_2(0) = B \cdot 1$, also $B = 0$. Damit gilt $\Phi(t) = A\Phi_1(t) = A\exp(5t)\sin(3t)$. Zusätzlich soll $\Phi(\pi/2) = 1$, so dass $A\Phi_1(\pi/2) = 1 \leftrightarrow A\exp(15\pi/2)\sin(3\pi/2) = 1 \Leftrightarrow A = -\exp(15\pi/2)$. Somit haben wir die eindeutige Lösung des Randwertproblems gefunden als definiert durch $\Phi(t) = -\exp(-15\pi/2 + 5t)\sin(3t)$.

- *Fall (b)* Da wiederum $\Phi(0) = 0$ folgt $\Phi(t) = A\exp(5t)\sin(3t)$. Wegen $\sin(k \cdot \pi) = 0$ für alle ganzzahligen k, liefert die zweite Randbedingung, $\Phi(\pi) = 1$ den Widerspruch $A\exp(-5\pi)\cdot 0 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$. Folglich hat dieses Randwertproblem keine Lösung.

- *Fall (c)* Wiederum legt $\Phi(0) = 0$ fest, dass Φ durch $\Phi(t) = A\exp(5t)\sin(3t)$ definiert wird. Nun liefert aber die Bedingung $\Phi(\pi) = 0$ für alle reellen A, $A\exp(5\pi) \cdot 0 = 0$, da $\sin(k \cdot \pi) = 0$ für alle ganzzahligen k. Insofern existiert ein eindimensionaler Lösungsraum $\mathcal{L}$ des Randwertproblems, bestehend aus allen Funktionen der Form $\Phi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto A\exp(5t)\sin(3t)$ mit reellem A.

□

Aufgabe 15 Gegeben sei die quadratische Matrix $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{260}$$

Gesucht sind alle Lösungen der Differentialgleichung $x' = Ax$, so dass $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Wir stellen zunächst fest, dass dieses System von Differentialgleichungen erster Ordnung homogen und mit konstanten Koeffizienten ist, die Lösung aber eine $\mathbb{R}^3$-wertige Funktion ist. Dieses System ist ist äquivalent zur skalaren, linearen, homogene Differentialgleichung $y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$ mit konstanten Koeffizienten und der Ordnung 3 für eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die mindestens dreimal stetig differenzierbar ist. Dabei gilt nun $x(t) = (y(t), y'(t), y''(t))^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Durch Exponentialansatz $y(t) = \exp(\mu t)$ finden wir, dass für den Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ wegen der strikten Positivität der Exponentialfunktion die kubische Gleichung $\mu^3 + \mu^2 + \mu + 1 = 0$ gilt. Eine Nullstelle finden wir durch Ausprobieren: $\mu = -1$. Polynom-Division liefert nun $(\mu + 1)(\mu^2 + 1) = \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1 = 0$. Damit finden wir, dass die verbleibenden Nullstellen gegeben sind durch $\mu_+ = i, \mu_- = -i$. Damit finden wir nach geeigneter Linearkombination des resultierenden komplexwertigen Fundamentalsystems, dass $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \exp(-t)$, $\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(t)$ und $\Phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \cos(t)$ ein reellwertiges Fundamentalsystem der skalaren Differentialgleichung für y bildet. Denn $\Phi_1^{(k)}(t) = (-1)^k \exp(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \{1, 2, 3\}$ und $\Phi_2'(t) = -\Phi_2^{(3)}(t) = \cos(t)$ sowie $\Phi_2''(t) = --\sin(t) = \Phi_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und schließlich $\Phi_3'(t) = -\Phi_3^{(3)}(t) = -\sin(t)$ und $\Phi_3''(t) = -\cos(t) = -\Phi_3(t)$. Man sieht nun leicht, dass tatsächlich jede der Funktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 eine Lösung der Differentialgleichung $y''' + y'' + y' + y = 0$ ist auf ganz $\mathbb{R}$. Da der Lösungsraum zu einer skalaren linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung 3 dreidimensional ist, müssen wir nur noch überprüfen, dass die gefundenen Funktionen linear unabhängig sind. Dann ist der Nachweis der Fundamentalsystemeigenschaft für $M = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ erbracht. Für den Nachweis der linearen Unabhängigkeit reicht es aus, die Wronski-Determinante $W(t) = W[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3](t)$ zu berechnen, und nach einem Resultat aus der Vorlesung sogar, dies bei $t = 0$ zu tun. Falls $W(0) \neq 0$ liefern die aus der Vorlesung bekannten Sätze die lineare Unabhängigkeit von M. Es gilt nach Definition der Wronski-Determinante tatsächlich:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) & \Phi_3(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) & \Phi_3'(0) \\ \Phi_1''(0) & \Phi_2''(0) & \Phi_3''(0) \end{pmatrix} \tag{261}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{262}$$

$$= -1 - 1 = -2 \neq 0. \tag{263}$$

Damit haben wir tatsächlich drei linear unabhängige Funktionen gefunden, die die Differentialgleichung jeweils lösen. Aus Dimensionsgründen wird der Lösungsraum der skalaren Differentialgleichung nun von Φ_1, Φ_2, Φ_3 über $\mathbb{R}$ aufgespannt. Mit der Äquivalenz des Differentialgleichung für y zu dem Differentialgleichungssystem für x vermöge $x(t) = (y(t), y'(t), y''(t))$, finden wir, dass eine allgemeine Lösung $x(: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Differentialgleichungssystem von der Form

$$x(t) = (A\Phi_1(t) + B\Phi_2(t) + C\Phi_3(t), A\Phi_1'(t) + B\Phi_2'(t) + C\Phi_3'(t), A\Phi_1''(t) + B\Phi_2''(t) + C\Phi_3''(t)) \tag{264}$$

$$= A(1, -1, 1)\exp(-t) + B(\sin(t), \cos(t), -\sin(t)) + C(\cos(t), -\sin(t), -\cos(t)) \tag{265}$$

mit rellen A, B, C ist. Um den (wohldefinierten Limes) $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ zu gewährleisten, der von den hier gesuchten Lösungen x gefordert wird, muss $B = 0 = C$. Also ist die allgemeine Lösung, die die in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften hat, gegeben durch die Gesamtheit aller x_A mit

$$x_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto A(1, -1, 1)\exp(-t), \tag{266}$$

wobei $A \in \mathbb{R}$ eine beliebige aber feste relle Zahl ist. $\square$

Aufgabe 16 Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}\cos(t)$, $x(0) = c$, wobei $c \in [0, \infty)$. Wir vereinbaren für diese Aufgabe, dass eine globale Lösung hier stets eine Lösung bezeichnet, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiertist. Wir bemerken insbesondere, dass eine globale Lösung stets eine maximale Lösung des Anfangswertproblems zu vorgegebenem $c \in [0, \infty)$ ist. Die Umkehrung gilt, s. Charakterisierung maximaler Lösungenüber das Randverhalten, aber im Allgemeinen nicht. In Teilaufgabe (a) ist $c > 1$ zu verwenden. Wir schränken die rechte Seite der Differentialgleichung zunächst auf $D := \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ein, d.h., betrachten die rechte Seite gegeben durch die

Funktion $f : D \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto 2\sqrt{|x|}\cos t = 2\sqrt{x}\cos t$. Da f für beliebiges $(t,x) \in D$ in x stetig partiell differezierbar ist, $\partial_x f(t,x) = \cos t/\sqrt{x}$, genügt f also auf D eine lokalen Lipschitz-Bedingung. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz gewährleistet nun, dass eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\lambda_c : I_c \to \mathbb{R}^+$ des Anfangswertproblems existiert, wobei das maximale Existenzinterval $I_c \subset \mathbb{R}$ offen mit $0 \in I_c$ ist. Wir bestimmen die Lösung des Anfangswertproblems durch Trennung der Variablen. $x(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erlaubt, $\lambda(t)$ aus der folgenden Integralgleichung zu erhalten:

$$\int_{c=\lambda(0)}^{\lambda(t)} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^t d\tau \, \cos(\tau) \tag{267}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda(t)} - \sqrt{c} = \sin t - \sin 0 \tag{268}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda(t)} = \sqrt{c} + \sin t \tag{269}$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = (\sqrt{c} + \sin t)^2. \tag{270}$$

Wir zeigen nun, dass es sich bei dem so gefundenen $\lambda := \lambda_c$, definiert als Funktion$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tatsächlich um eine Lösung des zu betrachtenden Anfangswertproblems $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}\cos t$ für $(t,x) \in D$ handelt. Zunächst gilt $\lambda(t=0) = (\sqrt{c} + \sin 0)^2 = \sqrt{c}^2 = |c| = c$, da $c > 1 > 0$. Ferner gilt $\Gamma(\lambda) \subset D$, denn $\infty > (\sqrt{c}+\sin t)^2 \geq (\sqrt{c}-1)^2 > 0$. Also ist $\lambda_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, t \mapsto (\sqrt{c} + \sin t)^2$ tatsächlich ein Lösungskandidat der gewünschten Form. Zu zeigen ist nur noch, dass λ_c die Differentialgleichung erfüllt. Dazu sehen wir für beliebiges $t > 0$, $\lambda_c'(t) = 2(\sqrt{c} + \sin t) \cdot \cos(t)$. Da mit $c > 1$ auch $\sqrt{c} > 1$ und $|\sin t| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_c'(t) = 2\sqrt{|(\sqrt{c} + \sin t)^2|}\cos t = 2\sqrt{|\lambda_c(t)|}\cos(t)$. D.h., $\lambda_c(t)$ erfüllt die geforderte Differentialgleichung für beliebiges reelles t und $c > 1$. Damit handelt es sich um eine, und nach der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie auch einzige, Lösung des Anfangswertproblems. Die Maximalität der Lösung λ_c ist für beliebiges $c > 0$ klar, da die Lösung bereits globale Lösung ist. In Aufgabenteil (b) sollen wir nun für jedes $0 < c \leq 1$ zwei verschiedene Lösungen angeben. Hierzu definieren wir die Differentialgleichung nicht auf D, sondern auf ganz $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir definieren ferner $E := \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ und $F : G \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto 2\sqrt{|x|}\cos t$. Sowohl E als auch G sind offen und zusammenhängend, also Gebiete. Allerdings ist F auf G nicht bzgl. des zweiten Arguments in $x = 0$ lokal Lipschitz-stetig. Denn $\lim_{x\to 0^+} \partial_x F$ und $\lim_{x\to 0^-} \partial_x F(t,x)$ sind beide $-\infty$ bzw. $+\infty$. Somit finden wir einen Widerspruch, wenn wir annähmen, es gäbe eine endliche, reelle lokale Lipschitz-Konstante. Auf E eingeschränkt ist F allerdings in x einmal stetig partiell differenzierbar auf ganz E, laut einem Vorlesungsresultat genügt es also einer lokalen Lipschitzbedingung. Damit kann für die Einschränkung der Differentialgleichung auf E wiederum die Existenz- und Eindeutigkeitstheorie bemüht werden, wenn ein geeigneter Anfangswert $(\tau, x(\tau) = \xi) \in E$ bemüht wird. Auf G hingegen können wir nur die Stetigkeit von F auf dem offenen G verwenden, um mit dem Existenzsatz von Peano auf die Existenz von lokalen Lösungen zu schließen. Diese brauchen aber nicht eindeutig zu sein. Die Bestimmungglobaler Lösungen für $0 < c \leq 1$ erfolgt nun per Fallunterscheidung

- *Fall 1* $c = 0$. In diesem Fall sehen wir,dass die konstante Lösung $\mu_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 0$ das Anfangswertproblem löst. Anderseits gilt, nachdem wir im in Teil

(a) erhaltenen λ_c formal $c=0$ setzen und als Funktionswerte ganz $\mathbb{R}$ zulassen, dass $\lambda_0 : (0,\pi) \to \mathbb{R}, t \mapsto (\sin t)^2$ ebenfalls $\lambda_0(0) = 0$ und $\lambda_0'(t) = 2\sin t \cos t = 2\sqrt{(\sin t)^2}\cos t = 2\sqrt{|\lambda_0(t)|}\cos t$. Wir finden also, dass

$$\Lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 0 & t \leq 0 \text{ oder } t \geq \pi \\ (\sin t)^2 & 0 < t < \pi \end{cases} . \tag{271}$$

eine weitere Lösung des Anfangswertproblems ist. Es ist nun $\lim_{t\to 0^-} \Lambda_0^{(k)}(t) = 0 = \lim_{t\to 0^+} \Lambda_0^{(k)}(t)$ und $\lim_{t\to\pi^-} \Lambda_0^{(k)}(t) = 0 = \lim_{t\to\pi^+} \Lambda_0^{(k)}(t)$ für alle $k \in \{0,1\}$, so dass Λ_0 auch die geforderte C^1-Regularität hat. Mit μ_0 und Λ_0 haben wir also zwei Lösungen gefunden.

- *Fall 2:* $c = 1$. In diesem Fall sehen wir, dass durch

$$\lambda_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} (1+\sin t)^2 & -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{272}$$

$$,\lambda_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} (1+\sin t)^2 & -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2 \\ (1+\sin t)^2 & 3\pi/2 < t < 5\pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{273}$$

zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems gegeben sind.

- *Fall 3:* $0 < c < 1$. In diesem Fall sehen wir, dass durch

$$\Lambda_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} (\sqrt{c}+\sin t)^2 & -\arcsin(\sqrt{c}) < t < \pi - \arcsin(\sqrt{c}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \tag{274}$$

$$\Lambda_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} (1+\sin t)^2 & -\arcsin(\sqrt{c}) < t < \pi - \arcsin(\sqrt{c}) \\ 0 & \pi - \arcsin(\sqrt{c}) \leq t \leq 4\pi - \arcsin(\sqrt{c}) \\ (\sqrt{c}+\sin t)^2 & 4\pi - \arcsin(\sqrt{c}) < t < 5\pi - \arcsin(\sqrt{c}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{275}$$

zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems gegeben sind.

Damit ist gezeigt, dass es in jedem der Fälle $0 \leq c \leq 1$ mindestens zwei globale Lösungen des Anfangswertproblems gibt. □

Aufgabe 17 Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \equiv Ax. \tag{276}$$

Gesucht sind zunächst alle Lösungen des Differentialgleichungssystems. Bei dem system handelt es sich um ein System homogener gewöhnlicher linearer Differentialgleichung, jeweils von erster Ordnung. Die Koeffizientenmatrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$.

Der Lösungsraum ist daher, im Falle lediglich reellwertiger Lösungen, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dreidimensional. Die Konstanz der Koeffizientenmatrix garantiert dabei nach der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie, dass die maximalen Lösungen x tatschlich auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, und, nach Spezifikation eines Anfangswertes, dann auch eindeutig festgelegt sind. Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A: Für das charakteristische Polynom χ_A der Matrix A gilt für komplexe z,

$$\chi_A(z) = \det(A - zE_3), \tag{277}$$

wobei E_3 die 3×3-Identitätsmatrix ist. Nach Beachtung der oberen Dreiecksgestalt der Matrix $A - xE_3$ liefert die Sarrus'sche Regel

$$\chi_A(z) = (-1 - z)^2(1 - z). \tag{278}$$

Mithin ist $\lambda_1 := -1$ eine Nullstelle der Ordnung 2 von χ_A und $\lambda_2 := 1$ eine Nullstelle der Ordnung 1 von χ_A. Dies sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A, die Ordnung der Nullstellen spezifiziert deren algebraische Vielfachheit. Unklar ist, ob algebraische und geometrische Vielfachheit zum Eigenwert λ_1 übereinstimmen, d.h., ob $\dim \operatorname{Eig}(A, \lambda_1) = 2$. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_1 E_3)v = 0$ für $v \in \mathbb{R}^3$. Wir finden:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{279}$$

Dieses lineare Gleichungssystem wird offenbar von allen $v \in \mathbb{R}^3$ erfüllt, für die gilt, dass $v = \kappa \cdot (1, 0, 0)$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Damit gilt $\dim \operatorname{Eig}(A, -1) = 1 < 2$. Die Matrix A ist also nicht diagonalisierbar. Nach dem Satz über die Jordan'sche Normalform gibt es aber eine linear unabhängige Menge von Vektoren $\{v_{11}, v_{12}, v_2\} \subset \mathbb{R}^3$, so dass A nach ähnlich zur folgenden Matrix ist:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, . \tag{280}$$

wobei $A = TJT^{-1}$ und T durch $T = (v_{11}, v_{12}, v_2)$ gegeben ist. Wir finden daher, dass die allgemeine Lösung x des Systems von Differentialgleichungen gegeben ist durch ($c \in \mathbb{R}^3$ konstant aber beliebig und aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen):

$$x(t) = \exp(At)c = T \exp(Jt)T^{-1}c \tag{281}$$

Wir berechnen dies zur Übung explizit: Es gilt

$$(A - \lambda_1 E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 02 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{282}$$

Es gilt also $K_2 := \dim \ker(A - \lambda_1 E_3)^2 = 2$ und eine Basis des zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums K_2 ist gegeben durch $\{w_{11} = (1, 0, 0)^T, w_{22} = (0, 1, 0)^T\}$. Da

$w_{11} \in \ker(A - \lambda_1 E_3)$,wählen für das algorithmische Bestimmen der generalisierten Eigenvektoren $v_{11} = w_{12} = (0, 1, 0)^T$ und $v_{12} = (A - \lambda_1 E_3)v_{12} = (1, 0, 0)^T$. Daher gilt:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{283}$$

Es gilt $Tr = E_3^{-1}$, also $T^{-1} = T$. Insofern finden wir

$$\begin{aligned} x(t) &= T \exp(Jt) T c \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \exp(-t) \\ c_1(\exp(-t) + t\exp(-t)) \\ c_3 \exp(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1(\exp(-t) + t\exp(-t)) \\ c_2 \exp(-t) \\ c_3 \exp(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{284}$$

Wir suchen nun die Gleichgewichtslösung. Sei $x_{\text{gw}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Gleichgewichtslösung. Dann gilt $d_t x_{\text{gg}} = (0, 0, 0)^T$. Also gilt $A x_{\text{gg}} = 0$. Da aber A bereits in Zeilenstufenform ist, folgt $x_{\text{gq}} = (0, 0, 0)^T$. Umgekehrt sieht man, dass $t \mapsto (0, 0, 0)^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$ tatsächlich eine Gleichgewichtslösung definiert, denn die Ableitung des konstanten Vektors verschwindet komponentenweise. Nun gilt, da A Matrix mit konstanten Koeffizienten ist, dass x_{ggw} instabil ist, denn $\gamma := \max\{\lambda \in \sigma(A) = \{-1, 1\}\} = \max\{-1, +1\} = 1$. Da $\Re[\gamma] > 0$ liefert uns der bekannte Satz zur Stabilitätsuntersuchung linear(isiert)er Systeme die Instabilität von x_{gw}. Damit ist x_{gw} insbesondere nicht stabil, also erst recht nicht asymptotisch stabil. $\square$

Aufgabe 18 Sei die Differentialgleichung $d_t^3 x + x = 0$ gegeben. Hierbei handelt es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Der Lösungsraum ist ein dreidimensionaler komplexer Vektorraum. Vermöge des Exponentialansatzes bestimmen wir die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung. Sei $\mu \in \mathbb{C}$. Es gilt $d_t \exp(\mu t) + \exp(\mu t) = 0 \Leftrightarrow (\mu^3 + 1) \exp(\mu t) = 0$. Da für alle $\mu \in \mathbb{C}$ gilt, dass $\exp(\mu t) \neq 0$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ ist die letzte Gleichung ferner äquivalent zu $\mu^3 + 1 = 0$. Wir finden eine Nullstelle der Polynomfunktion p, gegeben durch $p(\mu) = \mu^3 + 1$ für beliebiges $\mu \in \mathbb{C}$, durch Raten: Es gilt $p(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$, also ist $\mu_0 = -1$ eine Nullstelle. Polynomdividion liefert nun $(\mu + 1)(\mu^2 - \mu + 1) = (\mu^3 + 1) = p(\mu)$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$. Die Nullstellen der Polynomfunktion q, definiert durch $q(\mu) = \mu^2 - \mu + 1$ für beliebiges $\mu \in \mathbb{C}$, berechnen sich nach der Mitternachsformel zu $\mu_+ = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ und $\mu_- = 1/2 - i/2\sqrt{3}$. Eine komplexwertige Basis des Lösungsraums ist gegeben durch

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C},\, t \mapsto \exp(0.5t + i0.5\sqrt{3}t), \tag{285}$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C},\, t \mapsto \exp(0.5t - i0.5\sqrt{3}t), \tag{286}$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C},\, t \mapsto \exp(-t). \tag{287}$$

Wir wählen mit Blick auf den zweiten Teil der Aufgabe eine reellwertige Basis durch Linearkombination der ersten und zweiten Basisfunktionen aus der obenstehenden Liste.

$$\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto \exp(0.5t)\sin(0.5\sqrt{3}t), \tag{288}$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto \exp(0.5t)\cos(0.5\sqrt{3}t), \tag{289}$$

$$\Phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto \exp(-t). \tag{290}$$

Eine allgemeine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto x(t)$ der Differentialgleichung $d_t^3 x + x = 0$ ist mithin von der Form

$$x(t) = a\Phi_1(t) + b\Phi_2(t) + c\Phi_3(t) \tag{291}$$

mit generischerweise komplexen $a, b, c \in \mathbb{C}$. Sie können ggf. in nicht-eindeutiger Weise aus einem Anfangsvektor $(x(0), x'(0), x''(0)) \in \mathbb{C}^3$ bestimmt werden. Wir spezialisieren nun, dass $(x(0), x'(0), x''(0)) \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Koeffizienten aus der obigen Lösungsdarstellung $a, b, c \in \mathbb{R}$. Der Existenz- und Eindeutigeitssatz für homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten garantiert nun die Existenz einer eindeutigen Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des auf diese Weise definierten Anfangswertproblems. Gesucht sind nun alle $(x(0), x'(0), x''(0)) \in \mathbb{R}^3$, so dass $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$. Aus der obenstehenden Lösungsdarstellung sehen wir, dass lediglich im Falle $a = b = 0$ ein Grenzwert $\lim_{t\to 0} \lambda(t)$ existieren kann. Da ferner $\lim_{t\to\infty} \Phi_3(t) = \lim_{t\to\infty} \exp(-t) = 0$, folgt überdies, dass in dem beschriebenen Falle $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ gilt. Insofern kommen nur Anfangswerte $(x(0), x'(0), x''(0)) \in \mathbb{R}^3$ in Betracht, für die die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $d_t^3 \lambda + \lambda = 0$ mit $(\lambda(0), \lambda'(0), \lambda''(0)) = (x(0), x'(0), x''(0)) \in \mathbb{R}^3$ von der Form $\lambda(t) = a\exp(-t)$ mit reellem a ist. Für dieses λ gilt nun $\lambda'(t) = -a\exp(-t) = -\lambda(t)$ und $\lambda''(t) = -(\lambda'(t))' = \lambda(t)$. Also gilt $(\lambda(0), \lambda'(0), \lambda''(0)) = (a, -a, a)$. Dies gesuchten Anfangswerte $(x(0), x'(0), x''(0)) \in \mathbb{R}^3$ sind also von der Form $(x(0), x'(0), x''(0)) = (a, -a, a)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebiger freier Parameter ist. □

Aufgabe 19 Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ und μ n-facher Eigenwert von A. Zu zeigen ist zuerst, dass dann $(A - \mu E_n)^n = 0$. Da μ n-facher Eigenwert ist, gilt für das charakteristische Polynom von A, $\chi_A(z) = (z - \mu)^n$. Für das Minimalpolynom $\mu_A(z)$ gilt $\mu_A(z) = (z - \mu)^k$, wo $1 \leq k \leq n$, da $\mu_A | \chi_A$ in $\mathbb{C}[z]$. Da μ ferner der einzige Eigenwert von A ist, gilt, dass $\deg \mu_A = k$ der Nilpotenzgrad von $A - \mu E_n$ ist. D.h., die kleinste natürliche Zahl, so dass $(A - \mu E_n)^k = 0$. Zusammen mit $(n - k) \geq 0$ und der Identität finden wir falls $k = n$ $(A - \mu E_n)^k = 0$ und falls $k < n$ $(A - \mu E_n)^n = (A - \mu E_n)^k \cdot (A - \mu E_n)^{n-k} = 0 \cdot (A - \mu E_n) = 0$. Damit ist der geforderte Nachweis erbracht. Wir betrachten nun das Matrix-Exponential $\exp(tA)$ für die Matrix aus dem ersten Teil der Aufgabe. Hierzu schreiben wir zunächst $A = \mu E_n + (A - \mu E_n) \equiv \mu E_n + M$. Offenbar ist M eine nilpotente Matrix, deren Nil-Potenzgrad $\leq n$ erfüllt. Nach Definition gilt ferner $[\mu E_n, A - \mu E_n] = 0$, da μE_n als Diagonalmatrix mit jeder Matrix $X \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ kommutiert. Laut den Rechenregeln für das Matrix-Exponential gilt dann zunächst:

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp(t\mu E_n + t(A - \mu E_n)) && (292)\\ &= \exp(t\mu E_n)\exp(t(A - \mu E_n)) && (293)\\ &= \exp(\mu t)\exp(t(A - \mu E_n)). && (294)\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Darstellung von der Matrix-Exponentialfunktion als Potenzreihe:

$$\begin{aligned}\exp(t(A - \mu E_n)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \mu E_n) && (295)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(A - \mu E_n)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+n}}{(k+n)!}(A - \mu E_n)^k (A - \mu E_n)^n && (296)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(A - \mu E_n)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+n}}{(k+n)!}(A - \mu E_n) \cdot 0 && (297)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(A - \mu E_n)^k, && (298)\end{aligned}$$

wobei die Identität $(A - \mu E_n)^n = 0$ verwendet wurde, um das gliedweise Verschwinden der zweiten, unendlichen Summe zu erhalten. Nun finden wir

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(A - \mu)^k \exp(t\mu). \tag{299}$$

Damit hat $\exp(tA)$ tatsächlich die gewünschte Summendarstellung. Nun spezialisieren wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{300}$$

und versuchen mithilfe der Ergebnisse von vorher das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$ mit $x(0) = (1, 1, 0)^T$ zu lösen. Offenbar ist $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ und es gilt $\det(A - zE_3) = (1 - z)^3$. Damit ist $\mu = 1$ ein dreifacher Eigenwert von A. Wir können Teil (a) anwenden und bekommen, dass $(A - 1)^3 = 0$. Nunmehr wenden wir Teil (b) an und finden

$$\exp(tA) = e^t E_3 + te^t(A - E_3) + t^2/2e^t(A - E_3)^2 \tag{301}$$

Es gilt explizit

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; (A - E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; (A - E_3)^3 = 0. \tag{302}$$

Damit finden wir

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 5te^t + 3t^2e^t \\ 0 & e^t & e^t + 3te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \tag{303}$$

Wir haben nunmehr laut Vorlesung die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$,

$$x(t) = \exp(tA)x(0) = \exp(tA)v = \begin{pmatrix} e^t + 2te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{304}$$

$\square$

Aufgabe 20 Wir betrachten zunächst die beiden Differentialgleichungen in der Form $x' = Ax$ und $y' = Bx$, wobei $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \;\&\; B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}. \tag{305}$$

Gesucht ist die allgemeine Lösung jeweils. Deren Existenz und Eindeutigkeit auf $\mathbb{R}$ ist klar, da es sich um Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, ohne Inhomogenität und mit konstanter Koeffizientenmatrix handelt. Setze $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3$ und $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$. Für $b, c \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} b & c \\ c & b \end{pmatrix}\right) = \exp(tb\sigma_0 + tc\sigma_1), \tag{306}$$

wo $\sigma_0 = E_2$ und σ_1 die 0-te bzw. 1-te Pauli-Matrix bezeichnet. Dann gilt $[\sigma_0, \sigma_1] = 0$ und somit

$$\exp(tb\sigma_0 + tc\sigma_1) = \exp(tb\sigma_0)\exp(tc\sigma_1) = \exp(tb)\exp(tc\sigma_1). \tag{307}$$

Es gilt offenbar $\sigma_1^2 = E_2 = \sigma_0$. Damit finden wir

$$\exp(tc\sigma_1) = \sinh(tc)\sigma_1 + \cosh(tc)\sigma_0 \tag{308}$$

Somit gilt

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} b & c \\ c & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp(tb)\cosh(tc) & \exp(tb)\sinh(tc) \\ \exp(tb)\sinh(tc) & \exp(tb)\cosh(tc) \end{pmatrix}. \tag{309}$$

Da die Matrix A Block-Matrix ist finden wir

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(at) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(tb)\cosh(tc) & \exp(tb)\sinh(tc) \\ 0 & \exp(tb)\sinh(tc) & \exp(tb)\cosh(tc) \end{pmatrix}. \tag{310}$$

Dies Basis des Lösungsraums ist durch die Spaltenvektoren definiert, $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\exp(at), 0, 0)^T, \Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (0, \exp(bt)\cosh(ct), \exp(bt)\sinh(ct))^T, \Phi_3 :$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (0, \exp(bt)\sinh(ct), \exp(bt)\cosh(ct))$. Analog verfahren wir für die Matrix B, wobei wir aber bemerken, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}^2 = -c^2 E_2. \tag{311}$$

Insgesamt finden wir damit

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}\right) = E_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}c^{2k}(-1)^k}{2k!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k+1}t^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} \tag{312}$$

$$= E_2 \cos(ct) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin(ct). \tag{313}$$

Zusammen mit

$$\left[bE_2, c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0, \tag{314}$$

finden wir also analog zum Fall der Matrix A für das Matrix-Exponential $\exp(tB)$:

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} \exp(at) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(bt)\cos(ct) & \exp(bt)\sin(ct) \\ 0 & -\exp(bt)\sin(ct) & \exp(bt)\cos(ct) \end{pmatrix}. \tag{315}$$

Wiederum ist die Basis des dreidimensionalen Lösungsraums gerade durch die Spaltenvektoren des Exponentials, interpretiert als Funktionen gegeben. Explizit gilt $\Psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\exp(at), 0, 0)^T$, $\Psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (0, \exp(bt)\cos(ct), -\exp(bt)\sin(ct))^T$, $\Psi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (0, \exp(bt)\sin(ct), \exp(bt)\cos(ct))$. Wir spezialisieren nun

$$x(t) = \begin{pmatrix} \exp(at) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(tb)\cosh(tc) & \exp(tb)\sinh(tc) \\ 0 & \exp(tb)\sinh(tc) & \exp(tb)\cosh(tc) \end{pmatrix} x_0 \tag{316}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \exp(at) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(bt)\cos(ct) & \exp(bt)\sin(ct) \\ 0 & -\exp(bt)\sin(ct) & \exp(bt)\cos(ct) \end{pmatrix} y_0. \tag{317}$$

Nun muss gelten für (a), dass $a < 0, b < 0, c \in \mathbb{R}$ so dass $b + |c| < 0$ für die Matrix A und $a < 0, b < 0, c \in \mathbb{R}$ beliebig. Für (b) finden wir, dass dies nicht mit A möglich ist, da weder die Exponential- noch die hyperbolischen Funktionen periodisch sind. Für B finden wir $a = 0 = b$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Periode ist in diesem Fall gerade $T = 2\pi/c$. □

Aufgabe 21 Gesucht ist ein Fundamentalsystem von Lösungen zu dem linearen System homogener Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanter Koeffizientenmatrix:

$$\dot{x} = Ax\,,\; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{318}$$

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom zu A. Es gilt $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \chi_A(z)$

$$
\begin{aligned}
\chi_A(z) &= \det(A - zE_3) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 1-z & 0 & 1 \\ 0 & 1-z & 0 \\ -1 & 0 & 3-z \end{pmatrix}\right) \\
&= (1-z)^2(3-z) - (-1)(1-z) \\
&= (1-z)((1-z)(3-z)+1) \\
&= (1-z)(3-4z+z^2+1) \\
&= (1-z)(2-z)^2.
\end{aligned}
$$

Da das charakteristische Polynom von A eine einfache Nullstelle bei $z_1 = 1$ und eine zweifache Nullstelle bei $z_2 = 2$ hat,ist z_1 Eigenwert der algebraischen Vielfachheit $\mu_a(z_1 = 1) = 1$ von A und z_2 Eigenwert der algebraischen Vielfachheit $\mu_a(z_2 = 2) = 2$ von A. Wir berechnen die dazugehörigen Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, z_k)$ für $1 \leq k \leq 2$. Falls $\dim \mathrm{Eig}(A, z_2) = 2$, ist A diagonalisierbar, da geometrische und algebraische Vielfachheit für jeden der beiden Eigenwerte übereinstimmen. Andernfalls ist A nicht diagonalisierbar, aber wir können zumindest A auf Jordan'sche Normalform bringen.

- *Fall 1 $z_1 = 1$:* Um eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, z_1) = \ker(A - z_1E_3)$ zu bestimmen, müssen wir den Lösungsraum des Linearen Gleichungssystems $(A - z_1E_3)v = 0$ bestimmen, $v \in \mathbb{R}^3$. Dies erfolgt mittels Gauss-Algorithmus.

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0
\end{array}
$$

  Damit finden wir, dass $\ker(A - zE_2) = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}((0,1,0)^T)$ und $v \equiv (0,1,0)^T$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $z_1 = 1$.

- *Fall 2 $z_2 = 2$:* Um eine Basis für $\mathrm{Eig}(A, z_2) = \ker(A - z_2E_3)$ zu finden, müssen wir den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $(A - z_2E_3)v = 0$ bestimmen, $v \in \mathbb{R}^3$. Dies erfolgt mittels Gauss-Algorithmus.

$$
\begin{array}{ccc|c}
-1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

  Hiermit sehen wir, dass der Lösungsraum des in Rede stehenden linearen Gleichungssystems lediglich ein-dimensional ist, da die beiden nicht-Null-Zeilen in der erweiterten Koeffizienten-Matrix offenbar linear unabhängig sind. Eine vom Nullvektor verschiedene Lösung des linearen Gleichungssystems ist $v_h = (1,0,1)^T$ sodass $\mathrm{Eig}(A,z_2) = \ker(A - z_2 E_3) = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}((1,0,1)^T)$. Da $\dim \mathrm{Eig}(A,z_2) = 1 < 2 = \mu_a(z_2)$, ist A nicht diagonalisierbar. Wir suchen nun die Jordan'sche Normalform von A. Dazu berechnen wir zunächst

$$(A - z_2 E_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{319}$$

$$(A - z_2 E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{320}$$

Wir müssen nun eine Basis des verallgemeinerten Eigenraums $\mathrm{Eig}_2(A,z_2) = \ker((A - z_2 E_3)^2)$ bestimmen. Durch Inspektion von $(A - z_2 E_3)_{kl} = \delta_{k2}\delta_{l2}$ sehen wir, dass $w_1 = (1,0,1)^T, w_2 = (1,0,-1)^T$ eine solche Basis des verallgemeinerten Eigenraums bilden. Um nun eine Jordan-Basis zu bekommen, wählen wir $0 \neq v \in \mathrm{Eig}_2(A,z_2) \setminus \mathrm{Eig}_1(A,z_2)$, wobei $\mathrm{Eig}_1(A,z_2) = \mathrm{Eig}(A,z_1)$. Das liefert uns nur $v_1 \equiv w_2 = (1,0,-1)^T$ als verbleibende Wahlmöglichkeit. Nun bestimmen wir algorithmisch die Jordan-Basis:

$$v_2 = (A - z_2 E_3) v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{321}$$

Damit finden wir als geordnete Jordan-Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v)$, sodass die Transformationsmatrix T gegeben ist durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{322}$$

Wir benötigen nun noch die inverse Matrix T^{-1}. Diese bestimmen wir ebenfalls unter Verwendung des Gauss-Algorithmus zur Matrixinversion

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 0.5 & 0.5 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -0.25 & -0.25 & 0
\end{array} \tag{323}$$

Damit finden wir

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{324}$$

Die Jordan'sche Normalform ist gegeben durch

$$T^{-1}AT = J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{325}$$

und wegen $\exp(tA) = T\exp(tJ_A)T^{-1}$ und

$$\exp(tJ_A) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \tag{326}$$

finden wir, dass die allgemeine Lösung des default-Anfangswertproblems mit default-Anfangsbedingung $x(0) \in \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ gegeben ist durch

$$x(t) = \exp(tA)x(0) \tag{327}$$

gegeben ist. Da die Existenz- und Eindeutigkeitstheorie für Systeme linearer Differentialgleichung mit konstanter Koeffizienten-Matrix und keiner Inhomogenität als maximales Existenzintervall ganz $\mathbb{R}$ garantiert, erhalten wir ein Fundamentalsystem $\Phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \Phi_k(t) = \exp(tA)\hat{e}_k$ für $1 \leq k \leq 3$. Damit finden wir

- *Fall 1 $k = 1$:*

$$\Phi_1(t) = T\exp(tJ_A)T^{-1}\hat{e}_1 = T\exp(tJ_A)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1/2 \cdot e^{2t} \\ 0 \\ -1/4e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot e^{2t} \\ -1/4 \cdot e^t \\ -1/2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- *Fall 2 $k = 2$:*

$$\Phi_2(t) = T\exp(tJ_A)T^{-1}\hat{e}_2 = T\exp(tJ_A)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -1/2 \cdot e^{2t} \\ 0 \\ -1/4e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \cdot e^{2t} \\ -1/4 \cdot e^t \\ 1/2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- *Fall 3 $k = 3$:*

$$\Phi_3(t) = T\exp(tJ_A)T^{-1}\hat{e}_3 = T\exp(tJ_A)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} - 2e^{2t} \\ 0 \\ -te^{2t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Damit finden wir im Ergebnis

$$\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} 1/2 \cdot e^{2t} \\ -1/4 \cdot e^t \\ -1/2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}, \tag{328}$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} -1/2 \cdot e^{2t} \\ -1/4 \cdot e^t \\ 1/2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}, \tag{329}$$

$$\Phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} te^{2t} - 2e^{2t} \\ 0 \\ -te^{2t} - 2e^{2t} \end{pmatrix} \tag{330}$$

als Fundamentalsystem der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. □

Aufgabe 22 Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} -t \\ e^{-t} \\ 1+t \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{331}$$

Zunächst sollen wir ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ berechnen. Da es sich hierbei um ein System homogener lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanter Koeffizientenmatrix behandelt, ist der Lösungsraum $\mathcal{L}$ ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und für das Fundamentalsystem $\mathcal{B} = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ gilt, dass $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$ nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme von Diferentialgleichungen erster Ordnung. Wir berechnen als ersten Schritt die Eigenwerte der Matrix A. Dazu definieren für alle $z \in \mathbb{C}$ das charakteristische Polynom $\chi_A(z) \equiv \det(A - zE_3)$, wobei E_3 die 3×3-Einheitsmatrix bezeichnet. Explizit gilt,

$$\begin{aligned} \chi_A(z) = \det\left(\begin{pmatrix} -z & 0 & -1 \\ 0 & -1-z & 0 \\ 1 & 0 & 2-z \end{pmatrix}\right) &= (-z)(-1-z)(2-z) - 1 \cdot (-1-z)(-1) \\ &= (-z(2-z)+1)(-1-z) = (z-1)^2(-1-z). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass χ_A also über $\mathbb{R}$ separabel ist und die Nullstellen $z_1 = 1, z_2 = -1$ jeweils mit Ordnung 2 bzw. 1 besitzt. Laut Linearer Algebra korrespondiert die Vielfachheit der Nullstelen, die die Eigenwerte der Matrix sind, gerade zur algebraischen Vielfachheit $\mu_a(z_k)$ der Eigenwerte z_k für $k \in \{1, 2\}$. Wir testen nun, ob die geometrische Vielfachheit $1 \leq \mu_g(z_k)$ mit der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts z_k für $1 \leq k \leq 2$ übereinstimmt. Dann ist A diagonalisierbar, sonst existiert zumindest die Jordan'sche Normalform. Da z_2 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 ist, folgt wegen $\mu_a(z_2) \geq \mu_g(z_2) \geq 1$ bereits, dass $\mu_g(z_2) = 1$. Zu untersuchen bleibt also nur die Situation für den Eigenwert z_1. Wir finden aus $\mathrm{Eig}(A, z_1) = \mathrm{Eig}(A, z_1, 1) = \ker((A - z_1E_3)^1)$ den Eigenraum (der Ordnung 1) und können dann $\mu_g(z_1) = \dim\ker((A - z_1E_3))$ erhalten. Rechnung liefert:

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}, \tag{332}$$

so dass eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, z_1, 1)$ durch $\{(1, 0, -1)^T\}$ gegeben ist. Insbesondere gilt also $\dim\mathrm{Eig}(A, z_1, 1) = 1 = \mu_g(z_1) < \mu_a(z_1)$. Mithin ist A nicht diagoanlisierbar und wir müssen die Jordan'sche Normalform berechnen. Es ist $\mathrm{Eig}(A, z_1, 2) = \ker((A - z_1E_3)^2)$ und Rechnung liefert

$$(A - z_1E_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{333}$$

sodass wir eine Basis von $\ker((A - z_1E_3)^2)$ aus der Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems eruieren können, nämlich

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{334}$$

Da $w_2 \in \mathrm{Eig}(A, z_1, 1)$, verwenden wir $w_1 = (1, 0, 1)^T$ für den Algorithmus, um eine Basis für $\mathrm{Eig}(A, z_1, 2)$ so zu bekommen, dass das entsprechende Jordan-Kästchen durch Basistransformation am Ende reproduziert werden kann. Setze also $v_1 = w_1$ und definiere $v_2 = (A - z_1E_3)^1v_1$. Es gilt dann $v_2 = (-2, 0, 2)^T \in \mathrm{Eig}(A, z_1, 1)$. Um die Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ zu bestimmen, die durch Konjugieren von A die dazugehörige Jordan-Normalform J_A produziert, brauchen wir noch eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, z_2)$. Wir finden diese aus der Bestimmung von $\ker((A - z_2E_3)^1)$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}, \tag{335}$$

was die Lösung $(0, 0, 0)^T \neq (0, 1, 0) = \hat{e}_2 = v_3$ besitzt. Nun schreiben wir $T = (v_2, v_1, v_3)$ (!!!) und erhalten explizit

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{336}$$

Die Inverse T^{-1} berechnet sich nach dem Gauss-Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|ccc}
-2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
2 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\
0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0.25 \\
0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array} \tag{337}$$

sodass

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -0.25 & 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{338}$$

Die Jordan-Normalform $J_A = T^{-1}AT$ erfüllt also

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{339}$$

Nach den bekannten Rechenregeln für das Matrixexponential gilt

$$\exp(tA) = T\exp(tJ_A)T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.25 & 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem erhalten wir nun indem wir definieren $\Phi_k(t) = \exp(tA)\hat{e}_k$ für alle $k \in \{1, 2, 3\}$ und den $\Phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Anfang der Ausführungen. Durch Rechnung finden wir also

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.25e^t + 0.5te^t \\ 0.5e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ e^t - te^t \end{pmatrix}, \tag{340}$$

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{341}$$

$$\Phi_3(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25e^t + 0.5te^t \\ 0.5e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + te^t \\ 0 \\ -te^t \end{pmatrix}. \tag{342}$$

Letztere Ausdrücke sind auch gerade die Spaltenvektoren von $\exp(tA)$. Nun suchen wir die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$ mit $x(0) =$

x_0. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass wir dieses durch

$$x(t) = \exp(tA)x_0 + \exp(tA)\int_0^t \exp(-\tau A)b(\tau)d\tau \tag{343}$$

finden. Zunächst gilt

$$\exp(tA)x_0 = \begin{pmatrix} -2e^t - te^t \\ 3e^{-t} \\ te^t + e^t \end{pmatrix}. \tag{344}$$

Nun gilt

$$\int_0^t \exp(-\tau A)b(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} -\tau e^{-\tau} & 0 & e^{-\tau} - \tau e^{-\tau} \\ 0 & e^{\tau} & 0 \\ e^{-\tau} + \tau e^{-\tau} & 0 & \tau e^{-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau \\ e^{-\tau} \\ 1+\tau \end{pmatrix} d\tau \tag{345}$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \tag{346}$$

$$= \begin{pmatrix} -(e^{-t} - 1) \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{347}$$

sodass

$$x(t) = \begin{pmatrix} -2e^t - te^t \\ 3e^{-t} \\ te^t + e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t & 0 & e^t + te^t \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ e^t - te^t & 0 & -te^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(e^{-t} - 1) \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{348}$$

$$= \begin{pmatrix} -t + te^t \\ 3e^{-t} \\ te^t + e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t + te^t \\ te^{-t} \\ -1 + t + e^t - te^t \end{pmatrix} \tag{349}$$

$$= \begin{pmatrix} -2(1+e^t)t \\ (3+t)e^{-t} \\ -1 + t + 2e^t \end{pmatrix}. \tag{350}$$

Dies ist die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, die (eindeutige) und maximale Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist. □

Aufgabe 23 Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ b(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t,\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{351}$$

Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems $x' = Ax + b, x(0) = x_0$. Da es sich beim zu untersuchenden Problem um eine Anfangswertaufgabe für ein System inhomogener linearer Differentialgleichung erster Ordnung handelt und die Koeffizientenmatrix A nur konstante Einträge bzgl. t besitzt, liefert der globale

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme linearer Differentialgleichungen die Existenz einer eindeutig bestimmten maximalen Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto x(t)$ des Anfangswertproblems. Um diese zu finden, berechnen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix A und daraus dann ein Fundamentalsystem an Lösungen für den homogenen Teil des Differentialgleichungssystems. Definiere das charakteristische Polynom $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(z) &= \det\left(\begin{pmatrix} -z & -1 & 1 \\ 1 & -z & 3 \\ 0 & 0 & -1-z \end{pmatrix}\right) \\ &= (-z)^2(-1-z) - (-1-z)\cdot 1 \cdot (-1) \\ &= -(z^2+1)(z+1).\end{aligned} \tag{352}$$

Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren und ist über diesem Körper separabel. Es gilt, dass $\chi_A(\pm i) = 0 = \chi_A(-1)$. Die Eigenwerte der Matrix A sind also $z_1 = -i, z_2 = i, z_3 = -1$. Da jeder der Eignwerte die algebraische Vielfachheit 1 hat, ist die Matrix A über $\mathbb{C}$ bereits diagonalisierbar. Wir berechnen nun für jeden der Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, z_k)$, $1 \leq k \leq 3$, eine Basis.

- *Fall z_1:* Wir bestimmen eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, z_1) = \ker(A - z_1E_3)$

$$\begin{array}{lcc|l} -i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 3 & 0 \\ 0 & 0-1-i & 0 & \\ \hline -i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i & 0 \\ \hline -i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \tag{353}$$

  Hiermit finden wir, dass $(0,0,0)^t \neq v_1 = (1, -i, 0)^T \in \ker(A - z_1E_3)$.

- *Fall z_2:* Wir bestimmen eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, z_2) = \ker(A - z_2E_3)$

$$\begin{array}{lcc|l} i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 3 & 0 \\ 0 & 0-1+i & 0 & \\ \hline i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i & 0 \\ \hline i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \tag{354}$$

  Hiermit finden wir, dass $(0,0,0)^T \neq v_2 = (1, i, 0)^T \in \ker(A - z_2E_3)$.

- *Fall z_3:* Wir bestimmen eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, z_3) = \ker(A - z_3E_3)$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{355}$$

  Hiermit finden wir, dass $(0,0,0)^T \neq v_3 = (-2, -1, 1)^T \in \ker(A - z_3E_3)$.

Das zugehörige (komplexwertige) Fundamentalsystem ist gegeben durch ($\Psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto \Psi_k(t)$, $1 \le k \le 3$):

$$\Psi_1(t) = e^{it}(1, -i, 0)^T,\ \Psi_2(t) = e^{-it}(1, i, 0)^T,\ \Psi_3(t) = (-2, -1, 1)^T e^{-t}. \tag{356}$$

Wir konstruieren hieraus durch $\Phi_1(t) := [\Psi_1(t) + \Psi_2(t)]/2$ und $\Phi_3(t) := [\Psi_1(t) - \Psi_2(t)]/(2i)$ sowie $\Phi_3(t) = \Psi_3(t)$ ein neues Fundamentalsystem. Dieses erfüllt für beliebiges $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)^T \in \mathbb{R}^3 \tag{357}$$
$$\Phi_2(t) = (\sin(t), -\cos(t), 0)^T \in \mathbb{R}^3 \tag{358}$$
$$\Phi_3(t) = (-2e^{-t}, -e^{-t}, e^{-t})^T \in \mathbb{R}^3. \tag{359}$$

Nun stellen wir die Fundamentalmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ auf. Es gilt

$$\mathbf{\Phi}(t) \equiv (\Phi_1(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & -2e^{-t} \\ \sin(t) & -\cos(t) & -e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{360}$$

Wir müssen nun noch die Inverse bestimmen. Sei dazu $t \in \mathbb{R}$. Es gilt $\det \mathbf{\Phi}(t) = (-1)^{3+3}e^{-t}(-\cos(t)^2 - \sin(t)^2) = -e^{-t} \neq 0$, so dass die Fundamentalmatrix tatsächlich invertierbar für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Anwendung des Gauss-Algorithmus produziert eine Rechnung

$$\begin{array}{ccc|ccc}
\cos(t) & \sin(t) & -2e^{-t} & 1 & 0 & 0 \\
\sin(t) & -\cos(t) & -e^{-t} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\cos(t) & \sin(t) & -2e^{-t} & 1 & 0 & 0 \\
\sin(t) & -\cos(t) & -e^{-t} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e^{t} \\
\hline
\cos(t) & \sin(t) & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\sin(t) & -\cos(t) & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e^{t} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \cos(t) & \sin(t) & 2\cos(t) + \sin(t) \\
\sin(t) & -\cos(t) & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e^{t} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \cos(t) & \sin(t) & 2\cos(t) + \sin(t) \\
0 & -\cos(t) & 0 & -\cos(t)\sin(t) & 1 - \sin(t)^2 & 1 - 2\cos(t)\sin(t) - \sin(t)^2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e^{t} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \cos(t) & \sin(t) & 2\cos(t) + \sin(t) \\
0 & -\cos(t) & 0 & -\sin(t)\cos(t) & \cos(t)^2 & (\cos(t) - 2\sin(t))\cos(t) \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e^{t} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \cos(t) & \sin(t) & 2\cos(t) + \sin(t) \\
0 & 1 & 0 & \sin(t) & -\cos(t) & 2\sin(t) - \cos(t) \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e^{t}
\end{array} \tag{361}$$

Wir finden also, dass gilt

$$\mathbf{\Phi}(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 2\cos(t)+\sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) & 2\sin(t)-\cos(t) \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \tag{362}$$

Nunmehr können wir durch die bekannte Variation-der-Konstanten-Formel die Lösung des Anfangswertproblems inklusive Inhomogenität berechnen:

$$x(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}x_0 + \mathbf{\Phi}(t)\int_0^t \mathbf{\Phi}(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau \tag{363}$$

Es gilt:

$$\mathbf{\Phi}(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(t)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(t)-2\sin(t)-2e^{-t} \\ 3\sin(t)+2\cos(t)-e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Ferner:

$$\mathbf{\Phi}(t)^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 2\cos(t)+\sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) & 2\sin(t)-\cos(t) \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Damit finden wir

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t}-1 \end{pmatrix}.$$

Somit also:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(t)\int_0^t \mathbf{\Phi}(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & -2e^{-t} \\ \sin(t) & -\cos(t) & -e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t}-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t}-2e^t \\ e^{-t}-e^t \\ e^t-e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sinh(t) \\ -2\sinh(t) \\ 2\sinh(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Zusammenfügen der Resultate liefert also die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t)-2\sin(t)-2e^{-t} \\ 3\sin(t)+2\cos(t)-e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\sinh(t) \\ -2\sinh(t) \\ 2\sinh(t) \end{pmatrix}. \tag{364}$$

$\square$

Aufgabe 24 Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{365}$$

Gesucht ist zunächst ein Fundamentalsystem von Lösungen für $y' = Ay$. Hierzu berechnen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Definiere das charakteristische Polynom $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$. Es gilt

$$\chi_A(z) = \det\left(\begin{pmatrix} -z & 0 & 0 \\ 1 & -z & -1 \\ 0 & 0 & -1-z \end{pmatrix}\right) \tag{366}$$

$$= (-z)^2(-1-z). \tag{367}$$

Damit hat das charakteristische Polynom die doppelte Nullstelle $z_1 = 0$, korrespondierend dazu, dass $z_1 = 0$ Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit $\mu_a(z_1 = 0) = 2$ ist. Ferner hat χ_A die einfache Nullstelle $z_2 = -1$, korrespondierend dazu, dass $z_2 = -1$ Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit $\mu_a(z_2 = -1) = -1$ ist. Wir bestimmen nun die geometrische Vielfachheit$\mu_g(z_1)$ von z_1. Es gilt $\mu_g(z_1) = \dim \mathrm{Eig}(A, z_1)$, so dass wir das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \tag{368}$$

lösen müssen. Dieses hat nach Inspektion die Lösung $(0,0,0)^T \neq l_1 = (0,1,0)^T$. Also ist $\dim \mathrm{Eig}(A, z_1) = 1 < \mu_a(z_1)$. A ist also nicht diagonalisierbar, aber wir können die Jordan'sche Normalform berechnen. Dazu berechnen wir

$$(A - z_1E_3)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{369}$$

Die Dimension des verallgemeinerten Eigenraums ist also $\dim \mathrm{Eig}(A, z_1, 2) = \dim \ker((A)^2) = 2$, denn $w_1 = (1,0,0)^T$ und $w_2 = (0,1,0)^T$ bilden zusammen die Basis von $\ker A^2$, wie man bereits durch Inspektion von A^2 findet. Da $w_2 \in \ker A$, aber $w_1 \notin \ker A$, setzen wir $v_2 = w_1$ und iterieren $v_1 = Av_2 = (0,1,0)^T \in \ker A$. Die Angabe der kompletten Jordan-Basis erfordert die Kenntnis einer Basis von $\mathrm{Eig}(A, z_2) = \ker(A - z_2E_3)$. Wir rechnen hierzu

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\,, \tag{370}$$

sodass $(0,0,0)^T \neq (0,1,-1)^T \in \ker(A - z_2E_3)$. Somit können wir die Tranformationsmatrix T angeben, die vermöge $J_A = T^{-1}AT$ die Matrix A in die Jordan-Normalform J_A überführt:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{371}$$

Mittels Gauss-Algorithmus bestimmen wir die Inverse T^{-1},

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \tag{372}$$

Damit finden wir

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{373}$$

Die Jordan-Normalform berechnet sich nunmehr zu

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{374}$$

Nach den Rechenregln für das Matrix-Exponential finden wir:

$$\exp(tA) = T\exp(tJ_A)T^{-1} \tag{375}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{376}$$

Ein Fundamentalsystem erhalten wir durch

$$\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \exp(tA)\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{377}$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \exp(tA)\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{378}$$

$$\Phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \exp(tA)\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{379}$$

Wir stellen nun fest, dass $\Phi_1(0)+\Phi_2(0)+\Phi_3(0) = (1,0,0)^T + (0,1,0)^T + (0,1,1)^T = (1,2,1)^T = x_0$, so dass die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay, y(0) = x_0$ durch $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \Phi_3(t)$ gegeben ist. Um festzustellen, ob die Nulllösung stabil ist, denfinieren wir $\gamma = \max\{\Re[\lambda] | \lambda \in \sigma(A)\}$, wobei $\sigma(A) = \{-i, i, -1\}$ die Menge der Eigenwerte von A bezeichnet. Offenbar gilt $\gamma = 0$. Nach einer Stabilitätsaussage über Lösungen eines homogenen linearen Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung sehen wir, dass $\{-i, i\}$ halbeinfache Eigenwerte sein müssen. Da die algebraische Vielfachheit für jedes $\lambda \in \{-i, i\}$ gleich eins ist, stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein, $\mu_a(\lambda) = 1 = \mu_g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \{-i, i\}$. Mithin ist jedes $\lambda \in \{-i, i\}$ halbeinfacher Eigenwert von A. Besagte Stabilitätsaussage impliziert nun, dass die Nulllösung $\mu_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 0$ von $y' = Ay$ stabil ist. □

Aufgabe 25 Gegeben ist die folgende skalare Differentialgleichung $x'' = \alpha x' - x + x^2$. Diese ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ erklärt. Wir setzen $y = x'$ und transformieren die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung formal in System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Prozedur liefert:

$$x' = y \;\&\; y' = \alpha y - x + x^2. \tag{380}$$

Die in Teilaufgabe (a) geforderte Form ergibt sich durch Definition von $f_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$, $g_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \alpha y - x + x^2$. Beide Funktionen sind $\mathcal{C}^1$-regulär. Um nun herauszufinden, welche Ruhelagen des Systems asymptotisch stabil sind, bestimmen wir zunächst die Ruhelagen. Diese ergeben sich definitionsgemäß aus $(f_\alpha, g_\alpha)(x, y) = (0, 0)$. Es folgt $x \in \{0, 1\}$ und $y = 0$, d.h., wir haben die zwei Ruhelagen $(0, 0)$ und $(1, 0)$. Um die Stabilität zu untersuchen, verwenden wir das Kriterium der linearisierten Stabilität, d.h., wir berechnen die Jacobi-Matrix von $(f_\alpha, g_\alpha) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (f_\alpha, g_\alpha)(x, y)$. Es gilt

$$\mathrm{Jac}[(f_\alpha, g_\alpha)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2x & \alpha \end{pmatrix}. \tag{381}$$

Wir führen die Untersuchung nun durch Fallunterscheidung nach der Ruhelage durch:

- *Fall 1* ($x = 0, y = 0$). Hier berechnen wir für die Eigenwerte von $\mathrm{Jac}(f_\alpha, g_\alpha)(0, 0)$ aus dem charakteristischen Polynom $\chi(z) = \det(\mathrm{Jac}(f_\alpha, g_\alpha)(0, 0) - zE_3)$, dass

  $$0 = \chi(z) = (-z)(-z + \alpha) + 1 = z^2 - \alpha z + 1. \tag{382}$$

  Damit finden wir $\lambda_1 = \alpha/2 + \sqrt{\alpha^2 - 4}/2$ und $\lambda_2 = \alpha/2 + \sqrt{\alpha^2 - 4}/2$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Ruhelage asymptotisch stabil genau dann ist, wenn die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 negativen Realteil haben. Das ist der Fall falls $\alpha < 0$. Im Falle $\alpha = 0$ ist nämlich $\Re[\lambda_1] = 0 = \Re[\lambda_2]$ sowie, falls $\alpha > 0$, $0 < \Re[\lambda_1], \Re[\lambda_2] < \alpha/2$. Für $\alpha < 0$ hingegen ist wegen der Monotonie der Wurzelfunktion $\sqrt{\alpha^2 - 4} < \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ für $|\alpha| > 2$ und $\sqrt{\alpha^2 - 4} \in i \cdot \mathbb{R} \setminus \{0\}$ falls $0 < |\alpha| < 2$. In jedem Fall gilt also $0 > \Re[\lambda_1], \Re[\lambda_2] > -|\alpha|/2$ für $\alpha < 0$. Zusammenfassend finden wir also, dass die Ruhelage $(0, 0)$ asymptotisch stabile Ruhelage genau im Falle $\alpha < 0$ ist.

- *Fall 2* ($x = -1, y = 0$). Analog zum ersten Fall finden wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms μ aus $\mu(z) := \det(\mathrm{Jac}(f_\alpha, g_\alpha)(1, 0) - zE_3) = (-z)(-z + \alpha) - 1 = 0$. Das sind dann die Eigenwerte Λ_1, Λ_2, und es gilt

$\Lambda_1 = -\alpha/2 + \sqrt{\alpha^2+4}/2$ und $\Lambda_2 = -\alpha/2 + \sqrt{\alpha^2+4}/2$. Wir stellen fest, dass wegen der Monotone der Wurzelfunktion $\sqrt{\alpha^2+4} > \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$. Insbesondere gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, dass $\Re[\Lambda_1] = \Lambda_1 = (-\alpha + \sqrt{\alpha^2+4})/2 > 0$ und für alle $\alpha < 0$ $\Re[\Lambda_2] = (-\alpha/2 + \sqrt{\alpha^2+4}/2) > 0$. Das oben zitierte Kriterium für die Stabilität von Ruhelagen im Kontext linearisierter Stabilität liefert nun, dass $(1,0)$ instabile Ruhelage, somit insbesondere nicht stabil ist. Beliebigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ liefert, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Ruhelage $(1,0)$ instabil und damit erst recht nicht asymptotisch stabil ist.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass das betrachtete System nur für $\alpha < 0$ eine asymptotische Ruhelage, nämlich $(0,0)$, hat. □

Aufgabe 26 Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 3xy$. Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von g. Da g als Verknüpfung von $\mathcal{C}^2$-regulären Funktionen insbesondere $\mathcal{C}^2$-regulär ist, finden wir $(\nabla g)(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 3y, 6xy - 3x)^T$. Die kritischen Punkte $(x,y) \in \mathrm{Crit}(g)$ folgen aus der definierenden Bedingung $(0,0) = (\nabla g)^T(x,y)$. Die zweite Komponente liefert dann $y = 1/2$ oder $x = 0$. Die erste Komponente liefert dann falls $x = 0$, $y^2 = y$, also $y \in \{+1, 0\}$ und im Falle $y = 1/2$, dass $3x^2 - 3/4 = 0$, d.h., $x \in \{-1/2, 1/2\}$. Insgesamt finden wir also kritische Punkte

$$\mathrm{Crit}(g) = \{(0,0), (0,1), (1/2,1/2), (-1/2,1/2)\}. \tag{383}$$

Um die Menge der kritischen Punkte im Hinblick auf Sattelpunkts- bzw. Extremwerteigenschaften zu untersuchen, berechnen wir die Hesse-Matrix von g. Es gilt

$$\mathrm{Hess}(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 6y - 3 & 6y - 3 \\ 6y - 3 & 6x \end{pmatrix}. \tag{384}$$

Wir unterscheiden nach kritischen Punkten:

- *Fall 1* $(x = 0, y = 0)$. In diesem Fall ist

$$\mathrm{Hess}(g)(x,y) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{385}$$

  Die Eigenwerte der Hesse-Matrix berechnen sich zu $-3/2 + \sqrt{9 + 4 \cdot 9}/2$, bzw. $-3/2 - \sqrt{9 + 4 \cdot 9}/2$. Infolge der Monotonie der Wurzelfunktion ist der erstgenannte Eigenwert > 0, der zweitgenannte kleiner als 0. Also ist die Hesse-Matrix in-definit und somit haben wir einen Sattelpunkt vorliegen.

- *Fall 2* $(x = 0, y = 1)$. In diesem Fall ist

$$\mathrm{Hess}(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{386}$$

  In diesem Fall finden wir die Eigenwerte zu $3/2 + \sqrt{9 + 4 \cdot 9}/2$ bzw. $-3/2 + \sqrt{9 + 4 \cdot 9}/2$. Infolge der Monotonie der Wurzelfunktion sind beide Eigenwerte$>$ 0, laut dem notwendigen und hinreichenden Kriterium für die Existenz von lokalen Minima ist also bei $(0,1)$ ein lokales Minima zu finden.

- *Fall 3* $(x = 1/2, y = 1/2)$. In diesem Fall ist

$$\mathrm{Hess}(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{387}$$

  Da die Hesse-Matrix bereits in Diagonalform ist, finden wir, dass 3 ein doppelter Eigenwert für die Hesse-Matrix ist. Dieser ist ferner strikt positiv, sodass wir nach dem notwendigen und hinreichenden Kriterium für die Existenz von Minima auch bei $(x = 1/2, y = 1/2)$ ein lokales Minimum vorliegen haben.

- *Fall 4* $(x = -1/2, y = 1/2)$. Hier finden wir für die Hesse-Matrix wiederum eine Diagonalmatrix:

$$\mathrm{Hess}(g)(x,y) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{388}$$

  Da nunmehr beide Eigenwerte kleiner als Null sind, finden wir nach dem notwendigen und hinreichenden Kriterium für lokale Maxima, dass $(x = -1/2, x = 1/2)$ ein lokales Maximum der Funktion ist.

Nun wenden wir uns dem System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu, das gegeben ist durch

$$x' = -6xy + 3x \,\&\, y' = 3x^2 + 3y^2 - 3y. \tag{389}$$

Wir erkennen zunächst, dass diese Differentialgleichung für $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ definiert ist, wobei die rechten Seiten der beiden einzelnen Differentialgleichung jeweils stetig differenzierbar sind, also zusammen die Komponenten eines $\mathcal{C}^1$-Vektorfeldes auf $\mathbb{R}^3$ definieren. Da das System von Differentialgleichungen zusätzlich unabhängig von der Zeitvariablen t ist, handelt es sich um ein autonomes System und die Betrachtung kann auf den Phasenraum $\mathbb{R}^2$ für, nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz existierenden Lösungen, $t \mapsto (x(t), y(t))$ eingeschränkt werden. Wir stellen fest, dass die Differentialgleichung über die Funktion g aus dem ersten Aufgabenteil auch als $x' = -(\partial_y g)(x,y)$ und $y' = (\partial_x g)(x,y)$ geschrieben werden kann. Insofern finden wir, dass die Ruhelagen des Systems gerade die Nullstellen von $(-\partial_y g, \partial_x g)$ bzw., äquivalent, die Nullstellen von (∇g) sind. Dies sind gerade die kritischen Punkte von g. Wir finden genauer, dass

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{=:M} \begin{pmatrix} \partial_x g(x,y) \\ \partial_y g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_y g(x,y) \\ \partial_x g(x,y) \end{pmatrix}, \tag{390}$$

wobei die Matrix M der Relation $M^2 = -E_2$ genügt. Die Unterscheidung nach Stabilität und Instabilität erfolgt nun durch Verwendung der Linearität der (totalen) Ableitung. Es gilt infolge dieser

$$\mathrm{Jac}((-\partial_y g, \partial_x g)^T)(x,y) = M \cdot \mathrm{Hess}(g). \tag{391}$$

Wir stellen also fest, dass nun gilt:

- *Fall 1* $(x = 0, y = 0)$

$$\mathrm{Jac}((-\partial_y g, \partial_x g)^T)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}. \quad (392)$$

Analog zu oben berechnen sich die Eigenwerte aus $(z+3)(z-3) = 0$ zu $z_1 = 3$ und zu $z_2 = -3$. Da $\Re[z_1] = 3 > 0$, handelt es sich also um eine instabile Gleichgewichtslage nach dem Kriterium für linearisierte Stabilität.

- *Fall 2* $(x = 0, y = 1)$

$$\mathrm{Jac}((-\partial_y g, \partial_x g)^T)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (393)$$

Da dies gerade (-1) multipliziert mit der Matrix von oben ist, finden wir die Eigenwerte $z_1 = -3$ und $z_2 = 3$. Das bereits im vorhergehenden Fall zitierte Kriterium für die linearisierte Stabilität liefert nun wegen $\Re[z_2] = 3 > 0$ die Instabilität auch dieser Ruhelage.

- *Fall 3* $(x = 1/2, y = 1/2)$. Hier finden wir

$$\mathrm{Jac}((-\partial_y g, \partial_x g)^T)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (394)$$

Die Eigenwerte sind nun die einfachen (komplexen) Nullstellen von $z^2 + 9$. Diese sind $\pm 3i$ und haben jeweils verschwindenden Realteil. Das Kriterium für linearisierte Stabilität erlaubt also keine Aussage über die Ruhelage.

- *Fall 2* $(x = -1/2, y = 1/2)$. Hier finden wir

$$\mathrm{Jac}((-\partial_y g, \partial_x g)^T)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (395)$$

Die Eigenwerte sind nun die einfachen (komplexen) Nullstellen von $z^2 + 9$. Diese sind $\pm 3i$ und haben jeweils verschwindenden Realteil. Das Kriterium für linearisierte Stabilität trifft also keine Aussage über die Ruhelage.

Zusammenfassend stellen wir also fest, dass $(0,0), (0,1)$ instabile Gleichgewichtslage ist. Wir stellen fest, dass die Funktion g aus Teil (a) Hamilton-Funktion des zu untersuchenden Systems ist. Denn es gilt $\langle (\nabla g)(x,y), \mathbf{F}(x,y) \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. Bis auf Re-Skalierung mit einer additiven Konstante ist $V := \alpha g + c$ mit $\alpha, c \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$ also insbesondere eine Lyapunov-Funktion, denn es gilt erst recht $\langle \nabla V, \mathbf{F} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \alpha \langle (\nabla g)(x,y), \mathbf{F}(x,y) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \alpha \cdot 0 = 0 \leq 0$. Indem wir für den Fall $(x = 1/2, y = 1/2)$ die Konstante c als $-g(1/2, 1/2)$ ansetzen und $\alpha = 1$ wählen, erfüllen wir $V((1/2, 1/2)) = g((1/2, 1/2)) - g((1/2, 1/2)) = 0$. Da $(1/2, 1/2)$ lokales und isoliertes Minimum von g nach Teil (a) ist, ist $(1/2, 1/2)$ ebenfalls lokales und isoliertes Minimum von V. Daher gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(x = 1/2, y = 1/2)$, sodass $V(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in U \setminus \{(1/2, 1/2)\}$. Der Stabilitätssatz von Lyapunov liefert nun, dass $(x = 1/2, y = 1/2)$ eine stabile Ruhelage der Differentialgleichung ist. Analog verfahren wir für $(x = -1/2, 1/2)$:

Hierbei setzen wir $\alpha = -1, c = +g((-1/2, 1/2))$. Auf diese Weise wird die Eigenschaft von $(-1/2, 1/2)$ isoliertes lokales Maximum von g zu sein, dorthingehend modifiziert, dass $(-1/2, 1/2)$ nun zusätzlich isoliertes und lokales Minimum von $W(x, y) := g(-1/2, 1/2) - g(x, y)$ ist. Die Wahl der Konstanten α, c stellt sicher, dass $V((-1/2, 1/2)) = 0$. Analog zum Fall $(1/2, 1/2)$ erhalten wir nun die Stabilität von $(-1/2, 1/2)$. Damit handelt es sich bei $(\pm 1/2, 1/2)$ jeweils um stabile Gleichgewichtslagen. □

Aufgabe 27 Gegeben sei das ebene autonome System $x' = y\cos(x)$, $y' = \sin(x)$. Zu zeigen ist, dass für alle Anfangswerte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutig bestimmte Lösung $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ existiert, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ als Anfangsbedingung spezifiziert wird. Wir stellen zunächst fest, dass die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y\cos(x)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x)$ auf dem gesamten Definitionsbereich $\mathcal{C}^1$-regulär sind, also auf $\mathbb{R}^2$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügen. Ferner ist $\mathbb{R}^2$ als offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ Gebiet. Für die Funktionen f, g gilt ferner die Abschätzung:

$$|g|(x, y) \leq 1, |f(x, y)| \leq 1 \cdot |y|, \tag{396}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mithin handelt es sich bei dem autonomen System $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ um ein autonomes System mit linear beschränkter Seite, denn $|f(x, y)|, |g(x, y)| \leq |f(x, y)| + |g(x, y)| \leq 1 \cdot |y| + 1 \leq 1 \cdot \|(x, y)\|_2 + 1$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungen mit linear beschränkter rechter Seite folgt nun zu vorgegebenem Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ des Anfangswertproblems $x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ mit $(x, y)(0) = (x_0, y_0)$. Wir bestimmen als nächsten Schritt die Ruhelagen des Systems. Sei (x_s, y_s) Ruhelage des Systems. Nach Definition gilt $f(x_s, y_s) = 0$ und $g(x_s, y_s) = 0$. Das liefert die Bedingungen $y_s \cos(x_s) = 0$ und $\sin(x_s) = 0$. Die Nullstellen des Sinus sind ganzzahlige Vielfache von π, sodass $x_s \in \pi\mathbb{Z}$. Da $\cos(x_s) \in \{\pm 1\}$ in diesem Falle, liefert die erste Bedingung nur $y_s = 0$. Zusammenfassend stellen wir fest, dass für eine Ruhelage (x_s, y_s) des Differentialgleichungssystems gilt $(x_s, y_s) \in \pi\mathbb{Z} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Zuletzt untersuchen wir die Stabilität der Ruhelage. Hierzu verwenden wir das Kriterium der linearisierten Stabilität. Für die Jacobi-Matrix des Vektorfeldes, definiert durch $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$, gilt:

$$\mathrm{Jac}(F)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} -y\sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{397}$$

Sei nun $(x, y) = (x_s, y_s) \in \pi\mathbb{Z} \times \{0\}$ Ruhelage des Differentialgleichungssystems. Wir berechnen die Eigenwerte von $\mathrm{Jac}(F)(x_s, y_s)$. Bezeichne $\chi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(\mathrm{Jac}(F)(x_s, y_s) - zE_2)$ das charakteristische Polynom der Jacobi-Matrix von F, ausgewertet an der Stelle (x_s, y_s). Es gilt

$$\chi(z) = z^2 + zy_s \sin(x_s) - \cos(x_s)^2. \tag{398}$$

Da $(x_s, y_s) \in \pi\mathbb{Z} \times \{0\}$, gilt $y_s = 0, \sin(x_s) = 0$ sowie $\cos(x_s) \in \{\pm 1\}$, also $\cos(x_s)^2 = 1$. Das charakteristische Polynom vereinfacht sich mithin zu

$$\chi(z) = z^2 - 1. \tag{399}$$

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ gerade die Eigenwerte der Matrix $\mathrm{Jac}(F)(x_s, y_s)$ sind. Wir finden hier unabhängig von der Wahl der Ruhelage $(x_s, y_s) \in \pi\mathbb{Z} \times \{0\}$, dass $z_+ = 1, z_- = 1$ die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Da gilt $\Re[z_+] = +1 > 0$, liefert uns das Kriterium für linearisierte Stabilität, dass jede Ruhelage $(x_s, y_s) \in \pi\mathbb{Z} \times \{0\}$ instabile Ruhelage ist. $\square$

Aufgabe 28 Gegeben sei das autonome zweidimensionale System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \exp\left(1 - x^2 - y^2\right) \\ \dot{y} &= -x \exp\left(1 - x^2 - y^2\right). \end{aligned}$$

Wir stellen zunächst fest, dass die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y \exp(1 - x^2 - y^2)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x \exp(1 - x^2 - y^2)$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$-regulär sind. Damit genügt das Vektorfeld $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (t, x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ eine lokalen Lipschitz-Bedingung auf ganz $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2$ ist Gebiet, weil offen und zusammenhängend. Ferner gilt $\|F(t, x, y)\|_1 = |y \exp(1 - x^2 - y^2)| + |-x \exp(1 - x^2 - y^2)| \leq e(|x| + |y|) = e\|(x, y)\|$. Wir stellen also fest, dass $(\dot{x}, \dot{y}) = F(t, x, y)$ einer linearen Normschranke auf der rechte Seite genügt. Folglich ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für linear beschränkte Systeme anwendbar. Dieser liefert für alle Startwerte $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ des Anfangswertproblems $(\dot{x}, \dot{y}) = F(t, x, y)$ mit $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Definiere die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 0.5 \exp(1 - x^2 - y^2)$. Es ist $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ und es gilt $\langle \nabla H, F \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$, denn $\partial_x H(x, y) = -x \exp(1 - x^2 - y^2) = g(x, y)$ sowie $\partial_y H(x, y) = y \exp(1 - x^2 - y^2) = -f(x, y)$. Somit wissen wir, dass H eine Hamilton-Funktion und somit eine Erhaltungsgröße für das betrachtete System ist. Sei nun $\lambda_{(x_0, y_0)}$ die vorher erhaltene maximale Lösung des Systems für den Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, $H(x_0, y_0) = H(x(t), y(t))$, denn die Hamilton-Funktion ist entlang der Trajektorie einer Lösungskurve konstant. Wir finden also $\exp(1 - x_0^2 - y_0^2) = \exp(1 - x(t)^2 - y(t)^2)$. Durch Logarithmieren finden wir $1 - x_0^2 - y_0^2 = 1 - x(t)^2 - y(t)^2$, was zu $x_0^2 + y_0^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = r(t)^2$ umgeformt werden kann, wo $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, t \mapsto \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ den Radius der Lösungskurve in Polarkoordinaten beschreibt. Insbesondere stellen wir fest, dass $x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2 \in \mathbb{R}_0^+$ konstant ist. Das bedeutet, dass die Orbits des Systems konzentrische Kreislinien um den Ursprung (inkl. Radius 0 falls $x_0^2 + y_0^2 = 0 \Leftrightarrow (x_0 = 0, y_0 = 0)$) sind, d.h., insbesondere jeweils in konzentrischen Kreislinien um den Ursprung enthalten sind. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert nun mit der Definition $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, das System $\dot{x} = \exp(1 - r_0^2)y$, $\dot{y} = -\exp(1 - r_0^2)x$. Dies ist nun ein System linearer Differentialgleichungen. Wir können dieses durch Matrix-Exponentiation wie gewohnt lösen:

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & \exp(1-r_0^2) \\ -\exp(1-r_0^2) & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\exp(1-r_0^2)t) & \sin(\exp(1-r_0^2)t) \\ -\sin(\exp(1-r_0^2)t) & \cos(\exp(1-r_0^2)t) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{400}
$$

Damit finden wir also zu vorgegebenem Anfangswert (x_0, y_0) die Lösung:

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t)), \tag{401}$$

wobei für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x(t) = x_0 \cos(\exp(1-r_0^2)t) + y_0 \sin(\exp(1-r_0^2)t), \tag{402}$$

$$y(t) = y_0 \cos(\exp(1-r_0^2)t) - x_0 \sin(\exp(1-r_0^2)t). \tag{403}$$

Insbesondere sehen wir, dass gilt $\lambda(t) = \lambda(t + 2\pi\exp(r_0^2 - 1))$, da die trigonometrischen Funktionen jeweils $2\pi\exp(r_0^2 - 1)$ periodisch sind in der hier auftauchenden Form. Für den Fall, dass $(x_0, y_0) \neq 0$, d.h., wir eine nicht-konstante Lösung betrachten, folgt, dass $T = 2\pi\exp(r_0^2 - 1)$ die Periodenlänge ist. □

Aufgabe 29 Gegeben sei die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung $\ddot{x} = 2x - 4x^3$. Durch die Definition $y := x'$ können wir die Differentialgleichung in das äquivalenten system erster Ordnung überführen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2x - 4x^3 \end{pmatrix}. \tag{404}$$

Wir bestimmen nun zunächst die stationären Lösungen der Differentialgleichung: Es gilt für eine solche stationäre Lösung $y = 0$ und $0 = 2x - 4x^3 = 4x(1/2 - x^2)$. Hieraus finden wir, dass es die drei stationären Lösungen $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (\sqrt{2}^{-1}, 0)$, $(x_3, y_3) = (-\sqrt{2}^{-1}, 0)$ gibt. Definiere nun die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1/2y^2 - (x^2 - x^4)$. Sie ist $\mathcal{C}^2$-regulär auf dem gesamten Definitionsbereich. Dann gilt $-\partial_x H = 2x - 4y^3$ und $\partial_y H = y$, was mit der zweiten bzw. ersten Komponente der rechten Seite des Systems erster Ordnung übereinstimmt. Daher ist H eine Hamiltonfunktion des Systems, wegen $\langle \nabla H(x, y), (y, 2x - 4x^3)^T \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist H insbesondere Erhaltungsgröße. Für das betrachtete System stellen wir fest, dass es insbesondere autonom ist und die rechte Seite durch ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld auf dem Gebiet $\mathbb{R}^2$ gegeben ist. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz stellt nun sicher, dass es zu jedem Anfangswert $(x(\tau), y(\tau)) = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ und $\tau \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\lambda_{\tau,(\xi,\eta)} : I_{\tau,(\xi,\eta)} \to \mathbb{R}^2, \tau \mapsto (x(t), y(t))$ für das Anfangswertproblem gibt. Wir zeigen nun, dass eine solche maximale Lösung sogar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Hierzu sei die Anfangsbedingung $(x(\tau), y(\tau)) = (\xi, \eta)$ fixiert. Dann gilt, da H als Erhaltungsgröße konstant entlang der Trajektorie der maximalen Lösung $\lambda \equiv \lambda_{\tau,(\xi,\eta)}$ ist, $\mathbb{R} \ni H(\xi, \eta) = H(x(t), y(t))$. Damit finden wir die implizite Gleichung

$$1/2y^2 - (x^2 - x^4) = 1/2\eta^2 - (\xi^2 - \xi^4) \tag{405}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(x^2 - 1/2)^2}{1^2} = \frac{\eta^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(\xi^2 - 1/2)^2}{1^2}. \tag{406}$$

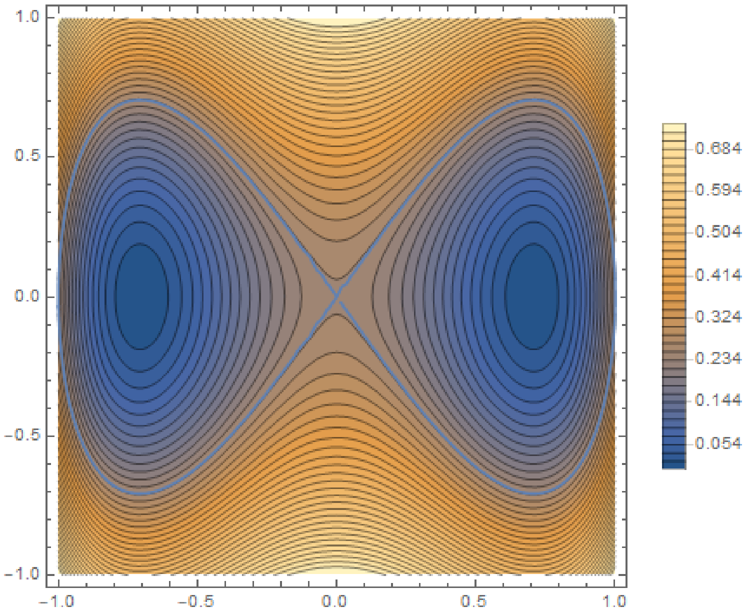


Abbildung 2: Phasenporträt zu Aufgabe 29. Darstellung der ein-dimensionalen Konturlinien der Hamilton-Funktion, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | H(x, y) + 0.25 = c > 0\}$ für verschiedene Werte von $c > 0$.

Die Summanden auf beiden Seiten sind nicht-negativ, so dass in der (y, x^2)-Ebene zumindest eine Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 1/2)$ und großer Halbachse der Länge $\sqrt{2}$ und kleiner Halbachse der Länge 1 resultiert. Insbesondere ist für beliebiges τ, also $0 \leq |y| \leq \sqrt{\eta^2/2 + (\xi^2 - 1/2)^2}$ und $0 \leq |x^2 - 1/2| \leq \sqrt{\eta^2/2 + (\xi^2 - 1/2)^2}$. Aus letzterem folgt insbesondere

$$\max\left\{0, 1/2 - \sqrt{\eta^2/2 + (\xi^2 - 1/2)^2}\right\} \leq x^2 \leq 1/2 + \sqrt{\eta^2/2 + (\xi^2 - 1/2)^2}, \quad (407)$$

da $x^2 \geq 0$ für alle reellen x. Damit finden wir nun

$$-\sqrt{1/2 + \sqrt{\eta^2/2 + (\xi^2 - 1/2)^2}} \leq x \leq \sqrt{1/2 + \sqrt{\eta^2/2 + (\xi^2 - 1/2)^2}}. \quad (408)$$

Damit haben wir gezeigt, dass für alle $t \in I_{\tau,(\xi,\eta)}$ die Lösung λ beschränkt bleibt. Da die Differentialgleichung auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist, liefert uns die Charakterisierung maximaler Lösungen über das Randverhalten, dass nur $I_{\tau,(\xi,\eta)} = \mathbb{R}$ möglich ist, um konsistent mit der Maximalitätseigenschaft von λ ist. Ein Phasenporträt findet man in der Abbildung 3. Hieraus folgern wir, dass die Ruhelagen $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ stabil sind (isolierte lokale Minima von der geplotteten Funktion $H + 0.25$), die Ruhelage (x_1, y_1) hingegen instabil ist (isolierter Sattelpunkt von $H + 0.25$). Für $c \neq 0.25$ erhält man nicht konstante periodische Lösungen. □

Aufgabe 30 (a) Das liefert uns eine instabile Quelle. (b) Wir bekommen einen Sattel. (c) Wir bekommen eine instabile Linienquelle. □

Aufgabe 31 Im Folgenden sind alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ anzuführen, die bestimmte Eigenschaften besitzen und zu begründen, dass es keine weiteren gibt, die ebenfalls diese Eigenschaften haben. In Teil (a) will man $f'(z) = zf(z)$

für alle $z \in \mathbb{C}$ sowie $f(0) = 1$. Wir stellen zunächst fest, dass die Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z^2/2)$ holomorph auf $\mathbb{C}$ als Komposition holomorpher Funktionen ist und die folgenden Eigenschaften besitzt: $F(0) = \exp(0^2/2) = \exp(0) = 1$ und ferner gilt nach der Kettenregl für holomorphe Funktionen $F'(z) = \exp(z^2/2)(z^2/2)' = \exp(z^2/2)z = F(z)z$. Also ist F eine holomorphe Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. Wir zeigen nun, dass F auch die einzige holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, die den Anforderungen in der Aufgabenstellung entspricht. Sei also f eine beliebige holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den geforderten Eigenschaften. Da holomorphe Funktionen unendlich oft komplex differenzierbar sind, finden wir durch nochmaliges Ableiten von $f'(z) = zf(z)$ zunächst $f''(z) = zf'(z) + f(z)$. Nochmaliges Ableiten liefert $f'''(z) = zf''(z) + 2f'(z)$. Wir behaupten nun, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f^{(n)}(z) = zf^{(n-1)}(z) + (n-1)f^{(n-2)}(z)$ und setzen $f^{(-1)}(z) \equiv 0, f^{(0)}(z) \equiv f(z)$. Die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ wurden bereits oben nachgeprüft. Wir nehmen an, die Aussage stimmt für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und zeigen, dass dann auch die Aussage für $n+1$ stimmt. In der Tat gilt $f^{(n+1)}(z) = (f^{(n)}(z))' = (zf^{(n-1)} + (n-1)f^{(n-2)}(z))' = (zf^{(n-1)}(z))' + ((n-1)f^{(n-2)}(z))' = f^{(n-1)}(z) + zf^{(n)}(z) + (n-1)f^{(n-1)}(z) = zf^{(n)}(z) + nf^{(n-1)}(z)$. Damit ist nachgewiesen, dass die Behauptung für generisches $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere sind am Punkt $z = 0$ nun alle Ableitungen von f bekannt: Es gilt mit $f(0) = f^{(0)}(0) = 1$ sowie $f'(0) = 0 \cdot f(0) = 0$, dass $f^{(2k-1)} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f^{(2k)}(z) = 2^k(k-1)!$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wie man in beiden Fällen leicht durch Induktion sieht. Insbesondere finden wir, dass $F^{(n)}(z) = f^{(n)}(z)$ für alle $z \in \mathbb{N}_0$ gilt. Zusammen damit, dass $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend ist, liefert uns der Identitätssatz nun, dass $f(z) = F(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ gelten muss. Zusammenfassend ist also die Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z^2/2)$ die einzige holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen erfüllt. In Teil (b) will man haben, dass $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt und dass ferner $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ gilt. Wir stellen zunächst fest, dass die Funktionalgleichung $f(f(z)) = z$ zeigt, dass $f = f^{-1}$, also insbesondere, dass f eine bijektive Funktion. Als holomorphe Funktion, die bijektiv ist, wissen wir bereits, dass auch $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijektiv ist. Insbesondere ist f also eine konforme Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Indem wir $\mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{C}}$ setzen, können wir f bijektiv auf die Riemann'sche Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ erweitern, $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \hat{f}(z)$. Dabei ist $\hat{f}(z) = f(z)$ falls $z \in \mathbb{C}$ und $\hat{f}(\infty) = \infty$ falls $z = \infty$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\hat{f}$ dann eine Möbius-Transformation ist, und, da ∞ Fixpunkt von $\hat{f}$ ist, sogar gilt $\hat{f}(z) = az + b$ mit $\mathbb{C} \ni a \neq 0, b \in \mathbb{C}$. Also hat wegen $\hat{f}(z) = f(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ die Funktion f die Form einer linear-affinen Transformation, $f(z) = az + b$ mit $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$. Nun gilt $f'(z) = a$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Indem wir die Bedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ verwenden, sehen wir, dass $f(z) = z$, d.h., $a = 1 \in \mathbb{C}^\times$ und $b = 0 \in \mathbb{C}$. Das heißt, $f = \mathrm{id}_\mathbb{C}$. In der Tat überprüfen wir, dass f die geforderten Eigenschaften hat, denn $\mathrm{id}_\mathbb{C}(\mathrm{id}_\mathbb{C}(z)) = \mathrm{id}_\mathbb{C}(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{id}_\mathbb{C}(0) = 0$ und $\mathrm{id}'_\mathbb{C}(0) = 1$. Durch die Herleitung der Form von f sehen wir bereits, dass das f auch eindeutig festgelegt ist, d.h., andere holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existieren nicht. $\square$

Aufgabe 32 Sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft, dass $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{E}$. Zu zeigen ist, dass dann bereits $|f(z)| < 1$. Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit den beschriebenen Eigenschaften und nimm an, dass $|f(z)| < 1$ nicht gilt für alle $z \in \mathbb{E}$. Dann gibt es ein $\omega \in \mathbb{E}$, sodass $|f(z)| = 1$. Da nach Voraussetzung an f aber gilt $|f| \leq 1$ auf dem gesamten Definitionsbereich, handelt es sich bei $\omega \in \mathbb{E}$ um ein, nicht notwendigerweise isoliertes, Maximum von $|f|$. Da $\mathbb{E}$ als Gebiet offen ist, gibt es ein $U \subseteq \mathbb{E}$, sodass $z \in U$. Das Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen liefert dann, dass f auf dem Gebiet $\mathbb{E}$ bereits die konstante Funktion ist, $f(z) = c \in \mathbb{C}$, wobei wegen $|f(\omega)| = 1$ gilt $|c| = 1$. Da aber auch $0 \in \mathbb{E}$, gilt nun $1 > |f(0)| = |c| = 1$ nach Voraussetzung an f. Das ist ein Widerspruch. Also war die Annahme falsch und es gibt kein $z \in \mathbb{E}$, sodass $|f(z)| < 1$ verletzt ist. □

Aufgabe 33 Gesucht sind zunächst alles ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass gilt $|f(z) - 3| \geq 1$. Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

- *Fall 1: f ist nicht-konstant.* Sei f eine nicht-konstante Funktion und nimm an, dass sie die beschriebenen Eigenschaften hat. Nach dem kleinen Satz von Picard gilt für jede nicht-konstante ganze Funktion, dass $f(\mathbb{C})$ entweder ganz $\mathbb{C}$ ist oder $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt ist. Da sowohl $w_1 = 3$ als auch $w_2 = 4$ die Ungleichung $|w - 3| \geq 1$ verletzen und überdies $w_1 \neq w_2$ haben wir zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{C}$ gefunden, die nicht von f angenommen werden dürfen. Das ist aber ein Widerspruch zu den oben hergeleiteten Ergebnis für das nicht-konstante f gemäß dem kleinen satz von Picard. Also kann es keine nicht-konstante ganze Funktion geben, die den Anforderungen an f genügt.

- *Fall 2: f ist konstant.* Dann gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, sodass $f(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Forderung an f, $|f(z) - 3| \geq 1$ zu genügen, übersetzt sich dann in eine Einschränkung für die zulässigen Werte von c: $|c - 3| \geq 1$, mit anderen Worten, $c \in \mathbb{C} \setminus B_1(3)$.

Da eine Funktion entweder konstant oder nicht-konstant ist, haben wir somit alle ganzen Funktionen gefunden, die den Spezifikationen der Aufgabenstellung Rechnung tragen.
Wir entscheiden nun, ob es eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf eine Umgebung U von $0 \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $f^{(n)} = n^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir nehmen an, $f : U \to \mathbb{C}$ wäre eine solche Funktion. Durch eventuellen Wechsel von der Umgebung U von 0 zu einem $B_\epsilon(0) \subseteq U$, haben wir eine offene Umgebung von 0 gefunden, auf der die Spezifikation der Ableitungen gilt. Da f holomorph ist, können wir $\epsilon > 0$ so wählen, dass f in eine Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ entwickelt werden kann, d.h., dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} z^k, \tag{409}$$

wobei $f^{(0)} = f(0) \in \mathbb{C}$ und ϵ der Konvergenzradius der Taylor-Reihe ist. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard finden wir für den Konvergenzradius $\epsilon = 0$, falls

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|} = \infty, \tag{410}$$

was einen Widerspruch zu $\epsilon > 0$ darstellt. In der Tat, finden wir

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| = \left|\frac{n^{2n}}{n!}\right| \geq \left|\frac{n^{2n}}{n^n}\right| = |n^n| = n^n > 0, \tag{411}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der streng wachsenden Monotonie von $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, finden wir also

$$\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|} \geq \sqrt[n]{n^n} = n, \tag{412}$$

wodurch wir durch den Betrachtung des Grenzwerts $n \to \infty$ das Vorliegen der Voraussetzungen für die Anwendung der Formel von Cauchy-Hadamard im einschlägigen Fall verifizieren. Wir finden also $\epsilon = 0$, d.h., die Taylor-Reihe konvergiert nur in einem Punkt, im Widerspruch dazu, dass $\epsilon > 0$ infolge Holomorphie von f. Damit war die Annahme, es gäbe ein holomorphes f mit den beschriebenen Eigenschaften falsch, und es gibt keine holomorphe Funktion mit den beschriebenen Eigenschaften. □

Aufgabe 34 (a) Gesucht sind genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, zusammenzufassen in einer Menge $K \subseteq \mathbb{R}$, sodass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}} \tag{413}$$

gegen eine reelle Zahl konvergiert. Wir arbeiten mittels Fallunterscheidung:

- *Fall 1:* $x \in (-2, -1)$. Dann gilt $(2x + 3) =: q \in (-1, 1)$, also insbesondere $|q| < 1$. Da $\sqrt{k} \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}}\right| \leq |q|^k \tag{414}$$

  für festes aber beliebiges $x \in (-2, -1)$. Das Majorantenkriterium liefert uns nun zusammen mit der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |q|^k = (1 - |q|^k)$, dass die angegebene Reihe absolut konvergiert. Insbesondere konvergiert sie dann auch und es gibt eine reelle Zahl r_x, gegen den die Reihe konvergiert. Also gilt $(-2, -1) \subseteq K$.

- *Fall 2:* $x \in [-1, \infty)$. Dann gilt $2x + 3 \geq 1$ für alle $x \in [-1, \infty)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ finden wir nun

$$\frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}. \tag{415}$$

  Würde die angegebene Reihe also für $x \in [-1, \infty)$ konvergieren, so bedeutete dies, dass sie eine konvergente Majorante für die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ darstellen würde. Dies ist aber ein Widerspruch zur bekannten Aussage, dass die harmonische Reihe divergiert. Also war die Annahme, die zu untersuchende Reihe konvergierte für $x \in [-1, \infty)$ falsch, und sie divergiert stattdessen. Folglich gilt $x \notin K$ für alle $x \in [-1, \infty)$ und somit $K \subseteq (-\infty, -1)$.

- *Fall 3:* $x \in (-\infty, -2)$. Angenommen, die angegebene Reihe konvergiert. Für $x \in (-\infty, -2)$ und $k \in 2\mathbb{N}$ gilt $(2x+3)^k/\sqrt{k} > 0$ und $2x+3 > 1$. Wir finden nun, dass $\lim_{k\to\infty}(2x+3)^k/\sqrt{k} = \infty$. Damit haben wir aber einen Widerspruch zur Konvergenz der Reihe, denn die einzelnen $(2x+3)^k/\sqrt{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ bilden keine Nullfolge, im Widerspruch zur Konvergenz der Reihe. Also divergiert die Reihe für die Wahl $x \in (-\infty, -2)$ und es gilt $K \subseteq [-2, -1)$.

- *Fall 4:* $x = -2$. In diesem Fall gilt $(2x+3) = -1$. Wir definieren die reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $a_k = (-1)^k/\sqrt{k}$ und untersuchen die Konvergenz der Reihe

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{416}$$

  Da die Wurzelfunktion $\sqrt{\,}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ streng monoton steigend ist, ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend, insbesondere also monton fallend. Ferner gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k} = 0$, d.h., $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallende Nullfolge. Die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums sind also erfüllt. Dieses liefert die Konvergenz der zu untersuchenden Reihe in $x = -2$, sodass auch $-2 \in K$.

Insgesamt haben wir also $K = [-2, -1)$ gezeigt. $\square$

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 2$. Sei $\gamma_a : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto a + 2\exp(it)$. γ_a ist eine komplexe Paramterisierung von $\partial B_2(a)$. Falls $a \in B_2(0)$, so ist $0 \in B_2(a)$. Falls $a \in K_{2,\infty}(0) \equiv \{z \in \mathbb{C} | 2 < |z| < \infty\}$, so ist $0 \notin B_2(a)$. Im zweiten Fall gilt insbesondere $0 \notin \bar{B}_2(a)$ und wir finden ein $\epsilon > 0$, sodass $0 \notin B_{2+\epsilon}(a)$, bspw. durch $\epsilon = 0.5 \cdot \mathrm{dist}(0, B_2(a))$.

- *Fall 1:* $a \in K_{2,\infty}(0)$. Dann ist, mit der Wahl von $\epsilon > 0$ wie oben angegeben, die Funktion $f : B_{2+\epsilon}(a) \to \mathbb{C}, z \mapsto (1 - 2z^2)/z^3$ auf dem gesamten Definitionsbereich holomorph. Dieser ist als offener Ball insbesondere einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$. Die Kurve γ_a verläuft offenbar ganz in $B_{2+\epsilon}(a)$, da $\partial B_2(a) \subset B_{2+\epsilon}(a)$. Ferner definiert γ_a is glatte Funktion mit kompaktem Definitions einen rektifizierbaren Weg und die Tatsache, dass $\gamma_a(0) = \gamma_a(2\pi) = a + 2$, stellt sicher, dass der Weg auch geschlossen ist. Der Integralsatz von Cauchy liefert nun, dass

  $$\int_{\gamma_a} \frac{1 - 2z^2}{z^3} dz = 0. \tag{417}$$

- *Fall 2:* $a \in B_2(0)$. Wir definieren nun die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1 - 2z^2$. Diese ist holomorph auf dem ganzen Definitionsbereich. Es gilt ferner

  $$\int_{\gamma_a} \frac{1 - 2z^2}{z^3} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{\partial^2}{\partial w^2}\bigg|_{w=0} \frac{f(z)}{(z - w)} dz \right) = 2\pi i f''(0) \tag{418}$$

  nach dem Integralsatz von Cauchy. Es ist $f''(z) = -4$. Damit finden wir

  $$\int_{\gamma_a} \frac{1 - 2z^2}{z^3} dz = -8\pi i \tag{419}$$

  für alle $a \in B_2(a)$.

Damit haben wir für alle in Frage kommenden $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 2$ den Wert des gesuchten Integrals berechnet. $\square$

Aufgabe 35 (a) Eine solche Funktion kann es nicht geben. Angenommen, es gäbe ein auf $K_{0,2}(0) \equiv \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 2\}$ holomorphes f, sodass $\lim_{z\to 0}[\sqrt{|z|}f(z)] = 1$. Als auf einem Kreisring mit innerem Radius 0 holomorphe Funktion besitzt f eine Laurent-Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k. \tag{420}$$

Wir definieren nun die Funktion $g : K_{0,2}(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto |f(z)\sqrt{|z|}|$. Diese ist auf $K_{0,2}(0)$ zumindest stetig. Da $\lim_{z\to 0} f(z)\sqrt{z} = 1$ gilt ebenfalls $\lim_{z\to 0} |f(z)\sqrt{|z|}| = \lim_{z\to 0} g(z) = 1$. Wir zeigen nun, dass ein endlicher Wert nur erreicht werden kann, wenn der Hauptteil der laurent-Reihe verschwindet, d.h., $a_k = 0$ für alle $k \leq 0$. Falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k \leq 0$, hat f in $z = 0$ eine wesentliche Singularität. In diesem Fall nimmt f bereits in einer punktierten Umgebung von 0 jeden Wert aus $\mathbb{C}$ an und bereits der Grenzwert $\lim_{z\to 0} |f(z)|$ existiert nicht im uneigentlichen Sinne. Dann existiert aber auch der Grenzwert $\lim_{z\to 0} g(z)$ nicht, im Widerspruch dazu, dass dieser sogar 1 sein soll. Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass sich die Laurent-Entwicklung von f auf

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_n z^n \tag{421}$$

reduziert. Dies können wir schreiben als

$$f(z) = \frac{h(z)}{z^N},\ h(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_n z^{n+N} \tag{422}$$

und stellen fest, dass h holomorph auf ganz $B_2(0)$ ist. Das reelle Maximumsprinzip erlaubt uns nun $0 \leq m \leq M < \infty$ zu finden, sodass $m \leq |h(z)| \leq M$ zumindest auf dem Kompaktum $\bar{B}_1(0) \subsetneq B_2(0)$. Damit finden wir $m|z|^{-N+0.5} \leq g(z) \leq M|z|^{-N+0.5}$ auf $\bar{B}_2(0) \setminus \{0\}$. Für beliebiges N gilt aber $\lim_{z\to 0}(m|z|^{-N+0.5}) = \infty$ und $\lim_{z\to 0}(M|z|^{-N+0.5}) = \infty$, d.h., nach dem Quetschlemma, auch $\lim_{z\to 0} g(z) = \infty$, im Widerspruch zu $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$ laut Voraussetzung. Also verschwindet der Hauptteil der Laurent-Reihe und f hat eine Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt 0 und ist also insbesondere holomorph in $z = 0$. Zusammen mit der Stetigkeit von $z \mapsto \sqrt{|z|}$ folgt dann aber $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$, im Widerspruch dazu, dass $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$. Zusammengefasst erhalten wir also in jedem Fall einen Widerspruch, sodass eine Funktion mit der gewünschten Eigenschaft nicht existieren kann. $\square$

(b) Wir definieren die Matrix $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{423}$$

und setzen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, y \mapsto Ay$. Als lineare Abbildung ist diese Abbildung stetig differenzierbar. Man sieht durch Einsetzen sofort, dass $F(0) = 0$. Wir sehen ferner, dass $DF(0) = A$ und die Matrix A das charakteristische Polynom $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto$

$\chi_A(A - zE_2) = z^2$ hat. Daher hat die Matrix A nur einen Eigenwert, nämlich $z_1 = 0$ und dieser hat Real-Teil $\Re[z_1] = 0 \leq 0$. Andererseits stellen wir fest, dass $y' = F(y) = Ay$ ein lineares System mit konstanter Koeffizienten-Matrix A ist. Letztere liegt per Wahl bereits in Jordan-Normalform vor und wir sehen, dass $z_1 = 1$ offenbar geometrische Vielfachheit $\mu_g(z_1) = 1$ hat, da es nur einen Jordan-Block zum Eigenwert z_1 gibt. Also gilt $\mu_g(z_1) \neq \mu_a(z_1)$. Daher ist der Eigenwert z_1 von $DF(0) = A$ nicht halb-einfach. Da das betrachtete autonome System linear mit konstanter Koeffizientenmatrix ist, liefert uns die Stabilitätstheorie bereits, dass 0 keine stabile Ruhelage ist. $\square$

(c) Wir definieren das Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto 1 + y^2$. Wir behaupten, dass die Differentialgleichung $y' = P(y)$ für keinen Anfangswert $(y(\tau) = \zeta)$ mit $\tau, \zeta \in \mathbb{R}$ eine globale Lösung besitzt und nehmen dazu an, es gäbe eine globale Lösung. Offenbar ist die Differentialgleichung autonom und hat eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbare, d.h.,. lokal Lipschitz-stetige, rechte Seite. Für (τ, ζ) ein Paar aus Anfangszeit und Anfangswert garantiert nun der globale Existenz und Eindeutigkeitssatz die Existenz einer eindeutigen maximalen, nicht aber notwendigerweise globalen Lösung. Wir stellen fest, dass die Funktion

$$\begin{aligned} y : (-\pi/2 + \tau - \arctan(\zeta), \pi/2 + \tau - \arctan(\zeta)) \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \tan((t - \tau) + \arctan(\zeta)) \end{aligned} \tag{424}$$

offenbar $y(\tau) = \tan(\arctan(\zeta)) = \zeta$ erfüllt und darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} d_t y(t) &= \frac{1}{\cos((t-\tau) + \arctan(\zeta))^2} \\ &= \frac{\sin((t-\tau) + \arctan(\zeta))^2 + \cos((t-\tau) + \arctan(\zeta))^2}{\cos((t-\tau) - \arctan(\zeta))^2} \\ &= 1 + \tan((t-\tau) + \arctan(\zeta))^2 \\ &= P(y(t)) \end{aligned} \tag{425}$$

für beliebiges $t \in (-\pi/2+\tau-\arctan(\zeta), \pi/2+\tau-\arctan(\zeta))$. Da für alle $a \in \partial(-\pi/2+\tau - \arctan(\zeta), \pi/2 + \tau - \arctan(\zeta)) = \{-\pi/2 + \tau - \arctan(\zeta), \pi/2 + \tau - \arctan(\zeta)\}$ gilt

$$\limsup_{t \to a} |y(t)| = \infty, \tag{426}$$

da der Tangens $\tan x$ Polstellenmenge $\pi/2+\pi\mathbb{Z}$ hat, liefert uns die Charakterisierung maximaler Lösungen anhand ihres Randverhaltens, dass wir in der Tat die maximale Lösung $\lambda_{\tau,\zeta} : (-\pi/2 + \tau - \arctan \zeta, \pi/2 + \tau - \arctan \zeta), t \mapsto \tan(t - \tau + \arctan \zeta)$ für jeden Anfangswert gefunden haben. Da eine globale Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, schnitte ihr Graph mindestens zwei der Graphen der soeben als maximal klassifizierten Lösungen, weil die maximalen Lösungen eine Zerlegung der (t, y)-Ebene bilden. Dies ist ein Widerspruch zur soeben festgestellten Maximalität der Lösungen. Also besitzt die Differentialgleichung $y' = P(y)$ für die Wahl des Polynoms $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto 1 + y^2$ keine globale Lösung. $\square$

Aufgabe 36 (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $\exp(f(z)) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und ein $c \in \mathbb{C}^\times$. Der Fall $c = 0$ ist unbeachtlich, da die komplexe Exponentialfunktion nach $\mathbb{C}^\times$ abbildet. Zu zeigen ist, dass f bereits dann konstant ist. Wir stellen zunächst fest, dass f als holomorphe Funktion insbesondere stetig ist. Wir differenzieren nun $\exp(f(z)) = c$ auf beiden Seiten und finden $f'(z) \cdot \exp(f(z)) = \exp(f(z)) \cdot c = 0$. Da $c \neq 0$, folgt $f'(z) = 0$. Die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}$ sei mit g bezeichnet. Wir haben dann für g die gewöhnliche Differentialgleichung $g'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese hat nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz und der Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten die maximale Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto \gamma$ mit einem $\gamma \in \mathbb{C}$. Die Voraussetzungen der beiden Sätze sind vorliegend unproblematisch, sodass sie nicht weiter diskutiert zu werden brauchen. Da jeder Punkt von $\mathbb{R}$ Häufungspunkt ist, handelt es sich bei $\mathbb{R}$ um eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, die einen Häufungspunkt besitzt. Der Identitätssatz angewendet auf f und die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \gamma$ liefert nun, dass f konstant ist. $\square$

(b) Wir zeigen nun, dass falls g holomorph ist und $\Re[g(z)] \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, g bereits konstant ist. Zu diesem Zwecke definieren wir die, mit g, ebenfalls ganze Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(g(z))$. Es gilt $\exp(g(z)) = \exp(\Re[g](z)) \exp(i\Im[g](z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere finden wir $|h(z)| = \exp(\Re[g](z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nun gilt laut Voraussetzung, dass $0 \leq |h(z)| \leq \exp(M)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist also h eine beschränkte und ganze Funktion. Der Satz von Liouville liefert nun, dass ein $c \in \mathbb{C}^\times$ (da die Exponentialfunktion nur nach $\mathbb{C}^\times$ abbildet) existiert, sodass $\exp(g(z)) = c$. Wenden wir nun die Aufgabenteil (a) bewiesene Aussage auf die Funktion g an, erhalten wir ein $\gamma \in \mathbb{C}$, sodass $g(z) = \gamma$ für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h., dass g konstant ist. $\square$

Aufgabe 37 (a) Gegeben sei der folgende Weg in $\mathbb{C}$,

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} e^{i\pi/2} + e^{2i(t-\pi)} & t \in [0, \pi] \\ -1 + i + 2e^{4it} & t \in (\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{427}$$

Eine Skizze des Weges findet sich in Fig. 3. Hierzu Erläuterungen: Für $0 \leq t \leq \pi$ handelt es sich um einen (Voll-)Kreisbogen mit Mittelpunkt $\exp(i\pi/2) = i$ vom Radius 1, der im mathematisch positiven Sinne einmal durchlaufen wird. Dabei fallen Startpunkt und Endpunkt zusammen, d.h., $\gamma(0) = 1 + i = \gamma(\pi)$. Für $\pi < t \leq 2\pi$ beschreibt der Weg einen (Voll-)Kreisbogen um den Mittelpunkt $-1 + i$ vom Radius 2. Da gilt $\lim_{t\to\pi^+} \gamma(t) = 1 + i = \lim_{t\to\pi^-} \gamma(t)$, handelt es sich insbesondere um einen stetigen Weg. Der Vollkreisbogen um $-1 + i$ wird allerdings zweimal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Zudem bemerken wir $\gamma(0) = 1 + i = \gamma(2\pi)$, d.h., der Weg ist stetig, stückweise glatt und geschlossen.

(b) Wir sollen nun das Kurvenintegral

$$I = \int_\gamma \frac{(z - (2 - i))dz}{(z^2 + 1)(z^2 - 3 + 4i)} \tag{428}$$

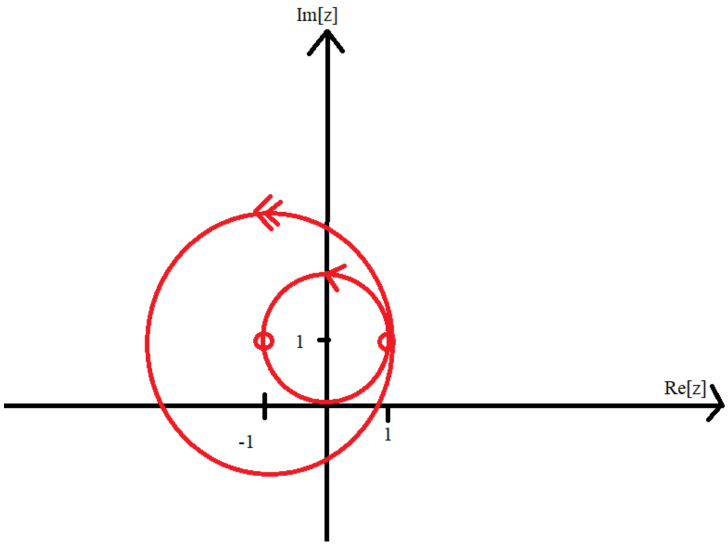


Abbildung 3: Skizze des in A37(a) angegebenen Wegs in der Gauss'schen Zahlenebene.

berechnen, wobei γ den in (a) angegebenen Weg bezeichnet. Dem Hinweis folgend berechnen wir $(2-i)^2 = 4-1-4i = 3-4i$, sodass

$$I = \int_\gamma \frac{(z-(2-i))}{(z^2+1)(z-(2-i))^2} = \int_\gamma \frac{(z-(2-i))^{-1}}{z^2+1} dz, \tag{429}$$

wobei wir bemerken, dass $z \mapsto z-(2-i)$ für keine Nullstelle in $\bar{B}_1(i)$ und $\bar{B}_2(-1+i)$ besitzt, denn es gilt $\|(2-i)-(-1+i)\|^2 = 9+4 > 4$. Ferner beachten wir, dass

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{0.5i}{z+i} + \frac{-0.5i}{z-i} \tag{430}$$

nach Partialbruchzerlegung. Offenbar gilt $i \in B_1(0)$ und $i \in B_2(-1+i)$, aber $-i \notin \bar{B}_1(i)$ und $-i \notin \bar{B}_2(-1+i)$, denn $\|-i-(-1+i)\| = 4+1 > 4$. Wir schreiben das Integral I also um $I = I_1 + I_2$, wobei

$$I_1 := \frac{i}{2} \int_\gamma \frac{z-(2-i)^{-1}}{z+i} dz \;\&\; I_2 := \frac{-i}{2} \int_\gamma \frac{(z-(2-i))^{-1}}{z-i} dz. \tag{431}$$

Die Funktion $f_1 : B_{\sqrt{4.5}}(-1+i) \to \mathbb{C}, z \mapsto (z-(2-i))^{-1}(z+i)^{-1}$ ist offenbar holomorph in einem Gebiet, dass die von $\gamma|_{[0,\pi]}$ und $\gamma|_{[\pi,2\pi]}$ berandeten Bereiche und deren Ränder umfasst, d.h., $B_{\sqrt{4.5}}(-1+i) \supsetneq \bar{B}_1(i), \bar{B}_2(-1+i)$. Nach dem Integralsatz von Cauchy bedeutet das aber gerade, dass $I_1 = 0$. Um I_2 zu berechnen definieren wir die Funktion $f_2 : B_{\sqrt{4.5}}(-1+i) \to \mathbb{C}, z \mapsto -0.5i(z-(2-i))^{-1}$ und stellen fest, dass diese ebenfalls auf dem gesamten (offenen) Definitionsbereich holomorph ist. Da $i \in \bar{B}_1(i), \bar{B}_2(-1+i) \subsetneq B_{\sqrt{4.5}}(-1+i)$ und γ i offenbar dreimal im mathematisch positiven Sinne umläuft, gilt für die Windungszahl $n(\gamma, i) = 3$. Damit finden wir laut Cauchy'scher Integralformel

$$2\pi i n(\gamma, i) f_2(i) = \int_\gamma \frac{f_2(z)}{z-i} dz = I_2. \tag{432}$$

Einsetzen liefert nun $I_2 = 3\pi/(-2+2i) = 3\pi(1+i)/4$. Damit finden wir zusammen mit $I_1 = 0$ für das gesuchte Kurvenintegral

$$\int_\gamma \frac{(z-(2-i))dz}{(z^2+1)(z^2-3+4i)} = \frac{3\pi(1+i)}{4}. \tag{433}$$

Damit ist das Integral berechnet. □

Aufgabe 38 (a) Wir betrachten zunächst die wie folgt definierte Funktion

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2x^2+8}. \tag{434}$$

Wir zeigen zunächst, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Hierzu arbeiten wir mit Fallunterscheidung. Für $x = 0$ gilt auch $x^2 = 0$ und die Reihe konvergiert gegen den Grenzwert 0, da jeder Summand gerade 0 ist. Im Fall $x \neq 0$ gilt auf jeden Fall $x^2 > 0$. Damit können wir schreiben

$$0 < \frac{x^2}{n^2x^2+8} = \frac{1}{n^2+(8/x^2)} < \frac{1}{n^2}. \tag{435}$$

für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt finden wir somit die Majorante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty. \tag{436}$$

Definieren wir nun die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2/(n^2x^2+8)$, so stellen wir fest, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq f_n(x) < \frac{1}{n^2}, \tag{437}$$

und dass die Majorantenreihe (s. oben) (absolut) konvergiert. Ferner ist jedes der f_n eine stetige Funktion von x, also auch jede endliche Summe über die f_n's. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß über die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen, konvergiert also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$. Da jede der (endlichen) Partialsummen eine stetige Funktion ist, liefert die gleichmäßige Konvergenz insbesondere, dass auch f eine stetige Funktion ist. Lassen wir zu, dass $x \in \mathbb{C}$ ist, so ist die größte offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, auf der $f(z)$ holomorph ist, gegeben durch

$$U = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-i\sqrt{8}/n, i\sqrt{8}/n\} \cup \{0\} \right), \tag{438}$$

denn die erste ausgeschlossene Menge ist gerade die Menge der (einfachen) Polstellen der Funktionenreihe und 0 ist der (gemeinsame) Grenzwert der Polstellen, die in der oberen bzw. unteren komplexen Halbebene angesidelt sind. Wäre f als Funktion einer komplexen variablen dort holomorph, so wäre sie dort insbesondere stetig. Wählt man bspw. eine Folge, die "nahe" genug an den Polstellen in der oberen

Halbebene liegt, stellt man fest, dass der dazugehörige Grenzwert der Folge definiert durch die Funktionswerte an dieser Stelle nicht in $\mathbb{C}$ ist. Auf der anderen Seite gilt, dass $\lim_{\mathbb{R}\ni x\to 0} f(x) = 0$, im Widerspruch zur Stetigkeit.
(b) Seien $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ mit $n \geq 1$ und $|a_j| = 1$ für alle $1 \leq j \leq n$. Wir zeigen, dass es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ gibt, sodass das Produkt der Abstände zwischen den a_j und z mindestens 1 ist. Sei $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ beliebig aber fest. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \prod_{i=1}^n (z - a_i)$. Diese ist als Polynomfunktion vom Grad n eine ganze Funktion. Ferner ist $f|_{B_1(0)}$ holomorph auf $B_1(0)$ und $f|_{\bar{B}_1(0)}$ ist ferner stetig auf $\bar{B}_1(0)$. Nun ist $|f(0)| = \prod_{i=1}^n |a_i| = 1$ nach Voraussetzung an die a_i's für $1 \leq i \leq n$. Laut Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen auf beschränkten Gebieten, die eine stetige Fortsetzung auf den Abschluss des Gebiets erlauben, nimmt $|f|$ ein Maximum am Rand des Gebiets an. Das bedeutet in unserem Fall, dass es ein $z \in \partial B_1(0)$, d.h., $|z| = 1$, gibt, sodass

$$\prod_{i=1}^n d(a_i, z) = \prod_{i=1}^n |z - a_i| \geq 1. \tag{439}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Aufgabe 39 Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq -x^2\}$ und $f : D \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2y$. Für die Untersuchung definieren wir $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2y$ und beachten, dass $h(x, y) = x^2 + (y + 1)^2 - 1 \geq -1$. Wir bemerken, dass h stetig ist, und ferner gilt $h^{-1}([-1, 0]) = \bar{B}_1((0, -1))$ gilt. Als abgeschlossene Kreisscheibe ist $\bar{B}_1((0, -1))$ abgeschlossen und wir stellen fest, dass $h|_{\bar{B}_1((0,-1))} : \bar{B}_1((0, -1)) \to \mathbb{R}$ nach dem Minimumsprinzip für stetige Funktionen auf dem Kompaktum $\bar{B}_1((0, -1)) \subset \mathbb{R}^2$ ein globales Minimum annimmt. In der Relativtopologie ist auch $\bar{B}_1((-1, 0)) \cap D \neq \emptyset$ abgeschlossen, sodass $f|_{\bar{B}_1((0,-1))\cap D} : \bar{B}_1((0, -1)) \cap D \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ auf $\bar{B}_1((0, -1)) \cap D$ ein globales Minimum annimmt und dieses bereits mit dem globalen Minimum von f übereinstimmt. Wir sehen, dass das globale Minimum vom h bei $(0, -1)$ liegt. Da $(0, -1) \notin D$ und h keine anderen Extrema hat, kann das globale Minimum nur Randpunkten angenommen werden, d.h., für geeignete $(x, y) \in \partial D$. Wir wählen die folgende $\mathcal{C}^2$-Paramterisierung $\Phi : \mathbb{R} \to \partial D, t \mapsto (t, -t^2)$ und finden $(f \circ \Phi)(t) = t^2 - 2t^2 + t^4 = t^4 - t^2 = t^2(t^2 - 1) = t^2(t - 1)(t + 1)$. Ableiten liefert nun $d_t(f \circ \Phi)(t) = 4t^3 - 2t$, sodass wir die drei Nullstellen $t_0 = 0, t_\pm = \pm\sqrt{2}^{-1}$ finden. Nochmaliges Ableiten liefert $d_t^2 f(\Phi(t)) = 12t^2 - 2$, sodass wir finden $d_t^2 f(\Phi(t_\pm)) = 4 > 0$ und $d_t^2 f(\Phi(0)) = -2 < 0$. Das hinreichende und notwendige Kriterium für lokale Minima und Maxima liefert nun, dass $t_\pm$ jeweils zu einem lokalen Minimum von $(f \circ \Phi)$ korrespondieren und t_0 zu einem lokalen Maximum. Infolge der obenstehenden Überlegungen handelt es sich sogar um globale Minima. Da $f(t_+) = -1/4 = f(t_-)$ und $\Phi(t_-) = (-\sqrt{2}^{-1}, -1/2) \in \partial D, \Phi(t_+) = (\sqrt{2}^{-1}, -1/2) \in \partial D$ haben wir mit $\Phi(t_-), \Phi(t_+)$ infolge des oben Gesagten sogar die Stellen der globalen Minima von f bestimmt. □

4.3 Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe 1 (F14T2A2) Gegeben sei die matrixwertige Funktion $A : (-1, 1) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $t \mapsto A(t)$, definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & \frac{2t}{t^2-1} \end{pmatrix}. \tag{440}$$

Zu zeigen ist, dass das Anfangswertproblem $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $x(0) = (2, 1)$ eine eindeutige maximale Lösung hat, und diese ist explizit zu bestimmen. Es bezeichne $\|.\|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ und es sei $\|.\|_i$ die dazugehörige induzierte Matrixnorm. Dann gilt $\|x'(t)\| = \|A(t)x(t)\| \leq \|A(t)\|_i \|x(t)\|$ wegen Submultiplikativität der Matrixnorm. Wir beachten, dass $t \mapsto A(t)$ ferner eine auf ganz $(-1, 1)$ stetige Funktion erklärt, sodass mit der Stetigkeit und Nicht-Negativität der Matrix-Norm $\|.\|_i$ auch $\sigma(t) \equiv \|A(t)\|_i$ eine stetige Funktion $\sigma : (-1, 1) \to \mathbb{R}_0^+$. erklärt. Damit finden wir $\|x'(t)\| \leq \sigma(t)\|x(t)\|$. Da offen und zusammenhängend ist ferner der Definitionsbereich der rechten Seite, $(-1, 1) \times \mathbb{R}^2$, ein Gebiet. Für einen beliebigen Anfangswert $x(0) = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ liefert uns nun der Existenz- und Eindeutigekitssatz für Systeme erster Ordnung mit linear beschränkter rechter Seite, dass es eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\lambda_{(0;\xi_1,\xi_2)} : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $x(0) = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$ gibt. Wir bestimmen diese nun. Als lineares System hat die Differentialgleichung zum Anfangswert $x(0) = (0, 0)$ die Null-Funktion als Lösung. Infolge der Zerlegungseigenschaft der Menge aller Trajektorien, können wir $x_1(t) \neq 0$ und $x_2(t) \neq 0$ für die Lösungen des eigentlichen Anfangswertproblems folgern. Damit finden wir für die zweite Komponente:

$$x_2'(t) = \frac{2t}{t^2 - 1} x_2(t), \tag{441}$$

was wir durch Separation der Variables auflösen:

$$\int_{x_2(0)}^{x_2(t)} \frac{ds}{s} = \int_0^t \frac{d\tau\,(2\tau)}{\tau^2 - 1} \tag{442}$$

$$\Rightarrow \ln|x_2(t)| = \ln|1 - t^2|. \tag{443}$$

Da $t \mapsto x_2(t)$ als Lösung der Differentialgleichung mindestens einmal stetig differenzierbar, insbesondere also stetig, sein muss, ist mit $x_2(0) = 1 > 0$ auch $x_2(t) > 0$ für alle $t \in (-1, 1)$. Wegen $t \in (-1, 1)$ haben wir ebenso $|1 - t^2| = 1 - t^2 > 0$. Damit finden wir $x_2(t) = 1 - t^2$. In der Tat, $x_2'(t) = -2t = 2t/(t^2 - 1)x_2(t)$ für alle $t \in (-1, 1)$ und $x_2(0) = 1$. Damit haben wir eine Lösung der zweiten Komponente des Differentialgleichungssystems gefunden. Einsetzen in die erste Komponente liefert uns das Anfangswertproblem

$$x_1'(t) = 2tx_1(t) + t \cdot x_2(t) = 2tx_1(t) + (t - t^3), \tag{444}$$

zusammen mit dem Anfangswert $x_1(0) = 2$. Anwendung der Formel für Variation der Konstanten liefert nun,

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \exp\left(\int_0^t d\tau\, 2\tau\right) x_1(0) + \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t ds\, 2s\right)(\tau - \tau^3)d\tau \\
&= 2\exp(t^2) + \exp(t^2)\int_0^t \exp(-\tau^2)(\tau - \tau^3)d\tau \\
&= 2\exp(t^2) - 0.5\exp(t^2)\int_0^t d\tau\, d_\tau(\exp(-\tau^2)) + 0.5\exp(t^2)\int_0^t d\tau d_\tau(\exp(-\tau^2))\tau^2 \\
&= 2\exp(t^2) + 0.5\exp(t^2) - 0.5 + 0.5t^2 + \exp(t^2)\int_0^t d\tau\ \exp(-\tau^2)(-\tau) \\
&= 2\exp(t^2) + 0.5\exp(t^2) - 0.5 + 0.5t^2 + 0.5\exp(t^2)\int_0^t d\tau\, d_\tau\left(\exp(-\tau^2)\right) \\
&= 2\exp(t^2) + (0.5\exp(t^2) - 0.5\exp(t^2) - 0.5 + 0.5) + 0.5t^2 \\
&= 2\exp(t^2) + 0.5t^2,
\end{aligned} \tag{445}$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben. Durch Einsetzen verifizieren wir, dass dies in der Tat eine Lösung von $x_1'(t) = 2tx_1(t) + (t - t^3)$ ist und die Anfangsbedingung $x_1(0) = 2$ erfüllt. Damit stellen wir fest, dass

$$\lambda_{(0;2,1)} : (-1,1) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (1 - t^2, 2\exp(t^2) + 0.5t^2) \tag{446}$$

die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems ist. □

Aufgabe 2 (F09T3A2) Gesucht ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} = x + 3y \tag{447}$$

$$\dot{y} = \dot{x} \tag{448}$$

zusammen mit den Anfangswerten $x(0) = 5, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 1$. Wir stellen zunächst fest, dass es sich um zwei gekoppelte Differentialgleichungen handelt, von denen eine die Ordnung 2, die andere die Ordnung 1 hat. Die Koeffizienten sind jeweils konstant. Wir definieren daher die Funktion $u, v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $u(t) = x(t), v(t) = \dot{x}(t), w(t) = y(t)$ und formen das obenstehende System in ein System von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten um. In Matrix-Notation erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}. \tag{449}$$

Wir nennen die Matrix oben A und berechnen die Eigenwerte. Diese sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$,

$$\chi_A(z) = \det(A - zE_3) = -z^3 + 3z + z = z(4 - z^2) = -z(z+2)(z-2), \tag{450}$$

sodass wir die drei einfachen Eigenwerte $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2$ finden. Wir bestimmen nun noch eine Basis der jeweiligen, ein-dimensionalen Eigenräume.

- *Eigenwert* $z_1 = 0$. Hierzu lösen wir das lineare Gleichungssystem $Av_1 = z_2 v_1$ mittels Gauss-Jordan Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \tag{451}$$

  Wir finden also, dass $v_1 \in \operatorname{lin}_{\mathbb{R}}\{(-3,0,1)^T\}$.

- *Eigenwert* $z_2 = 2$. Hierzu lösen wir das lineare Gleichungssystem $Av_2 = z_2 v_2$ mittels Gauss-Jordan Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \tag{452}$$

  Wir sehen also, dass $v_2 \in \operatorname{lin}_{\mathbb{R}}\{(1,2,1)^T\}$.

- *Eigenwert* $z_3 = -2$. Hierzu lösen wir das lineare Gleichungssystem $Av_2 = z_2 v_2$ mittels Gauss-Jordan Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \tag{453}$$

  Wir sehen also, dass $v_2 \in \operatorname{lin}_{\mathbb{R}}\{(1,-2,1)^T\}$.

Insgesamt finden wir die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems für u, v, w also zu:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(2t) + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-2t). \tag{454}$$

Indem wir die Ersetzungsregeln von oben verwenden, finden wir das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \tag{455}$$

Durch Inspektion findet man die Lösung $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, 1)$, sodass wegen $u(t) = x(t)$ und $w(t) = y(t)$

$$x(t) = 3 + 2\cosh(2t), \;\; y(t) = 2\cosh(2t). \tag{456}$$

Das definiert die maximale Lösung $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$. □

Aufgabe 3 (H10T2A5) Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, $x''+2x'+4x = \sin(t)$. Gesucht ist die allgemeine Lösung. Als lineare skalare Differetialgleichung mit konstanten Koeffizienten und stetiger Inhomogenität auf ganz $\mathbb{R}$ liefert uns der Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu einem beliebigen Anfangswert $(x(0), x'(0)) = (x_0, x_0') \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung. Die allgemeine Lösung liegt, da die Ordnung die Differentialgleichung 2 ist, in einem zwei-dimensional $\mathbb{R}$-affinen Raum. Wir berechnen das charakteristische Polynom der Differentialgleichung, indem wir $x_{\text{char}}(t) = \exp(zt)$ in den homogenen Teil einsetzen und $z \in \mathbb{C}$ zulassen. Das liefert die Bedingung $z^2 + 2z + 4 = 0$ an $z \in \mathbb{C}$. Lösen der quadratischen Gleichung liefert $z_1 = -1+i\sqrt{3}$ und $z_2 = -1-i\sqrt{3}$. Da wir an einer reellwertigen Lösung interessiert sind, verwenden wir anstelle der komplexwertigen Lösung $x_{\text{hom}}(t) = c_1 \exp(-t)\exp(i\sqrt{3}t) + c_2 \exp(-t)\exp(-i\sqrt{3}t)$ die aus der Vorlesung bekannte Tatsache, dass der Real- und Imaginärteil, die zu einer komplexen Nullstelle eines Polynoms über den reellen Zahlen gehören, jeweils zwei über $\mathbb{R}$ unabhängige Lösungen der Differentialgleichung liefern. Somit finden wir für den homogenen Teil die Lösung

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 \exp(-t)\sin(\sqrt{3}t) + C_2 \exp(-t)\cos(\sqrt{3}t), \tag{457}$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Wir folgen dem Hinweis der Aufgabenstellung und setzen $x_{\text{part}} = a\cos(t) + b\sin(t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ für die Bestimmung einer partikulären Lösung. Das liefert uns

$$\begin{aligned}&(-a\cos(t) + 2b\cos(t) + 4a\cos(t)) + (-b\sin(t) - 2a\sin(t) + 4b\sin(t))\\ &= 0 \cdot \cos(t) + 1 \cdot \sin(t).\end{aligned} \tag{458}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das 2×2 lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{459}$$

Da die Koeffizientenmatrix die Determinante $+13 \neq 0$ hat, gibt es laut Linearer Algebra eine eindeutige Lösung $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und wir finden

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{13} \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix}. \tag{460}$$

Wir finden also die allgemeine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ der zu untersuchenden Differentialgleichung zu

$$x(t) = \exp(-t)\left[C_1 \sin(\sqrt{3}t) + C_2 \cos(\sqrt{3}t)\right] + \frac{3}{13}\sin(t) - \frac{2}{13}\cos(t), \tag{461}$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 4 (H12T3A1) Wir finden die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung $x'' + 2x = 2\cos(\omega_0 t)$ in den beiden Fällen $\omega_0 \in \{1, \sqrt{2}\}$. Dazu lösen wir zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung. Diese lautet $x'' + 2x = 0$. Das charakteristische Polynom, das aus dem Ansatz $x(t) = \exp(zt)$ mit $z \in \mathbb{C}$ resultiert, lautet $z^2 + 2 = 0$. Wir sehen also, dass die komplexwertige allgemeine Lösung gegeben ist durch $x_{\text{hom}}(t) = c_1 \exp(i\sqrt{2}t) + c_2 \exp(-i\sqrt{2}t)$. Indem wir forden, dass die allgemeine Lösung des homogenen Teils reellwertig sein soll, erhalten wir

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 \sin(\sqrt{2}t) + C_2 \cos(\sqrt{2}t), \tag{462}$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung, die die inhomogene Gleichung löst, finden wir mit Fallunterscheidung.

- *Fall 1:* $\omega_0 = 1$. Da $i\omega_0 = i$ keine Lösung der charakeristischen Gleichung des homogenen Problems ist, machen wir den Ansatz $x_p(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ und bestimmen de Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ durch Einsetzen in die inhomogene Gleichung. Das liefert

  $$(a\cos(t)) + (b\sin(t)) = 2\cos(t). \tag{463}$$

  Koeffizientenvergleich liefert, dass $a = 2$ und $b = 0$, sodass die partikuläre Lösung durch den Ausdruck $x_p(t) = 2\sin(t)$ gegeben ist. Die allgemeine Lösung des vollen, inhomogenen Problems ist also im Ergebnis

  $$x(t) = C_1 \sin(\sqrt{2}t) + C_2 \cos(\sqrt{2}t) + 2\cos(t). \tag{464}$$

- *Fall 2:* $\omega_0 = \sqrt{2}$. Da $i\omega_0 = i\sqrt{2}$ eine Lösung des charakteristischen Gleichung $z^2 + 2 = 0$ des homogenen Problems ist, müssen wir den Ansatz $x_p(t) = at\cos(\sqrt{2}t) + bt\sin(\sqrt{2}t)$ machen und die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmen sich wiederum durch Einsetzen in die Differentialgleichung. Wir finden als Vorarbeit

  $$(t\cos(\sqrt{2}t))'' = -2\cos(\sqrt{2}t)t - 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t), \tag{465}$$
  $$(t\sin(\sqrt{2}t))'' = -2\sin(\sqrt{2}t)t + 2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t). \tag{466}$$

  Damit kommen wir auf

  $$\left(-2\sqrt{2}a\sin(\sqrt{2}t)\right) + \left(2\sqrt{2}b\cos(\sqrt{2}t)\right) = 0 \cdot \sin(\sqrt{2}t) + 2\cos(\sqrt{2}t). \tag{467}$$

  Hieraus sehen wir, dass $a = 0$, $b = \sqrt{2}/2$. Die allgemeine Lösung des Problems ist also gegeben durch

  $$x(t) = C_1 \sin(\sqrt{2}t) + C_2 \cos(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}t}{2}\sin(\sqrt{2}t). \tag{468}$$

  Hierbei ist wiederum $c_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

In beiden Fällen wird durch die entsprechenden Ausdrücke, wie für die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärte Differentialgleichung zu erwarten ist, die maximale Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ definiert, in Abhängigkeit von den Parametern C_1, C_2. □

Aufgabe 5 (H13T2A4) Wir bestimmen zunächst alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -u' - \frac{5}{2}u. \tag{469}$$

Wir beachten, dass es sich hierbei um eine lineare skalare Differentialgleichung der Ordnung 2 mit konstanten Koeffizienten handelt, die darüber hinaus homogen ist. Eine Lösung ist also nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgelcihungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um die Lösungen der Differentialgleichung zu bestimmen, bestimmen wir zunächst über den Ansatz $u(t) = \exp(zt)$ mit $z \in \mathbb{C}$ die charakteristische Gleichung zu der obenstehenden Differentialgleichung. Das liefert uns $z^2 + z + 5/2 = 0$. Wir finden die beiden Nullstellen $z_\pm = -0.5 \pm 1.5i$. Die komplexwertigen Lösungen der Differentialgleichung sind also durch $x(t) = C_1 \exp(-0.5t)\exp(i1.5t) + C_2 \exp(-0.5t)\exp(-i1.5t)$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ gegeben. Da explizit nach allen reellen Lösungen der Differentialgleichung gefragt ist, reduziert sich die Lösung auf $x(t) = c_1 \exp(-0.5t)\sin(1.5t) + c_2 \exp(-0.5t)\cos(1.5t)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Nun untersuchen wir die Differentialgleichung

$$xy''(x) + \frac{1+\sqrt{x}}{2}y'(x) + \frac{5}{8}y(x) = 0 \tag{470}$$

für $x > 0$. Nach Division durch x stellen wir fest, dass es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizientenfunktionen auf $\mathbb{R}^+$ handelt. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungen garantiert uns nun zu einem vorgegebenen Anfangswert $(y(\tau), y'(\tau)) = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ ($\tau > 0$) die Existenz einer eindeutigen Lösung $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$ des obigen Anfangswertproblems. Wir verwenden nun, dass $t \mapsto t^2$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist und fassen $y(x) = y(t^2) \equiv w(t)$ auf. Wir versuchen nun, durch transformation auf die Variable t eine leichter lösbare Gleichung zu erhalten. Hierzu gilt

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dw(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dw(t)}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \frac{dw}{dt}\frac{1}{2t}, \tag{471}$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dw(t)}{dt}\frac{1}{2t}\right)\frac{1}{2t} = \frac{1}{4t^2}\frac{d^2w(t)}{dt^2} - \frac{1}{4t^3}\frac{dw}{dt}. \tag{472}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und beachten von $x = t^2$, $\sqrt{x} = t$ liefert, dass

$$\frac{1}{4}\frac{d^2w(t)}{dt} + \frac{1}{4}\frac{dw(t)}{dt} + \frac{1}{4}\frac{5}{2}w(t) = 0. \tag{473}$$

Division durch $1/4$ liefert nun die symbolisch bereits wohlbekannte Gleichung $w''(t) + w'(t) + 5/2w(t) = 0$, wobei $t > 0$. Wir können also eine Einschränkung der Lösung aus dem vorhergehenden Aufgabenteil für strikt positive Argumente verwenden und finden die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für w zu

$$w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto c_1 \exp(-0.5t)\cos(1.5t) + c_2 \exp(-0.5t)\sin(1.5t), \tag{474}$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Rücktransformation $w(\sqrt{x}) = y(x)$ liefert nun

$$y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto c_1 \exp(-0.5\sqrt{x})\cos(1.5\sqrt{x}) + c_2 \exp(-0.5\sqrt{x})\sin(1.5\sqrt{x}). \tag{475}$$

Letzteres ist gerade die allgemeine Lösung der Differetialgleichung für y, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ den zwei-dimensionalen reellen Lösungsraum paramterisieren. $\square$

Aufgabe 6 (H11T3A1) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(x)+4x^{-1}y'(x)-10x^{-2}y(x) = 0$. Gesucht sind alle reellwertigen Lösungen $y : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ unter Verwendung der Substitution $y(x) = z(\ln(x))$ und $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir stellen zunächst fest, dass

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dz(\ln x)}{dx} = \frac{dz(\ln(x))}{d\ln(x)}\frac{1}{x} \tag{476}$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{d^2z(\ln x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz(\ln(x))}{d\ln(x)}\frac{1}{x}\right) = \frac{dz(\ln(x))}{d\ln(x)}\frac{-1}{x^2} + \frac{d^2z(\ln(x))}{d\ln(x)^2}\frac{1}{x^2}. \tag{477}$$

Multiplikation der Differentialgleichung mit x^2 ($x > 0!$) und Einsezen liefert nun mit $t \equiv \ln(x)$

$$d_t^2 z(t) + 3d_t z(t) - 10z(t) = 0 \tag{478}$$

Hierbei handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung mit konstanetn Koeffizienten, die wir leicht lösen können. Sie hat die folgenden charakteristische Gleichung

$$\kappa^2 + 3\kappa - 10 = 0 \Leftrightarrow (\kappa+5)(\kappa-2) = 0. \tag{479}$$

Daher finden wir, dass die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$z(t) = c_1 \exp(-5t) + c_2 \exp(2t), \tag{480}$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, die den zwei-dimensionalen Vektorraum der Lösungen parametrisieren und $t \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch $t = \ln(x)$ mit $x \in (0,\infty)$. Einsetzen liefert nun

$$y(x) = z(\ln(x)) = \frac{c_1}{x^5} + c_2 x^2 \tag{481}$$

als allgemeine Lösung der Differentialgleichung für y. $\square$

Aufgabe 7 (H10T2A3) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \tag{482}$$

Gesucht ist eine nicht-konstante Erhaltungsgröße $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wir definieren zunächst die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1,x_2) \mapsto x_2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1,x_2) \mapsto x_1$. Als Projektionsabbildungen sind diese $\mathcal{C}^1$ auf dem ganzen Definitionsbereich. Wir überprüfen nun, ob das Differentialgleichungssystem Hamilton'sch ist. Datz verwenden die Integrabilitätsbedingung. Der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ des Systems ist dabei ein einfach zusammenhängendes Gebiet und es gilt $\partial_{x_1} f(x_1,x_2) + \partial_{x_2} g(x_1,x_2) = \partial_{x_1} x_2 + \partial_{x_2} x_1 = 0 + 0 = 0$. Daher ist das betrachtete Differentialgleichungssystem Hamilton'sch. Das bedeutet es existiert eine Hamilton-Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1,x_2) \mapsto H(x_1,x_2)$, sodass $\partial_{x_2} H(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)$ und $\partial_{x_1} H(x_1,x_2) = -g(x_1,x_2)$. Diese ist laut Vorlesung insbesondere eine Erhaltungsgröße. Bis auf eine additive Konstante $H_0 \in \mathbb{R}$ sehen wir, dass $H(x_1,x_2) = 0.5x_2^2 - 0.5x_1^2 + H_0$ eine Hamilton-Funktion und damit eine Erhaltungsgröße ist, denn $\partial_{x_1} H(x_1,x_2) = -x_1 = -g(x_1,x_2)$ und

$\partial_{x_2} H(x_1, x_2) = x_2$. Damit finden wir, dass längs einer Lösungskurve $(x_1, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ (Es handelt sich um ein lineares autonomes System),

$$\begin{aligned} \frac{dH(x_1(t), x_2(t))}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dx_2(t)^2}{dt} - \frac{1}{2}\frac{dx_1(t)^2}{dt} \\ &= x_2(t)\dot{x}_2(t) - x_1(t)\dot{x}_1(t) \\ &= x_2(t)x_1(t) - x_1(t)x_2(t) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{483}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 8 (H05T1A2) Gegeben sei das folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x} = y \ \& \ \dot{y} = -x + x^2. \tag{484}$$

Gesucht ist zunächst ein erster Integral der Differentialgleichung. Wir definieren hierzu die Funktionen $f : \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x + x^2$, die wir sofort als $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ erkennen. Da $\mathbb{R}^2$ sogar einfach zusammenhängendes Gebiet ist, können wir das Integrabilitätskriterium verwenden, um festzustellen, ob das System vom Hamilton'schen Typ ist. Es gilt $\partial_x f(x, y) + \partial_y g(x, y) = 0 + 0 = 0$, weil f und g Funktionen von nur y bzw. x sind. Das Integrabilitätskriterium liefert nun, dass das System hamilton'sch ist, d.h., dass eine Hamilton-Funktion existiert. Wir behaupten, dass $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (y^2 + x^2)/2 - x^3/3$ eine Hamilton-Funktion ist. Dazu sehen wir, dass H sogar eine $\mathcal{C}^2$-Funktion ist und überdies gilt $\partial_x H(x, y) = x - x^2 = -(-x + x^2) = -g(x, y)$ und $\partial_y H(x, y) = y = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist H tatsächlich eine Hamilton-Funktion. Da die Funktionen f, g jeweils stetig differnzierbar auf dem ganzen Definitionsbereich sind, hat das System eine lokal Laipschitz-stetige rechte Seite. Da $\mathbb{R}^2$ als einfach zusammenhängendes Gebiet insbesondere Gebiet ist, gibt es zu jedem Anfangswert $(x(\tau), y(\tau)) = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ laut globalem Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $(\lambda, \mu) : I_{\tau;\xi,\eta} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\lambda(t), \mu(t))$. Wir überprüfen zu Fuß noch einmal, dass die Hamilton-Funktion wirklich eine Erhaltungsgröße ist. Längs einer Lösungskurve gilt nämlich

$$\frac{dH(\lambda(t), \mu(t))}{dt} = \left.\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}\right|_{(\lambda(t),\mu(t))} \frac{d\lambda(t)}{dt} + \left.\frac{\partial H(x, y)}{\partial y}\right|_{(\lambda(t),\mu(t))} \frac{d\mu(t)}{dt} \tag{485}$$

$$= (\lambda(t) - \lambda(t)^2)\mu(t) + \mu(t)(-\lambda(t) + \lambda(t)^2) \tag{486}$$

$$= 0. \tag{487}$$

Also ist H längs einer Trajektorie konstant und somit Erhaltungsgröße. Wir bestimmen als zweiten Schritt die Ruhelagen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ des Systems. Nach Definition einer Ruhelage, $y_0 = 0$ und $-x_0 + x_0^2 = 0$, was uns $(0, 0)$ und $(1, 0)$ als Ruhelagen liefert. Wir untersuchen nun noch auf Instabilität/Stabilität. Wir stellen zunächst fest, dass H als Hamilton-Funktion automatisch Lyapunov-Funktion des Systems ist. Zudem gilt $H(0, 0) = 0$. Da $x^2 + y^2 > 0$ in einer punktierten Umgebung von $(0, 0)$ und für $|x| < 1$ auf jeden Fall gilt $x^2 > x^3$ finden wir, dass $H|_{B_1((0,0))\setminus\{(0,0)\}}(x,y) > 0$. Der Stabilitätssatz von Lyapunov liefert nun, dass $(0,0)$ eine stabile Ruhelage des Systems ist. Für die Ruhelage $(1,0)$ versuchen wir, mittels Linearisierung zum Ziel zu kommen. Die Jacobi-Matrix des Vektorfeldes $(f,g)^T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (f(x,y), g(x,y))^T$ ist:

$$\operatorname{Jac}[(f,g)^T](x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \\ \partial_x g(x,y) & \partial_y g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+2x & 0 \end{pmatrix}. \tag{488}$$

Bezeichnen wir die Jacobi-Matrix, ausgewertet an der Stelle $(1,0)$, mit A, so erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{489}$$

Definiere das charakteristische Polynom der Matrix $A = \operatorname{Jac}[(f,g)^T](1,0)$ durch $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_2)$. Dann gilt $\chi_A(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$. A hat also die beiden einfachen Eigenwerte $+1 > 0$ und $-1 < 0$. Das Kriterium der Stabilitätstheorie durch Linearisierung liefert uns nun, dass die Ruhelage $(1,0)$ instabil ist. $\square$

Aufgabe 9 (F06T1A4) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sei das folgenden System von Differentialgleichungen gegeben $\dot{x} = f_x(x,y)$ und $\dot{y} = f_y(x,y)$, wobei

$$f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -y + (1-\sqrt{x^2+y^2})x \\ x + (1-\sqrt{x^2+y^2})y \end{pmatrix}. \tag{490}$$

Zu zeigen ist, dass alle Lösungen $\alpha : (a,\infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ das folgende Verhalten aufweisen $\lim_{t\to\infty} \|\alpha(t)\| = 1$. Wir definieren zunächst die Radius-Funktion $r(t) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Da $(x(t), y(t)) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, können wir die Radius-Funktion nach der Kettenregel ableiten,

$$\begin{aligned} \frac{dr(t)}{dt} &= \frac{x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}} \\ &= \frac{(x(t)^2+y(t)^2)(1-\sqrt{x(t)^2+y(t)^2})}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}} \\ &= r(t)(1-r(t)). \end{aligned} \tag{491}$$

Wir beobachten zunächst, dass es eine Ruhelage für generisches $r(t) : (a,\infty) \to \mathbb{R}^+$ gibt, nämlich $r_0 = 1$. Für $r(a) < 1$ ist dann, da die Trajektorien $(x(t), y(t))$ den Phasenraum disjunkt zerlegen auch $r(t) < 1$ für alle $t \in (a,\infty)$ und analog für $r(a) > 1$ ist auch $r(t) > 1$ für alle $t > a$, für die die Lösung der obenstehenden skalaren Differentialgleichung für r existiert. Wir geben uns zunächst $r(a) = R$ als Startwert vor und stellen fest, dass die Voraussetzungen des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllt sind. Ferner haben wir eine separable Differentialgleichung vorliegen, sodass wir die folgende Fall-Unterscheidung anwenden können:

- *Fall 1* $0 < R < 1$. Wir lösen die Integralgleichung

$$\int_R^{r(t)} \frac{ds}{s(1-s)} = \int_a^t d\tau \Rightarrow \int_R^{r(t)} \frac{ds}{s} - \int_R^{r(t)} \frac{ds(-1)}{1-s} = t - a, \tag{492}$$

was uns liefert $\ln(r(t)/(1-r(t))) = (t-a) + \ln(R/(1-R))$, denn $0 < R < 1$ und $0 < r(t) < 1$. Also

$$\frac{r(t)}{1-r(t)} = \frac{R}{1-R}\exp(t-a), \tag{493}$$

was uns liefert

$$r(t)\left(1 + \frac{R}{1-R}\exp(t-a)\right) = \frac{R}{1-R}\exp(t-a) \tag{494}$$

$$r(t) = \frac{\frac{R}{1-R}\exp(t-a)}{1 + \frac{R}{1-R}\exp(t-a)}. \tag{495}$$

Es ist leicht zu sehen, dass dies tatsächliche eine Lösung der Differentialgleichung ist, die der Anfangsbedingung $r(a) = R$ genügt. Wir sehen also, das im Limes $t \to \infty$ in diesem Fall tatsächlich $r(t) \to 1$ gilt für jede Wahl von $0 < R < 1$.

- *Fall 2* $1 < R < \infty$. In diesem Fall schreiben wir

  $$\int_R^{r(t)} \frac{ds}{s(1-s)} = \int_R^{r(t)} \frac{ds}{s} - \int_R^{r(t)} \frac{ds}{s-1} = t - a \tag{496}$$

  und erhalten die Gleichung

  $$\ln(r(t)/R) - \ln((r(t)-1)/(R-1)) = t - a, \tag{497}$$

  was wir zu

  $$\frac{r(t)}{r(t)-1} = \frac{R}{R-1}\exp(t-a) \tag{498}$$

  umformen. Lösen nach $r(t)$ liefert

  $$r(t) = \frac{\frac{R}{R-1}\exp(t-a)}{\frac{R}{R-1}\exp(t-a) - 1}. \tag{499}$$

  Es ist leicht zu sehen, dass es sich hierbei um eine Lösung der Differentialgleichung $r' = r(1-r)$ handelt, die $r(a) = R$ erfüllt. Überdies sehen wir, dass im Limes $t \to \infty$ gilt $r(t) \to 1$ für jede Wahl von $R > 1$.

Zusammen mit der Tatsache, dass $r_0 = 1$ einen Ruhelage der Differentialgleichung für $r(t)$ ist, haben wir die Behauptung bewiesen: Für jede Lösung $\alpha : (a, \infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ des angegebenen Systems gilt $\lim_{t\to\infty} \|\alpha(t)\| = \lim_{t\to\infty} r(t) = 1$. $\square$

Aufgabe 10 (F15T2A5) Gegeben sei das ebene autonome System

$$\dot{x} = -e^x - 2y + 1 \;\&\; y' = 2x - y. \tag{500}$$

Wir bestimmen zunächst alle Ruhelagen des Systems. Das Gleichungssystem zur Bestimmung einer Ruhelage (x_0, y_0) lautet

$$\begin{aligned} 0 &= -\exp(x_0) - 2y_0 + 1 \\ 0 &= 2x_0 - y_0. \end{aligned} \tag{501}$$

Einsetzen von der zweiten in die erste Gleichung erlaubt uns, die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1 - \exp(x)) - 4x$ zu definieren. Die gesuchte(n) Ruhelage(n) haben also eine x-Koordinate, die Nullstelle von h ist. Offenbar ist $h(0) = 0$. Ferner ist h einmal stetig differenzierbar. Angenommen, $x' \neq 0$ ist eine weitere Nullstelle von h. Dann hat $h|_I \neq 0$ auf $[\min\{0, x'\}, \max\{0, x'\}] = I$ nach dem Maximumsprinzip ein Minimum und ein Maximum. Da $h \neq 0$ auf I, handelt es sich hierbei sogar um Extrema, die in $(\min\{0, x'\}, \max\{0, x'\})$ liegen. Differentiation liefert aber $h'(x) = -\exp(x) - 4 < 0$, so dass es kein $\zeta \in (\min\{0, x'\}, \max\{0, x'\})$ gibt, dass bereits Kandidat für ein Extremum wäre. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass es ein Extremum im Inneren des Intervalls I gibt. Also liegen Maxima und Minima von $h|_I$ am Rande $\partial I = \{0, x'\}$. Da aber $h(x) = 0$ für alle $x \in \partial I$, ist 0 sowohl der Wert der Funktion h am Maximum und der am Minimum. Das bedeutet, dass $h|_I = 0$, was im Widerspruch zu $h|_I \neq 0$ steht. Damit war die Annahme, es gäbe eine weitere Nullstelle von h also falsch, und 0 ist die einzige Nullstelle von h. Damit haben wir als einzige Ruhelage $(0, 0)$ gefunden. Wir untersuchen diese Ruhelage nun mittels Linearisierung auf asymptotische Stabilität bzw. Instabilität. Dazu beachten wir, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto -e^x - 2y + 1, \tag{502}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x - y \tag{503}$$

$\mathcal{C}^1$-Funktionen sind. Die Jacobi Matrix des Vektorfeldes $(f, g)^T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (f, g)^T(x, y)$ ist also

$$\mathrm{Jac}[(f, g)^T](x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) & \partial_y f(x, y) \\ \partial_x g(x, y) & \partial_y g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{504}$$

Damit finden wir:

$$A = \mathrm{Jac}[(f, g)^T](0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{505}$$

Wir berechnen nun die Eigenwerte von A. Sei dazu $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$ das charakteristische Polynom von A. Es gilt $\chi_A(z) = (-1 - z)^2 + 4 = z^2 + 2z + 5$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h., die Eigenwerte von A, sind nach Mitternachtsformel

$$z_\pm = -1 \pm 2i. \tag{506}$$

Für die Eigenwerte gilt $\Re[z_+] = \Re[z_-] = -1 < 0$, sodass der Stabilitätssatz für linearierte Systeme uns liefert, dass die Ruhelage $(0, 0)$ des Systems $x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ eine asymptotisch stabile Ruhelage ist. $\square$

Aufgabe 11 (F12T1A4) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin\left(\pi(x^2+y^2)\right) \\ x+\sqrt{3}y \end{pmatrix} \tag{507}$$

Gesucht sind alle Ruhelagen des ebenen autonomen Systems $(x', y') = f(x, y)$. Wir bestimmen die Ruhelagen aus dem Gleichungssystem

$$\sin(\pi(x^2+y^2)) = 0 \ \& \ x+\sqrt{3}y = 0. \tag{508}$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach x und Einsetzen in die erste liefert dann

$$\sin(\pi 4y^2) = 0. \tag{509}$$

Damit finden wir $y^2 \cdot 4\pi = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da $y^2 \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, finden wir $|y| = \sqrt{|k|}/2$, also $y \in \{\pm\sqrt{k}/2 | k \in \mathbb{N}_0\}$. Entsprechend finden wir vermöge $x = -\sqrt{3}y$, dass

$$(x, y) \in \{(\mp\sqrt{3k}/2, \pm\sqrt{k}/2) | k \in \mathbb{N}_0\} \tag{510}$$

für Ruhelagen gilt. Wir fixieren nun die Ruhelage $(\sqrt{3}/2, -1/2)$. Die Jacobi-Matrix von f berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}[f](x,y) &= \begin{pmatrix} \partial_x(\sin(\pi(x^2+y^2))) & \partial_y \sin(\pi(x^2+y^2)) \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\pi x\cos(\pi(x^2+y^2)) & 2\pi y\cos(\pi(x^2+y^2)) \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{511}$$

Ausgewertet an der Stelle $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ finden wir die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\pi\cos(\pi) & -\pi\cos(\pi) \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\pi & \pi \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{512}$$

Wir berechnen die Eigenwerte von A, indem wir die Nullstellen der charakteristischen Polynoms $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_2)$ berechnen. Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A(z) = (-z-\sqrt{3}\pi)(-z+\sqrt{3}) - \pi = z^2 + (\sqrt{3}(\pi-1))z - 4\pi. \tag{513}$$

Damit finden wir die Nullstellen laut Mitternachtsformel

$$z_\pm = \frac{-\sqrt{3}(\pi-1)}{2} \pm \frac{\sqrt{3(\pi-1)^2+16\pi}}{2} \tag{514}$$

Da $0 < \sqrt{3}(\pi-1) = \sqrt{3(\pi-1)^2} < \sqrt{3(\pi-1)^2+16\pi}$ wegen strenger Monotonie der Wurzelfunktion, ist $z_+ \in \mathbb{R}^+$. Damit hat die Matrix A einen Eigenwert, dessen Realteil positiv ist. Der Stabilitätssatz für linearisierte Systeme liefert nun die Instabilität der Ruhelage. $\square$

Aufgabe 12 (H11T2A5) Gegeben sei das mathematische Pendel mit Reibung ($\epsilon > 0$):

$$y''(t) + \epsilon y'(t) + \sin(y(t)) = 0 \ t \geq 0. \tag{515}$$

Wir überführen das System zunächst in ein System erster Ordnung, indem wir $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definieren durch $u(t) = y(t)$ und $v(t) = y'(t)$. Das zugehörige System erster Ordnung ist

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\epsilon v(t) - \sin(u(t)) \end{pmatrix}. \tag{516}$$

Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (f_u(u, v) = y, f_v(u, v) = -\epsilon v - \sin(u))$. Wir bestimmen nun die kritischen Punkte des Systems. Dies sind gerade die Ruhelagen des Systems. Um diese zu bestimmen, lösen wir das folgende System von Gleichungen:

$$f_u(u, v) = v = 0 \ \& \ f_v(u, v) = -\epsilon v - \sin(u). \tag{517}$$

Hieraus finden wir $v = 0$ und $u \in \pi\mathbb{Z}$. $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist also Ruhelage genau dann wenn

$$(u, v) \in \pi\mathbb{Z} \times \{0\}. \tag{518}$$

Wir untersuchen die Ruhelagen auf Stabilität bzw. Instabilität. Zu diesem Zwecke beachten wir, dass es sich bei f um ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld handelt und berechnen die Jacobi-Matrix von f. Es gilt

$$\mathrm{Jac}[f](u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(u) & -\epsilon \end{pmatrix}. \tag{519}$$

Es gilt $\cos(k\pi) = (-1)^k$, sodass wir für die Ruhelage $(u = k\pi, 0)$ finden:

$$A_k \equiv \mathrm{Jac}[f](k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -\epsilon \end{pmatrix} \tag{520}$$

Wir berechnen nun das charakteristische Polynom $\chi_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A_k - zE_2)$ für die Matrix A_k in Abhängigkeit vom Parameter $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\chi_k(z) = z^2 + z\epsilon + (-1)^k \tag{521}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte. Sie lauten nach der Mitternachtsformel hier:

$$z_\pm = \frac{-\epsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 4(-1)^k}}{2}. \tag{522}$$

Wir führen eine Fallunterscheidung durch

- $k \in 2\mathbb{Z} + 1$. Dann ist $(-1)^k = (-1)$ und die Diskriminante ist $\epsilon^2 + 4 > \epsilon^2$. Also hat, unabhängig vom Wert $\epsilon > 0$, die Matrix A_k für ungerade k stets einen Eigenwert, der positiven Realteil hat. Folglich sind die Ruhelage aus $\{((2k + 1)\pi, 0) | k \in \mathbb{Z}\}$ stets instabil.

- $k \in 2\mathbb{Z}$. Dann ist $(-1)^k = 1$ und die Diskriminante ist $\epsilon^2 - 4 < \epsilon^2$. Für $0 < \epsilon \leq 2$ gilt dann in jedem Fall $\Re[z_\pm] = -\epsilon/2 < 0$, weil $\epsilon > 0$ nach Voraussetzung. Falls $2 < \epsilon < \infty$, ist $\epsilon^2 - 4 > 0$ aber echt kleiner als ϵ^2. In diesem Fall gilt $-\infty < z_- < z_+ < 0$, die Eigenwerte liegen also auf der negativen reellen Halbachse. In beiden Fällen stellen wir fest, dass stets $\Re[z_+], \Re[z_-] < 0$ gilt. Der Satz über die Stabilität linearisierter Systeme besagt nun, dass Ruhelagen aus $\{(2k\pi, 0) | k \in \mathbb{Z}\}$ asymptotisch stabil sind für jeden Wert von $\epsilon > 0$.

Damit ist die Stabilitätsanalyse beendet. □

Aufgabe 13 (H11T1A5) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -3x + y + 2y^3 \;\&\; \dot{y} = -4x. \tag{523}$$

Wir zeigen die asymptotische Stabilität der Ruhelage $(x_*, y_*) = (0, 0)$ unter Verwendung von Linearisierung und der Lyapunov-Funktion $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 4x^2 - 2xy + y^2 + y^4$.

- *Methode 1 – Linearisierung.* Wir stellen fest, dass die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils gegeben durch $f(x, y) = -3x + y + 2y^3$ und $g(x, y) = -4x$ auf dem gesamten Definitionsbereich $\mathcal{C}^1$ sind. Bekannt ist ferner, dass $0 = f(x_*, y_*) = g(x_*, y_*)$, da $(x_*, y_*) = (0, 0)$ als Ruhelage vorausgesetzt ist. Für die Untersuchung bestimmen wir die Jacobi-Matrix $\mathrm{Jac}[(f, g)^T](x, y)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}[(f,g)^T](x,y) &= \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \\ \partial_x g(x,y) & \partial_y g(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1+6y^2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Wir bezeichnen den Wert der Matrix bei (x_*, y_*) mit A und erhalten

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{524}$$

  Wir berechnen nun für die Stabilitätsanalyse mittels Linearisierung die Eigenwerte von A. Sei dazu $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_2)$ das charakteristische Polynom von A. Wir finden:

$$\chi_A(z) = (-3 - z)(-z) - 1 \cdot (-4) = z^2 + 3z + 4. \tag{525}$$

  Die Nullstellen von χ_A sind gerade die Eigenwerte von A. Anwendung der Mitternachtsformel liefert

$$z_\pm = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}. \tag{526}$$

  In jedem Fall finden wir $\Re[z_+] = \Re[z_-] = -3/2 < 0$. Der Satz über die Stabilitätsuntersuchung durch Linearisierung liefert uns nun die asymptotische Stabilität der Ruhelage.

- *Methode 2 – Lyapunov.* Wir überprüfen zunächst, dass es sich bei V um eine Lyapunov-Funktion handelt. Offenbar ist $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. Ferner gilt $(\nabla V)(x, y) = (8x - 2y, -2x + 2y + 4y^3)$. Zusammen mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle ., . \rangle_{\mathbb{R}^2}$ finden wir

  $$\begin{aligned}
  &\langle (\nabla V)(x, y), (f, g)^T(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^2} \\
  &= (-3x + y + 2y^3)(8x - 2y) + (-4x)(-2x + 2y + 4y^3) \\
  &= (-6x + 2y + 4y^3)(4x - y) - (4x)(-2x + 2y + 4y^3) \\
  &= (-4x)(4x) - (-6x + 2y + 4y^3)(y) \\
  &= -16x^2 + 6xy - 2y^2 - 4y^4 \\
  &= -16x^2 + 4.5x^2 - 2(1.5x - y)^2 - 4y^4 \\
  &= -10.5x^2 - 2 \cdot (1.5x - y)^2 - 4y^4 \\
  &\leq 0,
  \end{aligned}$$

  als Summe von Quadraten mit negativen Vorfaktoren. Damit ist V als tatsächlich monoton fallend entlang einer Trajektorie der Differentialgleichung und somit Lyapunov-Funktion. Wir bemerken, dass $\mathbb{R}^2$ Gebiet ist, $(x, y) \mapsto (f, g)^T(x, y)$ $\mathcal{C}^1$ und damit insbesondere lokal Lipschitz-stetig ist. Zudem stellen wir fest, dass gilt $V(x_*, y_*) = V(0, 0) = 0$. Wir müssen zeigen, dass $V(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $\langle (\nabla V)(x, y), (f, g)^T(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^2} < 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Wir zeigen zunächst, dass für beliebiges $(x, y) \neq 0$ gilt $V(x, y) > 0$. Denn:

  $$\begin{aligned}
  V(x, y) &= 4x^2 - 2xy + y^2 + y^4 \\
  &= 3x^2 + (x^2 - 2xy + y^2) + y^4 \\
  &= 3x^2 + (x - y)^2 + y^4 \\
  &\geq 0.
  \end{aligned}$$

  Diese Summe von Quadraten wird 0 dann und nur dann, wenn jeder Summand verschwindet. Es gilt dann aber $3x^2 = 0$, d.h., $x = 0$ und $y^4 = 0$, also $y^2 = 0$ und damit $y = 0$, was mit $(x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$ konsistent ist. Andernfalls ist die Summe strikt positiv, d.h., für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt in der Tat $V(x, y) > 0$. Analog setzen wir $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ für die Verifikation von $\langle (\nabla V)(x, y), (f, g)^T(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^2} < 0$ voraus. Mit der Rechnung zum Nachweis der Lyapunov-Eigenschaft finden wir wiederum, dass der Ausdruck $= 0$ wird genau dann wenn $x^2 = 0$, $(1.5x - y)^2 = 0$ und $y^4 = 0$. Die erste und letzte Bedingung liefern wiederum $x = y = 0$, was mit der zweiten Bedingung $1.5x = y$ konsistent ist. Zusammen mit der bewiesenen Ungleichung haben wir also die Behauptung $\langle (\nabla V)(x, y), (f, g)^T(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^2} < 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ bewiesen. Damit sind die Voraussetzungen des Stabilitätssatzes von Lyapunov erfüllt und wir haben eine asymptotisch stabile Ruhelage bei $(x_*, y_*) = (0, 0)$.

In jedem Fall liefert eine beliebige der beiden Methoden, dass es sich bei $(0, 0)$ um eine asymptotisch stabile Ruhelage der Differentialgleichung handelt. $\square$

Aufgabe 14 (F07T2A5) Gegegeben ist die Matrix ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 \\ -2 & \alpha-1 \end{pmatrix}. \tag{527}$$

Wir bestimmen zunächst ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $\dot{x} = A(\alpha)x$. Sei $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A(\alpha) - zE_2)$ das charakteristische Polynom der Matrix $A = A(\alpha)$ für ein beliebiges aber festes $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(z) &= (\alpha+2-z)(\alpha-1-z)+2 \\ &= z^2 - (2\alpha+1)z + (\alpha+2)(\alpha-1)+2 \\ &= z^2 - (2\alpha+1)z + (\alpha^2+2\alpha-\alpha-2+2) \\ &= z^2 - (2\alpha+1) + \alpha(\alpha+1) \\ &= (z-\alpha)(z-(\alpha+1)).\end{aligned}$$

Wir können hieraus die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit die Eigenwerte von $A(\alpha)$ direkt ablesen. $A(\alpha)$ hat die beiden einfache Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_1(\alpha) = \alpha$ und $\lambda_2 = \lambda_2(\alpha) = \alpha+1$, die beide wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ reell sind. Die Bestimmung der Eigenvektoren erfolgt durch Lösung von $A(\alpha)v_k(\alpha) = \lambda_k(\alpha)v_k(\alpha)$ für $k \in \{1,2\}$.

- *Fall 1:* $k = 1$. Hier ist $\lambda_1 = \alpha$ und wir finden mit dem Gauss-Algorithmus

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \end{array} \tag{528}$$

  sodass $v_1(\alpha) \in \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{(1,-2)^T\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Fall 2:* $k = 2$. Hier ist $\lambda_2 = \alpha + 1$ und wir finden mit dem Gauss-Algorithmus

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \tag{529}$$

  Damit sehen wir, dass $v_2(\alpha) \in \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{(1,-1)^T\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Da die Differentialgleichung linear mit konstanten Koeffizienten ist, erhalten wir das gesuchte Fundamentalsystem durch

$$\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \exp(\alpha t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \tag{530}$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \exp((\alpha+1)t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{531}$$

Wir erbingen den Nachweis, dass es sich dabei tatsächlich um ein Fundamentalsystem handelt. Laut Vorlesung ist $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ genau dann ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung, wenn die Wronski-Determinante $W(t)$ des Systems an einem Punkt, z.B., $t = 0$, nicht verschwindet. Es gilt

$$W(t=0) = 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = 1 \neq 0. \tag{532}$$

Also handelt es sich tatsächlich um ein Fundamentalsystem. Wir bestimmen nun die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $(0,0)$ eine stabile bzw. asymptotisch stabile Ruhelage des Differentialgleichungssystems ist. Dazu verwenden wir das Eigenwertkriterium für lineare autonome Systeme. Falls $\alpha \leq -1$, gilt $\lambda_1(\alpha) \leq 0$ und $\lambda_2(\alpha) \leq 0$. Beide Eigenwerte sind also nicht-positiv und, als einfache Eigenwerte, insbesondere halbeinfach. Folglich ist $(0,0)$ für die Wahl von $\alpha \in (\alpha, -1]$ eine stabile Ruhelage. Falls $\alpha > -1$, dann ist $0 < \alpha + 1 = \lambda_2(\alpha)$ und das Eigenwertkriterium von oben liefert die Instabilität der Ruhelage. Also ist tatsächlich $M_{\text{stabil}} = (-\infty, -1]$ die Menge aller Parameterwerte für α, sodass $(0,0)$ eine stabile Ruhelage ist. Für die asymptotische Stabilität verwenden wir, dass jeder (hier: reelle) Eigenwert < 0 sein muss. Genau in diesem Fall ist dann $(0,0)$ eine asymptotisch stabile Ruhelage. Dies liefert uns die Menge $M_{\text{asy}} = (-\infty, -1)$ als zulässigen Parameterbereich für α, um die asymptotische Stabilität von $(0,0)$ für $\dot{x} = A(\alpha)x$ zu gewährleisten. □

Aufgabe 15 (F13T2A5) (a) Die Abbildung $T : A \to X$ heißt Kontraktion, wenn es ein $q \in (0,1)$ gibt, sodass $d(T(x), T(y)) \leq q \cdot d(x,y)$ für alle $x, y \in A$. Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollsändig, wenn jede Cauchy-Folge aus X in X konvergiert.
(b) Seien $a, b \in A$ Fixpunkte von T in A. Dann gilt $T(a) = a$ und $T(b) = b$. Ferner gilt, da T Kontraktion, mit einem geeigneten $q \in (0,1)$, dass $d(T(a), T(b)) = d(a,b) \leq q \cdot d(a,b)$. Da $q < 1$ kann die Gleichung nur für $d(a,b) = 0$ gelten. Nach Definition einer Metrik folgt dann aber $a = b$.
(c) Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ und $(t_0, x_0) \in D$. Im Folgenden betrachten wir das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Die Funktion f muss für den lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz nach Picard-Lindelöff stetig in t und lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument sein. Letzteres bedeutet, dass für alle $(t,x) \in D$ eine Umgebung $U \subseteq D$ von (t,x) existiert, sodass $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$ mit einer Konstante $L = L(t,x) \in (0,\infty)$ für alle $(t,x_1), (t,x_2) \in U$ gilt.
(d) Wir definieren den Operator

$$T : C([a,b] \to \mathbb{R}^n) \to C([a,b] \to \mathbb{R}^n), g \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds. \tag{533}$$

Für eine Lösung $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ des obigen Anfangswertproblems gilt

$$\begin{aligned} T(\lambda)(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \lambda(s))ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \lambda'(s)ds \\ &= x_0 + \lambda(t) - \lambda(t_0) \\ &= \lambda(t). \end{aligned} \tag{534}$$

Die gesuchte Lösung ist also Fixpunkt des Operators T. Wir müssen prüfen, ob es sich bei T um eine Kontraktion handelt. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $X = C([a,b] \to \mathbb{R})$ zusammen mit der von der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ induzierten

Metrik $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ ein Banachraum ist. Sei nun f wie in (c) beschrieben und $a < b$ so gewählt, dass $[a,b] \times D' \subseteq D$ ist, sodass $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$ für alle $(t,x),(t,y) \in [a,b] \times D'$. Seien nun $g, h \in X$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|T(g) - T(h)\|_\infty &= \sup_{t \in [a,b]} \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s,g(s)) - f(s,h(s)))ds \right\| \\
&\leq \sup_{t \in [a,b]} \int_{t_0}^{t} \|f(s,g(s)) - f(s,h(s))\| ds \\
&\leq |t - t_0| \sup_{s \in [t_0,t]} \|f(s,g(s)) - f(t,g(t))\| \\
&\leq |t - t_0| \cdot L \cdot \sup_{s \in [t_0,t]} \|g(s) - h(s)\| \\
&\leq L \cdot (b-a) \|g - h\|_\infty.
\end{aligned} \tag{535}$$

Indem wir a, b dergestalt verkleinern, dass $b - a < L^{-1}$, können wir $q \equiv L(b-a) < 1$ erreichen. Damit finden wir

$$\|T(g) - T(h)\|_\infty \leq q \cdot \|g - h\|_\infty. \tag{536}$$

Damit ist die Kontrakionseigenschaft von T nachgewiesen und die Banachraumeigenschaft von (X, d_∞) liefert nun, dass die Fixpunkt-Gleichung $T(\lambda) = \lambda$ eine (eindeutige nach (b)) Lösung $\lambda \in X$ hat. Diese ist dann die eindeutige)lokale) Lösung $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$ mit $x(t_0) = x_0$ $\square$

Aufgabe 16 (H17T3A2) Gegeben ist die Sinus-Cardinalis-Funktion $f(x) = \sin(x)/x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir zeigen zuerst, dass f zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden kann. Zunächst stellen wir fest, dass $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ nach dem Satz von L'Hopital. Denn es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x))'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \tag{537}$$

Wir bezeichnen die Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$ mit $\tilde{f}$. Dann gilt $f(x) = \tilde{f}(x)$ falls $x \neq 0$ und $\tilde{f}(x) = 1$ falls $x \neq 0$. Die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin(z)/z$ hat eine hebbare Singularität bei $z = 0$, denn es gilt

$$h(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}, \tag{538}$$

d.h., der Hauptteil der Laurententwicklung verschwindet. Die letztgenannte Potenzreihe konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ und es gilt $h(0) = 1$. Falls $\Im[z] = 0$, stellen wir fest, dass $h(x) = \tilde{f}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit handelt es sich bei h um eine Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ den Häufungspunkt 1 hat, liefert uns der Identitätssatz, dass auch jede andere Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}$ mit h übereinstimmen muss. Insgesamt haben wir damit die Fortsetzung $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin(z)/z$ von f zu einer ganzen Funktion gefunden. Wir zeigen nun, dass die auf $\mathbb{R}$ fortgesetzte Funktion

$\tilde{f}$ nicht absolut Riemann integrierbar ist. Angenommen, $\tilde{f}$ wöre absolut Riemann integrierbar über $\mathbb{R}$. Wir stellen zunächst fest, dass

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx &= 2\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \\ &= 2\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx + 2int_{\infty}^{\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx.\end{aligned} \tag{539}$$

Da der Integranmd im ersten Integral stetig ist, existiert das Riemann-Integral über dem Kompapktum $[0, \pi] \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{(2k+1)\pi}\frac{2(x-k\pi)}{\pi}\chi_{(k\pi,k\pi+\pi/2)} & x \in (k\pi, k\pi + \pi/2) \\ \frac{2}{(2k+1)\pi} & x = (2k+1)\pi/2 \\ \frac{2}{(2k+1)\pi}\frac{2((k+1)\pi-x)}{\pi}\chi_{(k\pi+\pi/2,(k+1)\pi)} & x \in (k\pi + \pi/2, (k+1)\pi) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}. \tag{540}$$

und finden, dass $f_k(x) \leq |\sin(x)|/x$ für alle $x \geq \pi$ und $k \in \mathbb{N}$. Da die Träger von f_k und f_l bis auf eine diskrete Menge disjunkt sind, gilt also auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \leq \frac{|\sin(x)|}{x} \tag{541}$$

für alle $x \geq \pi$. Andererseits berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx &\geq \int_{\pi}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_k(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi^2}.\end{aligned} \tag{542}$$

Die letzte Reihe divergiert aber, da $\sum_{k=1}^{\infty} 4/(5\pi^2 k)$ eine divergente Minorante ist. Damit haben wir einen Widerspruch zur absoluten Integrierbarkeit von f. Wir zeigen nun, dass f uneigentlich Riemann integrierbar ist.

- *Methode 1.* Wir bemerken, dass

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x} \tag{543}$$

und ersetzen den störenden Faktor $1/x$ im Integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
&= 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin(x) dt dx \\
&= 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin(x) dx dt \\
&= -i\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{(i-t)x} dx dt + i\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{(-i-t)x} dx dt \\
&= -i\int_0^{\infty} \frac{-1}{i-t} dt + i\int_0^{\infty} \frac{-1}{-i-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{-i(i-t-(-i-t))}{(-i-t)(i-t)} dt \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= 2(\lim_{t\to\infty} \arctan(t) - \arctan(0)) \\
&= 2\cdot\pi/2 \\
&= \pi.
\end{aligned} \tag{544}$$

Insbesondere ist $\tilde{f}$ uneigentlich Riemann integrierbar über $\mathbb{R}$.

- *Methode 2.* Wir definieren die folgende Funktion für $\omega > 0$

$$I(\omega) \equiv 2\int_0^{\infty} e^{-\omega x}\frac{\sin x}{x} dx. \tag{545}$$

Es gilt $I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Ableiten liefert

$$\begin{aligned}
\frac{dI(\omega)}{d\omega} &= 2\int_0^{\infty} \frac{de^{-\omega x}}{d\omega}\frac{\sin x}{x} dx \\
&= -2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} x e^{-\omega x} dx \\
&= -2\int_0^{\infty} e^{-\omega x}\sin(x) dx \\
&= i\int_0^{\infty} e^{(i-\omega)x} dx - i\int_0^{\infty} e^{(-i-\omega)x} dx \\
&= -\frac{i(-i-\omega-(i-\omega))}{(i-\omega)(-i-\omega)} \\
&= -\frac{2}{1+\omega^2}.
\end{aligned} \tag{546}$$

Damit stellen wir fest, dass

$$(\lim_{\omega\to\infty} I(\omega) - I(0)) = \int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\omega} d\omega = -2\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1+\omega^2} = -\pi, \tag{547}$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Nun gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq |I(\omega)| &\leq 2\int_0^\infty \left|\frac{e^{-\omega x}\sin(x)}{x}\right| dx \\ &\leq 2\int_0^\infty e^{-\omega x} dx \\ &= \frac{2}{\omega} \overset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{548}$$

Damit sehen wir, dass

$$I(0) = \pi \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \tag{549}$$

Wiederum ist der Sinus Cardinalis uneigentlich Riemann integrierbar über ganz $\mathbb{R}$.

- *Methode 3.* Definiere die folgende Hilfsfunktion

$$g_\epsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\sin z}{z + i\epsilon}. \tag{550}$$

für $\epsilon > 0$. Sie hat einen einfachen Pol bei $z = -i\epsilon$, d.h., in der unteren komplexen Halbebene. Wir beachten, dass $\sin z = \Im[\exp(iz)]$ und definieren die beiden neuen meromorphen Funktionen

$$H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\exp(iz)}{z} \tag{551}$$

$$G_\epsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\exp(iz)}{z + i\epsilon}. \tag{552}$$

Sei Γ eine Parametrisierung des Halbkreisbogens vom Radius R in der oberen komplexen Halbebene, der über das Intervall $[-R, R]$ auf der reellen Achse der komplexen Ebene geschlossen wird. Γ ist eine einfach geschlossene Kurve und die Funktion G_ϵ ist holomorph in dem von Γ berandeten Gebiet. Mit dem Cauchy'schen Integralsatz finden wir

$$\int_\Gamma G_\epsilon(z) = 0. \tag{553}$$

Andererseits erhalten wir

$$0 = \int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{x + i\epsilon} dx + \int_0^\pi \frac{iR\exp(iR\exp(i\phi))\exp(i\phi)}{R\exp(i\phi) + i\epsilon} d\phi. \tag{554}$$

Das zweite Integral verschwindet mit einem exponentiellen Abfalls, falls $R \to \infty$. Damit finden wir, unter Verwendung des Plemlj-Theorems im Limes $\epsilon \to 0^+$,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x + i\epsilon} dx = -i\pi + \mathcal{P}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x} dx\right], \tag{555}$$

wobei $\mathcal{P}$ den Cauchy'schen Hauptwert des Integrals bezeichnet. Umformen der obenstehenden Gleichung und Imaginärteilbildung liefert dann,

$$\mathcal{P}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \tag{556}$$

Wiederum sehen wir, dass das uneigentliche Riemann-Integral existiert.

Damit haben wir gezeigt, dass der Sinus Cardinalis uneigentlich Riemann integrierbar ist. □

Aufgabe 17 (H17T1A2) (a) Gesucht ist die Ordnung der Nullstelle der Funktion $f(z) = \sin(z^3) + 6z^3(z^6 - 2)$ bei $z_0 = 0$. Wir zeigen, dass die Ordnung der Nullstelle 3 ist. Hierzu verwenden wir die Potenzreihen-Darstellung des Sinus, die auf ganz $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergiert,

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{557}$$

Damit finden wir

$$f(z) = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2\cdot 3\cdot k}, \tag{558}$$

wobei

$$a_{2k} = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & k \in \mathbb{N}_0, k \geq 2 \\ \frac{1}{1!} - 12 & k = 0 \\ \frac{-1}{3!} + 6 & k = 1 \end{cases} \tag{559}$$

Durch die Potenzreihe wird eine holomorphe Funktion g definiert, für die gilt $g(0) = -11 \neq 0$. Die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ von f lässt sich nun anhand des Vorfaktors $\sim z^3$ in der obenstehenden Gleichung zu 3 ablesen, wie behauptet.
(b) Gesucht ist das folgende Integral

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(bx) dx, \tag{560}$$

wobei $b > 0$. Wir definieren die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z^2)$. Ferner definieren wir den folgenden Rechtecksweg $\gamma = \gamma_2^- * \gamma_1^- * \gamma_3 * \gamma_4$ als Konkatenation der folgenden Wege in $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \gamma_1 :& [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t, & (561) \\ \gamma_2 :& (0, b) \to \mathbb{C}, t \mapsto R + it, & (562) \\ \gamma_3 :& [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t + ib, & (563) \\ \gamma_4 :& (0, b) \to \mathbb{C}, t \mapsto -R + it. & (564) \end{aligned}$$

In dem von γ berandeten Rechtecksgebiet ist die Funktion h holomorph, sodass der cauchy'sche Integralsatz liefert

$$0 = \int_\gamma h(z)dz \tag{565}$$

für alle $R > 0$. Wir schreiben das Integral aus:

$$\begin{aligned} 0 = &- \int_{-R}^{R} \exp(-x^2)dx \\ &- i \int_0^b \exp(-(R+it)^2)dt \\ &+ i \int_0^b \exp(-(-R+it)^2)dt \\ &+ \int_{-R}^{R} \exp(-(t+ib)^2)dt. \end{aligned} \tag{566}$$

Wir sehen, dass im Limes $R \to \infty$ das zweite und dritte Integral in der obigen Gleichung gegen 0 laufen. Ferner sehen wir, dass wir die Gleichung dank der zweiten Binomischen Formel im Exponenten des vierten Integranden umschreiben können zu

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \exp(-x^2)dx = \exp(b^2) \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \exp(-t^2)\exp(-2ibt)dt. \tag{567}$$

Verwendung des in der Angabe enthaltenen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi} \tag{568}$$

und Realteilbildung liefert uns

$$\sqrt{\pi} = \exp(b^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\cos(2bx)dx. \tag{569}$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist offenbar eine symmetrische Funktion, sodass

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-b^2) = \int_0^\infty \exp(-x^2)\cos(2bx)dx. \tag{570}$$

Das ist gerade der gesuchte Wert des Integrals. □

Aufgabe 18 (F10T2A3) Sei $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende, auf G holomorphe Funktion

$$f_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k}. \tag{571}$$

Zu zeigen ist, dass die durch $f(z) \equiv \lim_{n\to\infty}$ definierte Funktion holomorph ist. Zu diesem Zwecke wollen wir den Weierstraß'schen Konvergenzsatz für lokal gleichmäßig konvergente Folgen holomorpher Funktionen (auf G) einsetzen. Da G ein Gebiet im endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist, reicht es bereits aus, die kompakte Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen. Für beliebiges aber festes n stellen wir zunächst fest, dass

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z}{z^2-k^2}. \tag{572}$$

Sei nun $K \subseteq G$ ein beliebiges Kompaktum in G und sei $N \in \mathbb{N}$ dergestalt, dass $|z| < N$ für alle $z \in K$. Dann gilt einerseits $|2z| < 2N$ und andererseits nach der umgekehrten Dreiecksungleichung $|z^2 - k^2| \geq ||z|^2 - |k|^2| \geq k^2 - N^2$ für alle $k > N$. Dann können wir abschätzen

$$\left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{2z}{z^2-k^2} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{n} \frac{2N}{k^2-N^2}. \tag{573}$$

Die letzt genannte Reihe konvergiert im Limes $n \to \infty$, wie aus der Analysis 1 bekannt ist. Die Beliebigkeit von $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} = G$ impliziert nun die kompakte Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf G. Da $\mathbb{C}$ endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, und $G \subseteq \mathbb{C}$ liefert die kompakte Konvergenz auch die lokal gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zusammen mit der Gebieteigenschaft von G als komplement einer diskreten Menge ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ können wir nun den Weierstraß'schen Konvergenzsatz anwenden. Diese liefert uns, dass $f(z) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ definiert. $\square$

Aufgabe 19 (F14T2A4) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2/(z^2-1)$. Partialbruchzerlegung liefert die Darstellung

$$f(z) = \frac{-1}{2} \frac{z^2}{z+1} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{z-1}. \tag{574}$$

Wir sehen also, dass es zwei einfache Polstellen gibt, eine bei $z_+ = +1$ und eine bei $z_- = -1$. Das Residuum berechnen wir wie folgt:

$$\mathrm{Res}(f; z = z_+) = \lim_{z\to z_+} (f(z)(z - z_+)) = \frac{1}{2} \tag{575}$$

$$\mathrm{Res}(f; z = z_-) = \lim_{z\to z_-} (f(z)(z - z_-)) = \frac{-1}{2}. \tag{576}$$

Wir zeigen nun, dass die Einschränkung $f|_{K_{2,\infty}(0)}$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt. Sei γ ein in $K_{2,\infty}$ verlaufender geschlossener Weg. Dann gilt mit dem Ergebnis für die Residuen aus (a)

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(n(\gamma, z_+)\mathrm{Res}(f, z_+) + n(\gamma; z_-)\mathrm{Res}(f, z_-)\right) = 0, \tag{577}$$

da die Umlaufzahlen $n(\gamma, z_+) = n(\gamma, z_-)$ wegen $\mathrm{Spur}(\gamma) \subseteq K_{2,\infty}(0)$ genügen. Beliebigkeit von γ mit den beschriebenen Eigenschaften impliziert, dass f auf $K_{2,\infty}$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt. $\square$

Aufgabe 20 (H02T1A2) Zu berechnen ist das folgende Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5 - 4\cos(2x)} dx \tag{578}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5 - 4\cos(2x)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{10 - 4(\exp(2ix) + \exp(-2ix))} dx \\ &= \Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{2e^{ix}}{10 - 4(\exp(2ix) + \exp(-2ix))}\right) \\ &= \Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{2\exp(3ix)}{-4\exp(4ix) + 10\exp(2ix) - 4}\right) \\ &= \Re\left(\int_{\partial B_1(0)} \frac{-2iz^2 dz}{-4z^4 + 10z^2 - 4}\right). \end{aligned} \tag{579}$$

Wir finden zunächst die Anzahl der Nullstellen in $B_1(0)$. Es gilt $|4z^2+4| \leq 8 < 10 = |10z^2|$ für alle $z \in \partial B_1(0)$. Da $z \mapsto 10z^2$ zwei Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) in $B_1(0)$ hat, hat auch das Polynom $-4z^2 + 10z - 4$ zwei Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) in $B_1(0)$, laut dem Satz von Rouché. Da die Koeffizienten des Polynoms reell sind, handelt es sich hierbei um zwei konjugiert komplexe Nullstellen, die dann beide einfach sind oder um zwei reelle Nullstellen. Explizit finden wir

$$z_\pm^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{-8} = \frac{-10 \pm 6}{-8}. \tag{580}$$

Für uns kommen also nur diejenigen z in betracht, für die gilt $z^2 = 1/2$. Damit finden wir, dass $z_1 = \sqrt{2}/2$ und $z_2 = -\sqrt{2}/2$ die beiden Nullstellen des Nennerpolynoms sind, die wir bei der Anwendung des Residuensatzes berücksichtigen müssen. Da gilt

$$-4z^4 + 10z^2 - 4 = -4(z - \sqrt{2}/2)(z + \sqrt{2}/2)(z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2}), \tag{581}$$

finden wir mit $n(\gamma_{\partial B_1(0)}, \pm\sqrt{2}/2) = 1$ und Residuensatz

$$I = 4\pi\Re\left[\frac{\sqrt{2}^{-2}}{3(\sqrt{2})^3} - \frac{\sqrt{2}^{-2}}{3(\sqrt{2})^3}\right] = 0 \tag{582}$$

Aufgabe 21 (F12T1A1) Zu berechnen ist das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{1 + x^2}. \tag{583}$$

Zunächst gilt

$$\Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)dx}{1 + x^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{1 + x^2}. \tag{584}$$

Wir betrachten nun die folgende Funktion $h : \mathbb{C}\backslash\{+i, -i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(iz)/(1+z^2)$. Sie ist auf dem gesamten Definitionsbereich holomorph und definiert eine auf $\mathbb{C}$

meromorphe Funktion mit einfachen Polen bei $z_+ = i$ und $z_- = -i$. Wir definieren den Weg $\gamma = \gamma_2 * \gamma_1$ als Kontakenation von

$$\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t \tag{585}$$

$$\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it). \tag{586}$$

Offenbar ist γ ein geschlossener Weg, der das Gebiet $B_R(0) \cap \{z \in \mathbb{C} | \Im[z] > 0\}$ berandet. In letzterem liegt der Pol z_+ und γ umläuft diesen als einfach geschlossener Weg auch nur einmal in mathematisch positiver Richtung, d.h., $n(\gamma, z_+) = +1$. Für das Residuum von h in $z = z_+$ finden wir

$$\mathrm{Res}(h, z = z_+) = \frac{\exp(-1)}{2i}. \tag{587}$$

Der Residuensatz liefert nun, dass

$$2\pi i \cdot n(\gamma, z_+)\mathrm{Res}(h, z = z_+) = \pi \exp(-1) = \int_\gamma h(z)dz. \tag{588}$$

Andererseits ist auch

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{1+x^2}dx + \int_0^\pi \frac{iR\exp(i\phi)\exp(iR\exp(i\phi))}{1+R^2\exp(2i\phi)}d\phi. \tag{589}$$

Das zweite Integral verschwindet für $R \to \infty$, den es gilt

$$\left|\int_0^\pi \frac{iR\exp(i\phi)\exp(iR\exp(i\phi))}{1+R^2\exp(2i\phi)}d\phi\right| \leq \int_0^\pi \frac{R\exp(-R\sin(\phi))}{|1+R^2\exp(2i\phi)|}d\phi \leq \frac{R\pi}{R^2-1}, \tag{590}$$

wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung im Nenner. Der letztgenannte Ausdruck geht gegen 0 für $R \to \infty$. Damit finden wir

$$\pi \exp(-1) = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)dx}{1+x^2} \right) \tag{591}$$

Damit finden wir durch Realteilbildung

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)dx}{1+x^2}. \tag{592}$$

Symmetrie des Integranden unter $x \mapsto -x$ impliziert, dass dann bereits das uneigentliche Riemann-Integral I existiert und insbesondere gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}. \tag{593}$$

Damit haben wir das gesuchte Integral berechnet. □

Aufgabe 22 (H11T1A2) Sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$ und $f, g : \Omega \to \Omega$ biholomorphe Abbildungen mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Wir behaupten, dass dann bereits $f = g$. Laut Voraussetzung ist $\Omega \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so dass es laut dem Riemann'schen Abbildungssatz eine biholomorphe Abbildung gibt, $\Omega \to \mathbb{E}$, wo $\mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe bezeichnet. Da $f(\Omega) = \Omega = g(\Omega)$, gibt es $c, d \in \Omega$ mit $c \neq d$ (wegen Bijektivität), sodass $f(a) = c = g(a)$ und $g(b) = d = f(b)$. Wir spezifizieren die biholomorphe Abbildung, die Ω auf $\mathbb{E}$ abbildet in, laut Riemann'schem Abbildungssatz, eindeutiger Weise, indem wir $\psi : \Omega \to \mathbb{E}$ durch $\psi(c) = 0$ fixieren. Wir spezifizieren ferner eine zweite biholomorphe Abbildung $\phi : \Omega \to \mathbb{E}$ dadurch, dass wir $\phi(a) = 0$ fordern. Nun definieren wir die, wegen Transitivität der Biholomorphie-Eigenschaft, ebenfalls biholomorphen Funktion $h_1, h_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ dadurch, dass $h_1 = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ und $h_2 = \psi \circ g \circ \phi^{-1}$. Nach Definition gilt dann $h_1(0) = 0 = h_2(0)$. Zudem gilt $h_1(\phi(d)) = h_2(\phi(d))$, denn $f(b) = g(b)$ und es gilt wegen Bijektivität der involvierten Abbildungen auch $z_0 \equiv \phi(b) \neq 0$. Wir betrachten jetzt die Komposition $h \equiv h_2 \circ h_1^{-1}$. Diese bildet wiederum $\mathbb{E}$ biholomorph auf sich selbst ab, erfüllt $h(0) = 0$ und nun zusätzlich $h(z_0) = z_0$. Insbesondere gilt also $|h(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Nach dem Lemma von Schwarz gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass bereits $h(z) = \exp(i\lambda)z$ gilt, d.h., h eine Drehung der Einheitskreisscheibe um λ um den Mittelpunkt ist. Da wir haben $h(z_0) = z_0$, muss $\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$, sodass $h(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Mit anderen Worten, es gilt bereits $h = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$. Da $h = h_2 \circ h_1^{-1}$, finden wir $h_2 = h_1$ durch Komposition von h mit h_1 von Innen und Verwendung der Bijektivität von h_1. Indem wir nun die Bijektivität von $\phi, \psi : \Omega \to \mathbb{E}$ ausnutzen, sehen wir, dass $f = \psi^{-1} \circ h_2 \circ \phi = \psi^{-1} \circ h_1 \circ \phi = g$, d.h., $f = g$ auf Ω gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Aufgabe 23 (H13T3A5) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in G$. Wir behaupten, dass die Menge $M \equiv \{f'(z_0) | f : G \to G \text{ holomorph } f(z_0) = z_0\}$ im Falle $G \neq \mathbb{C}$ beschränkt ist und im Falle $G = \mathbb{C}$ unbeschränkt ist. Wir behandeln zunächst den Fall $G = \mathbb{C}$. In diesem Fall ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Angenommen, es wäre M beschränkt. Dann gibt es ein $R > 0$, sodass $|f'(z_0)| < R$. Andererseits definieren wir die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z_0 + R(z - z_0)$. Dann ist $f(z_0) = z_0$ und es gilt $f'(z_0) = R$, d.h., $f'(z_0) \notin M$ im Widerspruch zur Definition von M. Also war die Annahme, M wäre beschränklt falsch und M ist unbeschränkt. Sei nun $G \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend. Dann ist G nach dem Riemann'schen Abbildungssatz biholomorph äquivalent zu $\mathbb{E}$, der offenen Einheitskreisscheibe. Genauer spezifizieren wir laut Riemann'schem Abbildungssatz ein biholomorphes $\psi : G \to \mathbb{E}$ eindeutig, indem wir $\psi(z_0) = 0$ fordern. Sei nun $f : G \to G$ holomorph mit $f(z_0) = z_0$. Dann ist die Funktion $h : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, z \mapsto (\psi \circ f \circ \psi^{-1})(z)$ als Komposition holomorpher Funktion ebenfalls holomorph und wegen $\psi(z_0) = 0$ und $f(z_0) = z_0$ gilt $h(0) = 0$. Nach dem Lemma von Schwarz gilt nun $|h(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und überdies $|h'(0)| \leq 1$. Laut Ketten- und Umkehrregel für holomorpher Funktionen haben wir damit $|f'(z_0)| \leq |(\psi'(z_0))/(\psi'(z_0))| = 1$, denn $|\psi'(z_0)| \neq 0$ wegen Biholomorphie von ψ. Insbesondere ist die Abschätzung unabhängig von f, G und $z_0 \in G$. Damit finden wir, dass $M \subseteq \bar{B}_1(0) \subsetneq B_2(0)$, d.h., dass M, wie behauptet, beschränkt ist, falls $G \neq \mathbb{C}$. $\square$

Aufgabe 24 (F09T1A1) Sei $f:\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}, z\mapsto(z+1)/(2z)$. Sei ferner $Z\in\partial\mathbb{E}$. Dann gilt $Z\neq 0$ und $Z^{-1}=\bar{Z}$. Damit finden wir $f(Z)=0.5Z\bar{Z}+0.5\bar{Z}=0.5(1+\bar{Z})$. Damit finden wir $f(\partial\mathbb{E})=\partial B_{0.5}(0.5)$, d.h., die Einheitskreislinie wird wiederum auf eine (echte) Kreislinie abgebildet. Wir bestimmen nun das Bild von $\mathbb{E}\setminus\{0\}$ unter f. Es gilt $0.5\in\mathbb{E}\setminus\{0\}$ und ferner $f(0.5)=0.5+1=1.5$. Da f die Einschränkung der Möbiustransformation auf $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ist, ist f insbesondere biholomorph. Unter Verwendung des Satzes über die Kreistreue von Möbiustransformationen, sehen wir, dass das von $\partial\mathbb{E}$ berandete Gebiet auf eines der von $f(\partial\mathbb{E})$ berandeten Gebiete abgebildet wird. Da $1.5\notin B_{0.5}(0.5)$, bleibt wegen der Zusammenhangseigenschaft von $f(\mathbb{E}\setminus\{0\})$ lediglich, dass $f(\mathbb{E}\setminus\{0\})=(\bar{B}_{0.5}(0.5))^{\complement}=\mathbb{C}\setminus\bar{B}_{0.5}(0.5)$. □

Aufgabe 25 (H03T3A2) Sei $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto 3z^3+z+i$. Wir zeigen, dass $P^{-1}(\{0\})\subseteq\mathbb{E}$. Hierzu beachten wir, dass $P(z)=f(z)+g(z)$ gilt, wobei $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definiert sind durch $f(z)=3z^2, g(z)=z+i$. Auf $\partial\mathbb{E}$ gilt $|g(z)|\leq 2<3=|3z^2|=|f(z)|$, wobei für die erste Ungleichung die Dreiecksungleichung bemüht wurde. Nach dem Satz von Rouché haben also f und $P=f+g$ in dem von $\partial\mathbb{E}$ berandeten, prä-kompakten Gebiet, d.h., in $\mathbb{E}$, dieselbe Anzahl an Nullstellen, gezählt mit Vielfachheiten. Da f die dreifache Nullstelle $z=0\in\mathbb{E}$ hat, hat auch P drei Nullstellen in $\mathbb{E}$. Da P als Polynom vom Grad 3 laut Fundamentalsatz der Algebra genau 3 Nullstellen hat, liegen also tatsächlich alle Nullstellen von P in $\mathbb{E}$, $P^{-1}(\{0\})\subseteq\mathbb{E}$. Wir berechnen nun das Integral

$$I=\int_{i-\infty}^{i+\infty}\frac{\exp(iz)dz}{3z^3+z+i}. \tag{594}$$

Hierzu beachten wir, dass $P(i)=-i\neq 0$ und für alle $z\in\mathrm{Spur}(\gamma)$ mit $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, t\mapsto i+t$ gilt $|z|\geq 1$ und sogar strikt $|z|$ falls $z\neq i$. Wir definieren nun $\Gamma_1:[-R,R]\to\mathbb{C}, t\mapsto i+t$ und $\Gamma_2:[0,\pi]\to\mathbb{C}, t\mapsto i+R\exp(it)$ für $R>0$. In dem von $\Gamma=\Gamma_2*\Gamma_1$ berandeten Gebiet hat der Nenner $P(z)=3z^3+z+i$ keine Nullstelle, sodass die durch den Integrandenausdruck definierte Funktion holomorph auf dem eingeschlossenen Gebiet ist. Damit finden wir nach dem Cauchy'schen Integralsatz

$$0=\int_{\Gamma_2*\Gamma_1}\frac{\exp(iz)dz}{P(z)}. \tag{595}$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\exp(iz)dz}{P(z)}=-\int_{\Gamma_2}\frac{\exp(iz)dz}{P(z)}. \tag{596}$$

Das Integral rechts konvergiert gegen 0 im Limes $R\to\infty$, denn für hinreichend großes R

$$0\leq\left|\int_{\Gamma_2}\frac{\exp(iz)dz}{3z^3+z+i}\right|\leq\int_0^{\pi}\frac{\exp(-R\sin\phi)R}{3R^3-(R+1)}d\phi=:J, \tag{597}$$

unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung im Nenner. Die rechte Seite lässt sich für hinreichend großes $R>0$ weiter abschätzen,

$$J\leq\int_0^{\pi}\frac{d\phi}{2R^2}=\frac{\pi}{2R^2}\overset{R\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{598}$$

Damit finden wir, dass

$$I = \int_{\Gamma_1} \frac{\exp(iz)dz}{P(z)} = 0. \tag{599}$$

Zunächst gilt $P(0) = i$ und $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{E}^{\complement}$. Als holomorphe Funktion bildet $P(\bar{E})$ auf eine abgeschlossene Menge ab, die $0, i, -i$ enthält. Ferner gilt $P(\{x \in \mathbb{R}|x < 0\}) = \{i + y|\mathbb{R} \ni y \leq 0\} \subseteq \mathbb{C}$. Damit ist $P(D)$ einfach zusammenhängend für $D = \bar{\mathbb{E}}^{\complement} \backslash \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, denn das Komplement $(P(D))^{\complement}$ hat nur eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente. Also existiert auf $P(D)$ ein (holomorpher) Zweig des Logarithmus, bezeichnet mit $\mathfrak{log} : P(D) \to \mathbb{C}$. Wir definieren nun die gesuchte Funktion $h(z) = \mathfrak{log}(P(z))$ für alle $z \in D$. Nach den vorherigen rläuterungen hat $h : D \to \mathbb{C}$ die gewünschte Eigenschaft $\exp(h(z)) = P(z)$ für alle $z \in D$. □

Aufgabe 26 (F18T2A1) (a) Seien $\Omega_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C}|x > 0, y > 0\}$ und $\Omega_2 := \{z = x+iy \in \mathbb{C}|x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$. Wir stellen zunächst fest, dass $0 \notin \Omega_1$ und $0 \notin \Omega_2$. Damit sind $\Omega_1, \Omega_2 \neq \mathbb{C}$. Ferner sind Ω_1, Ω_2 offen und als konvexe Mengen zusammenhängend, sogar einfach zusammenhängend. Damit sind Ω_1, Ω_2 einfach zusammenhängende Gebiete. Laut Riemann'schen Abbildungssatz gibt es biholomorphe $\psi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{E}$ und $\psi_2 : \Omega_2 \to \mathbb{E}$. Da Biholomorphie eine transitive Funktionseigenschaft ist, finden wir durch $f = \psi_1^{-1} \circ \psi_2 : \Omega_2 \to \Omega_1$ eine biholomorphe Abbildung. Die Existenz einer biholomorphen Abbildung $f : \Omega_2 \to \Omega_1$ ist somit nachgewiesen. Explizit setzen wir $f(z) = \exp(\pi/2z)$. Es gilt in der Tat $\Re[f(z)] = \exp(\pi/2x)\cos(\pi/2y) > 0$ für $x \in \mathbb{R}, 0 \leq y < 1$ und $\Im[f(z)] = \exp(\pi/2x)\sin(\pi/2y) > 0$ für $x \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1$, also $\Re[f(z)], \Im[f(z)] > 0$ für $z \in \Omega_2$ und somit $f(z) \in \Omega_1$ für alle $z \in \Omega_2$. Die angegebene Funktion ist zudem holomorph und, da $0 \notin \Omega_2$ und Ω_2 einfach zusammenhämgend ist auch bijektiv. Damit ist $f^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_2$ wohldefiniert und, laut einem Resultat über die Holomorphie der Umkehrfunktion bijektiver holomorpher Funktionen auf einfach zusammenhängenden, von $\mathbb{C}$ verschiedenen Gebieten, ebenfalls holomorph. Also ist f, wie definiert, tatsächlich eine biholomorphe Funktion, die die gewünschten Eigenschaften erfüllt.
(b) Wir definieren die Polynomfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$. Wir suchen die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) von p im Kreisring $K_{1,2}(0)$. Wir definieren die folgenden holomorphen Polynomfunktionen $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f_1(z) = 71z^4$, $g_1(z) = z^{87} + 36z^{57} + z^3 - z + 1$ und $f_2(z) = z^{87}$, $g_2(z) = 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$. Dann gilt auf $\partial B_1(0)$, dass $|g_1(z)| \leq 1 + 36 + 1 + 1 + 1 = 40 < 71 = |f_1(z)|$. Da f_1 die vierfache Nullstelle $z = 0$ hat, liefert der Satz voun Rouché, dass $f_1 + g - 1 = p$ ebenfalls vier Nullstellen in $B_1(0)$ hat und ferner keine der Nullstellen auf $\partial B_1(0)$ liegt. Auf $\partial B_2(0)$ finden wir $|g_2(z)| = 36 \cdot 2^{57} + 71 \cdot 2^4 + 2^3 + 2 + 1 < 64 \cdot 2^{57} = 2^{63} < 2^{87} = |z^{87}|$. Der Satz voun Rouché liefert nun, dass $p = f_2 + g_2$ in $B_2(0)$ dieselbe Anzahl an Nullstellen mit Vielfachheiten wie f_2 hat. Letzteres hat die 87-fache Nullstelle $z = 0$. Also hat p in $B_2(0)$ mit Vielfachheiten gezählt 87 Nullstellen. Zusammen mit dem vroherigen Eregbnis, dass von 87 Nullstellen genau 4 in $\bar{B}_1(0)$ liegen, finden wir, dass in $K_{1,2}(0) = B_2(0) \setminus \bar{B}_1(0)$ genau $87 - 4 = 83$ Nullstellen von p liegen (mit Vielfachheiten). □

Aufgabe 27 (F00T2A2) Sei γ ein einfach geschlossener Weg, der positiv orientiert ist und die Punkte 0 und 1 umschließt. Wir berechnen das Integral

$$I = \int_\gamma \frac{\exp(z^{-1})\,dz}{1-z} \tag{600}$$

Wir stellen zunächst fest, dass die Funktion im Zähler, $z \mapsto \exp(z^{-1})$, eine wesentliche Singularität bei $z = 0$ hat und ansonsten holomorph auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Ebenso hat die Funktion $z \mapsto (1-z)^{-1}$ eine Polstelle erster Ordnung bei $z = 1$ und ist ansonsten auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph. Wir wenden den Residuensatz zur Berechnung des Integrals an. Die beiden Singularitäten der meromorphen Funktion im Integranden, $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}, \exp(z^{-1})/(1-z)$, sind isoliert und es gilt für die Residuen:

$$\mathrm{Res}(f,0) = 1 \;\&\; \mathrm{Res}(f,1) = -1, \tag{601}$$

wie wir am Hauptteil der Laurent-Entwicklung der Integrandenfunktionen jeweils ablesen können. Für die Umlaufzahl des Wegs γ um die beiden Singularitäten gilt jeweils $n(\gamma,0) = 1 = n(\gamma,1)$. Somit liefert der Residuensatz

$$\int_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i(n(\gamma,0)\mathrm{Res}(f,0) + n(\gamma,1)\mathrm{Res}(f,1)) = 2\pi i(1\cdot 1 + 1\cdot(-1)) = 0. \tag{602}$$

Damit finden wir $I = 0$ als Ergebnis. □

Aufgabe 28 (F07T1A5) Sei $f = p/q$ eine rationale Funktion, wobei $p, q \in \mathbb{C}[x]$ Polynome vom Grad $\deg p + 2 = \deg q$. Wir behaupten, dass

$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \mathrm{Res}(f,a) = 0. \tag{603}$$

Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, besitzen p und q mite Vielfachheiten gezählt $N := \deg p$ bzw. $N + 2 = \deg q$ Nullstellen in $\mathbb{C}$. Nach eventueller Re-Definition der Polynome mittels Riemann'schem Hebbarkeitssatz können wir annehmen, dass die fortgesetzte Funktion $F := P/Q$ eine rationale Funktion ist, wobei $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ Polynome sind, die keine gemeinsamen Nullstellen haben und setzen $n = \deg P \leq N$. Es gilt noch immer $\deg Q = \deg P + 2 = n+2$. Wir bezeichnen die Nullstellenmenge von Q in $\mathbb{C}$ mit $N(Q)$ und bemerken, dass $F : \mathbb{C} \setminus N(Q) \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Da $\deg Q < \infty$ nach Voraussetzung an f und damit F, ist $N(Q)$ insbesondere endlich und, als Nullstellenmenge, eines Polynoms von endlichem Grad beschränkt. Genauer finden wir ein $R > 0$, sodass $|z| < R$ für alle $z \in N(Q)$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Residuum auf dem Holomorphiegebiet von F jeweils verschwindet, d.h., $\mathrm{Res}(F,a) = \mathrm{Res}(f,a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{C} \setminus N(Q)$. Damit vereinfacht sich die Summe über alle Residuen von f zu

$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \mathrm{Res}(f,a) = \sum_{a\in N(Q)} \mathrm{Res}(F,a). \tag{604}$$

Da $N(Q) \subseteq B_R(0)$ nach Wahl von R weiter oben, spezifizieren wir den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it)$, der mathematisch positiv ist und alle $z \in N(Q)$ einmal umläuft, $n(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in N(Q)$. Nach dem Residuensatz können wir also schreiben

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in N(Q)} n(\gamma, a)\mathrm{Res}(F, a) = 2\pi i \sum_{a\in N(Q)} \mathrm{Res}(F, a). \tag{605}$$

Diese Darstellung bleibt auch erhalten, wenn wir $R \to \infty$ lassen: Insbesondere können wir für $z \in \partial B_R(0)$ abschätzen:

$$\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = \frac{\left|\sum_{k=0}^n a_k z^k\right|}{\left|\sum_{k=0}^{n+2} b_k z^k\right|} \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \frac{|z|^n}{\left|z^{n+2}\left(b_{n+2} + \sum_{k=0}^{n+1} b_k z^{n+2-k}\right)\right|}. \tag{606}$$

Der zweite Summand im zweiten Faktor im Nenner konvergiert gegen 0 für hinreichend großes R. In Polarkoordinaten gilt $dz/dt = iR\exp(it)$ für $z \in \partial B_R(0)$ und wir schätzen insgesamt ab, dass

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\int_\gamma \frac{P(z)dz}{Q(z)}\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{P(R\exp(it))iR\exp(it)dt}{Q(R\exp(it))}\right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left|\frac{P(R\exp(it))iR\exp(it)dt}{Q(R\exp(it))}\right| dt \\ &\leq \frac{2\pi C}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \end{aligned} \tag{607}$$

mit einer geeigneten Konstanten $\left|\sum_{k=0}^n a_k\right| / |b_n| \leq C < \infty$. Zusammen mit den vorherigen Überlegungen finden wir für $R \to \infty$ tatsächlich

$$2\pi i \sum_{a\in N(Q)} \mathrm{Res}(F, a) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{a\in\mathbb{C}} \mathrm{Res}(f, a) = \sum_{a\in N(Q)} \mathrm{Res}(F, a). \tag{608}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Aufgabe 29 (F08T2A4) (a) Wir berechnen das Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos(3\theta)}{2 + \cos(\theta)} d\theta. \tag{609}$$

Indem wir $2\cos z = \exp(iz) + \exp(-iz)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{4 + \exp(3i\theta) + \exp(-3i\theta)}{4 + \exp(i\theta) + \exp(-i\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{(4 + \exp(3i\theta) + \exp(-3i\theta))(i\exp(i\theta))}{\exp(2i\theta) + 4\exp(i\theta) + 1} d\theta \\ &= \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{4 + z^3 + z^{-3}}{z^2 + 4z + 1} dz. \end{aligned} \tag{610}$$

Die Nullstellen des Nenner-Polynoms sind $z_\pm = -2\pm\sqrt{4-1} = -2\pm\sqrt{3}$. Davon liegt nur $z_+ = -2+\sqrt{3} \in B_1(0)$. Ferner ist die Funktion im Zähler mit einer dreifachen Polstelle bei $z=0$ versehen. Wir splitten also wie folgt auf

$$I = \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{(4+z^3)/(z-z_-)}{z-z_+} + \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{(z-z_-)^{-1}}{z^3(z-z_+)} \tag{611}$$

Für das erste Integral ergibt sich mit der Cauchy'schen Integralformel

$$\frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{(4+z^3)/(z-z_-)}{z-z_+} = 2\pi\frac{(4+z_+^3)}{(z_+-z_-)}. \tag{612}$$

Für das zweite Integral berechnen wir die Residuen für $f : \mathbb{C}\backslash\{0, z_+\} \to \mathbb{C}, 1/(z^3(z^2+4z+1))$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_+) &= \frac{1}{z_+^3(z_+-z_-)} &(613)\\ \operatorname{Res}(f, 0) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(f(z)z^3\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{-(2z+4)}{(z^2+4z+1)^2}\right] &(614)\\ &= \frac{1}{2}\frac{-4}{1} \\ &= -2.\end{aligned}$$

Zusammen mit $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$ als Paramterisierung von $\partial B_1(0)$ erhalten wir $n(\gamma, z=0) = 1 = n(\gamma, z_+)$, sodass der Residuensatz für das zweite Integral liefert

$$\frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{(z-z_-)^{-1}}{z^3(z-z_+)} = 2\pi\left(\frac{1}{z_+^3(z_+-z_-)} - 2\right). \tag{615}$$

Damit finden wir insgesamt

$$I = 2\pi\left(\frac{z_+^3+4+z_+^{-3}}{z_+-z_-} - 2\right), \tag{616}$$

wobei $z_\pm = -2\pm\sqrt{3}$.
(b) Wir berechnen das Integral

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}. \tag{617}$$

Zum einen beachten wir, dass der Integrand $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x^4)^{-1}$ eine gerade, stetige Funktion ist, die über einen symmetrischen Bereich integriert wird. Zum anderen können wir mit der Definition $\zeta = \exp(2\pi i/8)$ und der Identität $(x^4-1)(x^4+1) = x^8-1$ schließen, dass die Nullstellen des Nennerpolynoms von der Form ζ^{2k-1} mit $k \in \{1,2,3,4\}$ sind. Dies sind gerade diejenigen Elemente der zyklischen Gruppe der 8-ten Einheitswurzeln, die Ordnung 8 haben, d.h., $-1 = x^4 = 0$ erfüllen. Inspektion liefert, dass lediglich ζ, ζ^3 positiven Imaginärteil haben, ζ^5, ζ^7

haben negativen Imaginärteil. Wir verwenden, dass der Integrand symmetrisch ist und schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}. \tag{618}$$

Wir definieren nun den Pizza-Viertel-Rand Γ durch die Konkatenation von

$$\gamma_1 : [0,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto R, \tag{619}$$
$$\gamma_2 : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it) \tag{620}$$
$$\gamma_3 : [0,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto i(R-t). \tag{621}$$

Der resultierende Weg ist einfach um die einfache Polstelle ζ geschlossen, wobei $n(\Gamma,\zeta) = 1$. Nun gilt für $f : \mathbb{C} \setminus \{\zeta,\zeta^3,\zeta^5,\zeta^7\} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/(1+z^4)$, dass

$$\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \frac{-1}{\prod_{k=1}^{3}(\zeta^{2k+1}-\zeta)}. \tag{622}$$

Dekomposition von Γ liefert ferner

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^4} \tag{623}$$
$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{1+z^4} = -i\int_0^R \frac{d(R-t)}{1+(R-t)^4} \tag{624}$$
$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{1+z^4} = i\int_0^{\pi/2} \frac{dt\, R\exp(it)}{1+R^4\exp(4it)}. \tag{625}$$

Das letzte Integral können wir betragsmäßig nach oben für hinreichend große $R > 1$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für den Nenner abschätzen,

$$\left|\int_0^{\pi/2} \frac{dt\, R\exp(it)}{1+R^4\exp(4it)}\right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dt\, R}{R^4-1} = \frac{\pi}{2}\frac{R}{R^4-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0. \tag{626}$$

Ebenso finden wir, dass

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{1+z^4} + \int_{\gamma_3} \frac{dz}{1+z^4} = (1-i)\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \sqrt{2}\zeta^7 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}. \tag{627}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \frac{-i\zeta^{-10}}{(\zeta^2-1)(\zeta^4-1)(\zeta^6-1)} \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \frac{-i/i}{(i-1)(-1-1)(-i-1)} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.\end{aligned} \tag{628}$$

Damit haben wir auch das zweite geforderte Integral berechnet. $\square$

Aufgabe 30 (F09T3A5) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Wir behaupten, dass f dann bereits eine nicht-konstante affine Funktion ist, d.h., es gibt $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$, sodass $f(z) = az + b$. Hierzu beachten wir, dass f eine ganze Funktion ist. Insbesondere ist $f : \mathbb{C} \to f(\mathbb{C})$ sowohl injektiv als auch surjektiv, da jede Funktion surjektiv auf ihr Bild ist. Weil f ganz und bijektiv ist, scheidet der Fall, dass f konstant ist aus. Seien nämlich $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq z_2$ und sei f als konstant angenommen. Dann gilt $f(z_1) = f(z_2)$, sodass die Injektivität $z_1 = z_2$ liefert. Das steht im Widerspruch zu $z_1 \neq z_2$ nach Voraussetzung, sodass die Annahme, f wäre konstant, falsch war. Also ist f eine nicht-konstante ganze Funktion. Der kleine Satz von Picard liefert nun zwei Möglichkeiten für $f(\mathbb{C})$. Entweder es gilt bereits $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ oder es gilt $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit einem $z_0 \in \mathbb{C}$. Im letzteren Fall ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph und bijektiv, also biholomorph. Indem wir die holomorphe Fortsetzung F von f auf die kompaktifizierte Riemann'schen Zahlensphäre $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ betrachten und vereinbaren, dass $F(\infty) = z_0$, kommen wir infolge der Klassifikation biholomorpher Abbildungen $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ zu dem Ergebnis, dass F eine Möbiustransformation ist. Danach gibt es Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ mit $(\alpha, \gamma) \neq (0, 0)$, sodass

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} & z \in \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\} \\ \frac{\alpha}{\gamma} & z = \infty \\ \infty & z = -\delta/\gamma \end{cases} \tag{629}$$

Da $\alpha/\gamma = z_0 \in \mathbb{C}$, finden wir $\gamma \neq 0$ und somit $-\delta/\gamma \in \mathbb{C}$. Das bedeutet, dass es ein $z_c \equiv -\delta/\gamma \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $F|_{\mathbb{C}} = f$ einen Pol der Ordnung 1 bei $z = z_c$ hat. Dann ist aber f bei $z = z_c$ nicht holomorph, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass f sogar ganz ist. Also ist die Annahme $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ falsch gewesen, und wir haben stattdessen $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Damit ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und bijektiv, also biholomorph. Die Fortsetzung F auf die kompaktifizierte Riemann'sche Zahlensphäre $\hat{\mathbb{C}}$ ist wiederum eine Möbius-Transformation und hat nun $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ als Fixpunkt, d.h., $F(\infty) = \infty$, da sonst ein Widerspruch zur Bijektivität von F resultierte. Damit finden wir, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $F(z) = f(z) = az + b$, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$, weil f bereits als nicht-konstant nachgewiesen wurde. Damit finden wir, dass die einzigen Funktionen, die der Voraussetzung der Aufgabenstellung Genüge tun, von der Form nicht-konstanter affiner Funktionen sind. □

5 Kurs im Sommersemester 19

5.1 Aufgaben Ernstfalltests

Aufgabe 40 Gegeben sei die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x - y)(x + y + 1)$.
(a) Wir zeigen zuerst, dass u auf $\mathbb{R}^2$ harmonisch ist. Zuerst stellen wir fest, dass u als Produkte zweier bivariater Polynomfunktionen mindestens zweimal stetig partielle differenzierbar in x und y ist. Nach Definition ist u genau dann harmonisch, wenn $\Delta u(x, y) = (\partial_x^2 + \partial_y^2) u(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir berechnen daher die zweiten partiellen Ableitungen,

$$\partial_x^2 u(x, y) = 2 \;\&\; \partial_y^2 u(x, y) = -2 \tag{630}$$

für beliebiges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit finden wir $\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 2 - 2 = 0$ und u ist in der Tat harmonisch.
(b) Gesucht ist nun eine harmonische Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x,y) := u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph ist. Wir klären zunächst die Existenz. Aus den Vorlesungen ist bekannt, dass $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist. Damit existiert zu einer harmonischen Funktion u eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, sodass $\Re[f] = u$ und $\Im[f] = v$, wobei $v : G \to \mathbb{R}$ ebenfalls harmonisch ist. Zur Bestimmung verwenden wir die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v \ \& \ -\partial_y u = \partial_x v. \tag{631}$$

Die relevanten ersten partiellen Ableitungen von u lauten

$$\partial_x u(x,y) = 2x + 1 \ \& \ \partial_y u(x,y) = -2y - 1. \tag{632}$$

Wir finden also mithilfe der ersten der beiden Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$v(x,y) - v(x,y_0) = \int_{y_0}^{y} (\partial_x u(x,y'))dy' = (2x+1)(y - y_0). \tag{633}$$

Ferner liefert uns die zweite der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$v(x,y_0) - v(x_0,y_0) = -\int_{x_0}^{x} (\partial_y u(x',y_0))dx = -(-2y_0 - 1)(x - x_0). \tag{634}$$

Addition der beiden Ergebnisse liefert

$$\begin{aligned} v(x,y) - v(x_0,y_0) &= (2x+1)y + x - y_0 - x_0 - 2x_0y_0 \\ &= (2x+1)y + x - ((2x_0+1)y_0 + x_0). \end{aligned} \tag{635}$$

Wir finden also, dass $v(x,y) = (2x+1)y + x + C$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Zuletzt geben wir die gesuchte Funktion f in Abhängigkeit von $z = x + iy$ an. $f(z) = z(z+1+i) + iC$ $(C \in \mathbb{R})$ erfüllt

$$\Re[f](x,y) = x^2 - y^2 + x - y = (x-y)(x+y+1) = u(x,y), \tag{636}$$
$$\Im[f](x,y) = 2xy + y + x = (2x+1)y + x + C = v(x,y). \tag{637}$$

für das jeweilige C, das in der konkreten Definition von v gewählt wurde. Wir stellen fest, dass f nach Konstruktion von v Real- und Imaginärteil hat, die den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen genügen und überdies reell differenzierbar ist, als $\mathbb{C}$-Summe total differenzierbarer Funktionen. Mithin ist f holomorph. $\square$

Aufgabe 41 Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $0 \in \Omega$.
(a) Zu prüfen ist die Existenz einer holomorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(n^{-2011}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $n^{-2011} \in \Omega$, aber $f \not\equiv 0$. Wir behaupten, dass dies nicht möglich ist. Angenommen, es gäbe ein holomorphes f mit den beschriebenen Eigenschaften. Dann ist f insbesondere stetig. Wir betrachten für geeignete Indizes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, definiert durch $z_n = n^{-2011}$. Offenbar

gilt $\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \in \Omega$, sodass die Folge in Ω konvergiert, dort insbesondere einen Häufungspunkt hat. Da f stetig in Ω, also auch in $z = 0 \in \Omega$ ist, gilt $0 = \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = f(0)$, d.h., $f(0) = 0$. Wir wissen nun, dass die Nullfunktion $0 : \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto 0$ auf $M \equiv \{0\} \cup \{n^{-2011} | n \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls die an f gestellten Forderungen erfüllt. Da $M \subset \Omega$ nicht-diskret ist, weil es in jeder Umgebung von 0 in Ω mindestens ein $z \in M$ gibt, liefert uns der Identitätssatz, $f(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$, d.h., $f \equiv 0$ auf Ω. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme, $f \not\equiv 0$ auf Ω. Also war die Annahme falsch und ein f mit den geforderten Eigenschaften existiert nicht.
(b) Zu prüfen ist die Existenz eines holomorphen $g : \Omega \to \mathbb{C}$, sodass $g^{(k)}(0) = (k!)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wir behaupten, dass es kein derartiges holomorphes g geben kann. Angenommen, es gäbe ein g mit den beschriebenen Eigenschaften. Da g holomorph ist, gibt es ein $\rho > 0$, sodass g eine auf $B_\rho(0) \subseteq \Omega$ gleichmäßig konvergente Taylor-Entwicklung besitzt. ρ bezeichnet hierbei den Konvergenzradius der Taylorreihe. Explizit finden wir

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (k!) z^k \text{ auf } B_\rho(0). \tag{638}$$

Für den Konvergenzradius der Potenzreihe finden wir aber

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0 < \rho. \tag{639}$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Konvergenz der Taylor-Reihe von g in einer Umgebung des Ursprungs. Somit war die Annahme, es gäbe ein den Anforderungen entsprechendes, holomorphes g falsch. Daher existiert kein g mit den geforderten Eigenschaften.
(c) Zu prüfen ist die Existenz eines holomorphen $h : \Omega \to \mathbb{C}$, sodass $h(1/(2n)) = 1/n = h(1/(2n-1))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $1/(2n), 1/(2n-1) \in \Omega$. Wir behaupten, dass es kein holomorphes h mit den gewünschten Eigenschaften gibt. Angenommen, es wäre $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit den gewünschten Eigenschaften. Da $0 \in \Omega$ und h als holomorphe Funktion stetig auf ganz Ω ist, gilt $h(0) = \lim_{n\to\infty} h(z_n)$ für die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eingeschränkt auf Ω und definiert durch $z_n = 1/(2n)$. Denn, $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Also ist $h(0) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Wir stellen fest, dass die Funktion $j : \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto 2z$ auf Ω holomorph ist und ferner $j(0) = 0 = h(0)$ sowie $j(z_n) = 1/n = h(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $z_n \in \Omega$ erfüllt. Da $M := \{0\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N} : z_n \in \Omega\} \subset \Omega$ nicht-diskret nach Konstruktion und Ω Gebiet ist, folgern wir mithilfe des Identitässatzes aus $h|_M = j|_M$, dass sogar $h = j$ auf Ω. Andererseits stellen wir fest, dass für $N := \max(\{n \in \mathbb{N} : z_n \in \Omega\} \cup \{1\})$ gilt $1 = h(1/3) = j(1/3) = 2$, was einen Widerspruch darstellt. Somit kann es ein h mit den gewünschten Eigenschaften nicht geben. $\square$

Aufgabe 42 (a) Diese Aussage ist richtig. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und mit der Eigenschaft, dass $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Wir können nun den Mittelwertsatz der eindimensionalen Differentialrechnung anwenden. Dieser liefert uns die Existenz eines $t \in (0, 1)$, sodass gilt $f(1) - f(0) = f'(t)(1 - 0)$, d.h., $1 = f'(t)$.

(b) Diese Aussage ist falsch. Nach Definition einer Topologie auf $\mathbb{R}^2$ ist zumindest $\emptyset = (\mathbb{R}^2)^{\complement}$ offen, d.h., $\mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen. Wir betrachten nun die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \|(x, y)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}$. Dies ist die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Normfunktion stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist. Andererseits ist f nicht beschränkt. Denn für jede obere Schranke $m > 0$ von f hätten wir, $f((m + 1, 0)) = m + 1 > m$, im Widerspruch zur oberen Schrankeneigenschaft von m. Da f nicht nach oben beschränkt ist, ist f auch nicht beschränkt.
(c) Diese Aussage ist falsch. Wie betrachten dazu die Funktion $f : (-2\pi, 4\pi) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$. Diese Funktion ist auf dem ganzen Definitionsbereich stetig differenzierbar und $(-2\pi, 4\pi)$ ist offen. Andererseits gilt $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ und wir haben $f(-\pi/2) = -1$ sowie $f(\pi/2) = 1$. Da f darüber hinaus stetig ist, liefert uns der Zwischenwertsatz, dass $f((-2\pi, 4\pi)) = [-1, 1]$. Als abgeschlossenes Intervall ist $[-1, 1]$ abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, dass $[-1, 1]$ nicht offen ist. Das ist aber klar, denn jede offene ϵ-Kugel um 1 ist ein offenes Intervall der Form $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ für $\epsilon > 0$ und enthält insbesondere ein $X > 1$. Daher ist $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \not\subseteq [-1, 1]$. Also kann $[-1, 1]$ nicht offen sein.
(d) Diese Aussage ist richtig. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht-konstant. Dann ist f eine nicht-konstante ganze Funktion. Sei U ferner offen. Nach etwaiger Zerlegung in Zusammenhangskomponenten, können wir U auffassen als disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen Gebieten $G_1, G_2, ...$ Da f nicht konstant auf $\mathbb{C}$ ist, sieht man unter Verwendung des Identitätssatzes, dass f auch auf jeder Zusammenhangskomponente G_i nicht konstant ist. Andernfalls lieferte Identitätssatz, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ konstant ist, was wir im Vorfeld ausgeschlossen hatten. Nach dem Satz von der Gebietstreue ist dann $f(G_i)$ für jede Zusammenhangskomponente G_i von U wiederum ein Gebiet, also insbesondere offen. Damit ist auch nach de Axiomen einer Topologie auf $\mathbb{C}$ die Vereinigung aller $f(G_i)$ wiederum offen, d.h., $f(U)$ ist offen.
(e) Diese Aussage ist falsch. Angenommen, es gäbe ein bijektives holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$. Dann ist f insbesondere eine beschränkte ganze Funktion. Der Satz von Lioville liefert nun, dass f bereits konstant sein muss. Dann gilt aber $f(0) = f(1)$, im Widerspruch zur Bijektivität von f.
(f) Diese Aussage ist falsch. Angenommen, es gäbe eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $f'(z) = 1/z$. Dann hat die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion. Andererseits gilt

$$2\pi i = \int_{\partial \mathbb{E}} \frac{dz}{z} \neq 0, \tag{640}$$

im Widerspruch zum Cauchy'schen Integralsatz für auf einem Gebiet definierte holomorphe Funktion mit Stammfunktion. □

Aufgabe 43 Sei $n \in \mathbb{N}$.
(a) Gesucht sind alle Nullstellen mit echt positivem Realteil für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n - 1$. Sei $\zeta_n := \exp(2\pi i/n)$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Dann gilt $\zeta_n^n = \exp(2\pi in/n) = \exp(2\pi i) = 1$, d.h., ζ_n ist bereits eine Nullstelle von f. Die Nullstellen z_k von f sind weiterhin gegeben durch $z_k = \zeta_n^k$ für $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, wie man durch Einsetzen leicht bestätigt. Da jeweils $\Re[z_k] > 0$, also $\cos(2\pi k/n) > 0$ ist $k \in \{l \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq l < n/4\rfloor\} \cup \{l \in \mathbb{N}_0 \lceil 3n/4\rceil < l \leq n-1\}$, denn $\cos(x) > 0$

für $x \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ für insgesamt zulässiges $x \in (0, 2\pi)$. (b) Sei z für ein $n \in \mathbb{N}$ eine der Nullstellen von $f(z) = z^n - 1$ mit $\Re[z] > 0$. Zu zeigen ist, dass dann $w := z + z^{n-1}$ eine reelle Zahle echt größer als 0 ist. Wir sehen zunächst, dass $z^{n-1} = z^{-1}$, da z nach Voraussetzung Nullstelle von $f(z) = z^n - 1$ ist und dieses Polynom genau n Nullstellen auf dem Rand $\partial\mathbb{E}$ des Einheitskreises hat, also $z^{-1} \in \mathbb{C}$ existiert. Damit finden wir zunächst die Darstellung $w = z + z^{-1}$. Wir verwenden nun, dass $f(z) = 0 \Rightarrow |z| = 1$ folgt, also $z, z^{-1} \in \partial\mathbb{E}$. In dieser Situation gilt $z\bar{z} = 1 = zz^{-1}$, also $z^{-1} = \bar{z}$. Folglich können wir w auch schreiben als $w = z + \bar{z}$. Nach Definition des komplex Konjugierten gilt also $w = (\Re[z] + \Re[z]) + i(\Im[z] - \Im[z]) = 2\Re[z]$. Da z nach Voraussetzung darüber hinaus eine Nullstelle von f mit der Zusatzeigenschaft $\Re[z] > 0$ sein soll, finden wir $w = 2\Re[z] > 0$, also ein reelles und strikt positives w. (c) Sei nun $n = 5$. Die einzigen Nullstellen von $z^5 - 1$ mit positivem Realteil sind nach Fall 4 aus (a) gegeben durch $z_0 = 1, z_1 = \exp(2\pi i/5)$ und $z_4 = \exp(8\pi i/5)$. Da $\bar{z}_0 = z_0 = 1$, können wir den Fall, dass $w = z_0 + z_0^4$ ausschließen, denn laut Voraussetzung ist $w = 2$ unbeachtlich. Es gilt also $w = z_1 + z_1^4 = z_1 + z_4$ bzw. $w = z_4 + z_4^4 = z_4 + z_1$, denn $z_4^4 = \exp(16\pi i/5) = \exp(\pi i/5) = z_1$. $w = z_1 + z_4$ ist also eindeutig bestimmt. Nun gilt $w^2 = z_1^2 + z_4^2 + 2z_1\bar{z}_1 = z_2 + z_3 + 2$, weil $\bar{z}_2 = z_3$. Damit finden wir $w^2 + w = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + 2$. Es ist bekannt, dass sich die Summe der Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$ zu 0 addieren, wie man leicht über die endliche geometrische Reihe einsieht. Daher gilt $0 = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$. Da $z_0 = 1$ gilt $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$ und wir finden $w^2 + w - 2 = -1$, also $w^2 + w - 1 = 0$, wie behauptet. Für den gesuchten Winkel $\alpha \in (0, \pi)$ gilt $\alpha = \pi/5$, wie man direkt aus den anfänglichen Überlegungen sieht. □

Aufgabe 44 (a) Gesucht ist die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ der offenbar ganzen Funktion $f(z) = 6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6)$. Wir sehen:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{f(z)}{z^3}\right) = 6\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin(z^3)}{z^3}\right) + \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^3(z^6-6)}{z^3}\right) = 6 \cdot 1 + (-6) = 0, \tag{641}$$

wobei wir die Rechenregeln für Grenzwerte verwendet haben. Um nun die Ordnung der Nullstelle zu bestimmen, führen wir eine Taylor-Entwicklung von $\sin(z^3)$ durch. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= 6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{6k+3}}{(2k+1)!} - 6z^3 + z^9 && (642)\\ &= (6z^3 - 6z^3) - (z^9 - z^9) + 6\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{6k+3}}{(2k+1)!} && (643)\\ &= \frac{z^{15}}{20}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5!(-1)^k z^{6k}}{(2k+5)!}. && (644) \end{aligned}$$

Durch $g : B_\epsilon(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto g(z)$ wird für ein beliebiges $\epsilon > 0$ eine holomorphe Funktion wie folgt erklärt

$$g(z) = \frac{1}{20}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5!(-1)^k z^{6k}}{(2k+5)!}. \tag{645}$$

Insbesondere gilt $g(0) = 1/20 \neq 0$, d.h., g hat keine Nullstelle bei $z = 0$. Für die ursprünglich zu untersuchende Funktion f finden wir die Produktdarstellung $f(z) = z^{15} g(z)$ für alle $z \in B_\epsilon(0)$ für beliebiges $\epsilon > 0$. Hieraus können wir die Ordnung der Nullstelle von f bei $z = z_0 = 0$ zu 15 ablesen.
(b) Sei $b > 0$. Zu zeigen ist

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-b^2). \tag{646}$$

Wir stellen zunächst fest, dass das uneigentliche Riemann-Integral dank des exponentiellen Abfalls $\sim \exp(-x^2)$ existiert. Ferner sehen wir, dass

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\cos(2bx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\cos(2bx)dx, \tag{647}$$

dank der Symmetrie der Integrandenfunktion unter $x \mapsto -x$. Infolge der Existenz der uneigentlichen Riemann-Integrals von oben, existiert auch das doppelt uneigentliche Riemann-Integral und es gilt (Grenzwertunabhängigkeit)

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\cos(2bx)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \exp(-x^2)\cos(2bx)dx. \tag{648}$$

Wir definieren nun die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(-z^2)$. Sie ist holomorph. Wir betrachten nun den Weg $\gamma_R : [0,4] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma_R(t) = \begin{cases} -R + ibt & 0 \leq t < 1 \\ -R + 2R(t-1) + ib & 1 \leq t < 2 \\ R + ib(2-t) & 2 \leq t < 3 \\ R - 2Rt & 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \tag{649}$$

Dies ist Weg, der den Rand eines im Uhrzeigersinn durchlaufenen Rechtecks in der komplexen Ebene mit Eckpunkten $\pm R + 0 \cdot i$ und $\pm R + ib$ stetig und fast überall C^1-regulär parametrisiert. Da f in einem das von $\mathrm{Spur}(\gamma_r)$ eingeschlossenen und einfach zusammenhängenden Gebiet beinhaltetenden und einfach zusammenhängenden Gebiet holomorph ist, liefert der Integralsatz von Cauchy

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{650}$$

Wir expandieren das Kurvenintegral aus und formen durch Substitution um

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \exp(-t^2)dt = \int_0^b \exp(-(-R+it))dt + \int_0^b \exp(-(R-i(b-t))^2)dt \\ + e^{b^2}\int_{-R}^R \exp(-(t^2 + 2ibt))dt.\end{aligned} \tag{651}$$

Im Limes $R \to \infty$ tragen die ersten beiden Integrale auf der Rechten Seite nicht bei, da sie wie $\exp(-R)$ gegen 0 gehen. Wir erhalten also

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \exp(-t^2)dt = e^{b^2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \exp(-(t^2+2ibt))dt. \tag{652}$$

Laut Hinweis evaluiert die linke Seite zu $\sqrt{\pi}$. Anschließendes Bilden des Realteils auf beiden Seiten liefert

$$\sqrt{\pi} = e^{b^2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \exp(-t^2)\cos(2bt)dt. \tag{653}$$

Umformen liefert nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \exp(-x^2)\cos(2bx)dx = e^{-b^2}\sqrt{\pi} \tag{654}$$

und mit den eingangs angestellten Symmetrieüberlegungen erhalten wir

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-b^2), \tag{655}$$

wie behauptet. □

Aufgabe 45 Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.
(a) Zu zeigen ist die Nicht-Existenz einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z)^3 = z$. Angenommen, es gibt eine holomorphe Funktion f mit den beschriebenen Eigenschaften. Dann ist f in einer punktierten Relativumgebung der 0 beschränkt: Für $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$ gilt nämlich $|f(z)^3| = |f(z)|^3 = |z|$, also $|f(z)|^3 < 1$ und damit $|f(z)| < 1$ wegen Bijektivität der reellen dritten Wurzelfunktion $\sqrt[3]{\ldots}$ auf $[0,1]$. Laut Riemann'schen Hebbrkeitssatz, angewendet auf das auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ holomorphe f, ist f holomorph auf $\mathbb{D}$ fortsetzbar. Wir bezeichnen diese Fortsetung mit g. Insbesondere gilt $g(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = 0$, denn $0 = \lim_{z\to 0} z = \lim_{z\to 0} f(z)^3 = (\lim_{z\to 0} f(z))^3$. Damit hat g bei $z = 0$ eine Nullstelle der natürlichen Ordnung n. Der Fall, $n = \infty$, ist ausgeschlossen, da ansonsten der Identitätssatz auf $\mathbb{D}$ für g lieferte, dass $g \equiv 0$. Wegen $g(z)^3 = z$ auf $\mathbb{D}$ führte dies auf den Widerspruch $g(1/2)^3 = 0 = 1/2 \in \mathbb{D}$. Also ist n endlich. Also hat g endliche Nullstellenordnung n. Wegen $g(z)^3 = z$ auf $\mathbb{D}$ ist dann $z = 0$ eine $3n \geq 3$-fache Nullstelle von $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, z \mapsto z$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $z = 0$ einfache Nullstelle von h ist, also insbesondere Ordnung < 3 hat. Damit war die Annahme, es gäbe ein f wie beschrieben, falsch. Ein holomorphes f mit den beschriebenen Eigenschaften existiert also nicht.
(b) Zu klären ist die Existenz einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften $|f(z)| = 2$ für z mit $|z| = 1$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\exp(it))dt = 1. \tag{656}$$

Angenommen, ein holomorphes f mit den beschriebenen Eigenschaften existiert. Dann ist f auf einem $\bar{\mathbb{D}}$ umschließenden Gebiet holomorph. Laut Cauchy'scher Integralformel gilt dann für den einfach positiv durchlaufenen Rand des Einheitskreises

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\exp(it)) i \exp(it)dt}{\exp(it)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\exp(it))dt. \tag{657}$$

Zusammen mit der Voraussetzung, dass die rechte Seite 1 ist, gilt also $f(0) = 1$. Andererseits liefert das Minimumsprinzip, dass

$$\min_{z\in\bar{\mathbb{D}}} |f(z)| = \min_{z\in\partial\mathbb{D}} |f(z)| = 2, \tag{658}$$

was $f(0) = 1$ widerspricht. Eine holomorphe Funktion wie beschrieben existiert also nicht. □

Aufgabe 46 Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)/x$.
(a) Wir behaupten, dass f zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden kann. Hierzu definieren wir

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}. \tag{659}$$

Der Potenzreihenausdruck hat nach dem Quotientenkriterium den Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)!}{(-1)^n(2n-1)!} \right| = \lim_{n\to 0}(4n^2 + 2n) = \infty, \tag{660}$$

sodass g eine ganze Funktion definiert. Wir sehen ferner, dass auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sin(z)}{z}. \tag{661}$$

Schränken wir die rechte Seite weiter auf $\mathbb{R}\setminus\{0\} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ein, so erhalten wir $g(x) = \sin(x)/x = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit anderen Worten ist g die (holomorphe) Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{C}$. Damit ist f zu einer ganzen Funktion fortsetzbar.
(b) Wir sollen nun zeigen, dass f uneigentlich Riemann'sch integrierbar ist über ganz $\mathbb{R}$. Hierzu beachten wir, dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{\sin(x)}{x} = \Im\left[\frac{e^{ix}}{x}\right]. \tag{662}$$

Die Funktion $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(iz)/z$ hat bei $z = 0$ eine Polstelle erster Ordnung, wie man anhand der Laurententwicklung, deren Hauptteil nach $\sim z^{-1}$ abbricht, leicht verifiziert. Wir definieren nun für beliebiges $\epsilon > 0$ jeweils die neue Hilfsfunktion $h_\epsilon : \mathbb{C}\setminus\{-i\epsilon\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(iz)/(z+i\epsilon)$. Diese ist in der ganzen oberen komplexen Halbebene und auf der reellen Achse holomorph und hat insbesondere in dem so definierten Abschluss der oberen komplexen Halbebene keine Singularitäten. Der Integralsatz von Cauchy liefert nun

$$0 = \int_\gamma h_\epsilon(z)dz, \tag{663}$$

wobei $\gamma := \gamma_1 * \gamma_2$ die Konkatenation von $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto R\exp(it)$ ist. Wir finden damit

$$0 = \int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{x + i\epsilon}dx + i\int_0^{\pi} \frac{\exp(-R\sin t)\exp(iR\cos t)R\exp(it)}{R\exp(it) + i\epsilon}dt. \tag{664}$$

Das letztgenannte Integral verschwindet exponentiell für $R \to \infty$. Für das erstgenannte Integral verwenden wir den Satz von Plemlj, der liefert

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{x + i\epsilon} = -i\pi + \mathcal{P}\left[\int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{x}\right], \tag{665}$$

wo $\mathcal{P}$ den Cauchy'schen Hauptwert bezeichnet. Übergang zum Limes $R \to \infty$ erlaubt, die beiden Ergebnisse zu kombinieren:

$$0 = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{x + i\epsilon} dx = -i\pi + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{x} dx, \tag{666}$$

wobei verwendet wurde, dass der Beitrag vom Integral über Halbkreisbogen für $R \to \infty$ verschwindet. Damit erhalten wir durch Umstellen und Vergleich von Real- und Imaginärteil schließlich die Ergebnisse

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \ \&\ \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx. \tag{667}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Funktion f haben wir damit gezeigt, dass f tatsächlich doppelt uneigentlich über $\mathbb{R}$ integrierbar ist, mit dem Wert π für das Ergebnis der Integration.
(c) Wir zeigen nun noch, dass f über $\mathbb{R}$ nicht absolut integrabel ist, d.h., dass $|f|$ nicht im doppelt-uneigentlichen Sinne Riemann integrierbar ist. Dazu verwenden wir, dass $|f|$ eingeschränkt auf das Intervall $I_k := [k\pi, (k+1)\pi]$ jeweils konkav ist, für eine beliebige Wahl von $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist auf eben diesen I_k: $|\sin(x)| \geq f_k(x)$, wobei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x - k\pi}{\pi/2} \text{ für } x \in [k\pi, (k+1/2)\pi] \\ \frac{(k+1)\pi - x}{\pi/2} \text{ für } x \in ((k+1/2)\pi, (k+1)\pi] \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}. \tag{668}$$

Wir nehmen nun an, dass f absolut integrabel im oben beschriebenen Sinne wäre. Da $\mathrm{supp} f_k = I_k$, und die I_k bis auf eine diskrete Nullmenge $\mathbb{R}$ disjunkt zerlegen,

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{I_k} \frac{f_k(x)}{|x|} dx = 2\sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_k} \frac{f_k(x)}{x} dx \geq 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} \frac{f_k(x)}{x} dx, \tag{669}$$

wegen Symmetrie. Im letzten Schritt haben wir den Beitrag über das Intervall I_0 unter Einführung eines $\geq$-Zeichens vernachlässigt. Zusätzlich kann man $|1/x| \geq |1/((k+1)\pi)|$ auf $I_{k\geq 1}$ abschätzen. Das liefert dann:

$$\int_{\mathbb{R}} |f|(x) dx \geq 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} \frac{f_k(x)}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(k+1)}. \tag{670}$$

Die letzte Reihe ist aber eine als divergent bekannte harmonische Reihe. Das erzeugt den Widerspruch zur Annahme, f wäre absolut integrabel. Damit ist f nicht absolut integrabel. □

Aufgabe 47 Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom und $\gamma_{r,w}$ der positiv orientierte Rand der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt w. Wir behaupten, dass

$$\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)} dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}. \tag{671}$$

Sei $n = \deg p$. Da p Polynom, ist n endlich. Dann gibt es komplexe Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - w)^k. \tag{672}$$

Taylor-Entwicklung stellt dabei sicher, dass

$$a_k = \frac{p^{(k)}(w)}{k!} \,\forall k = 0, 1, ..., n. \tag{673}$$

Damit rechnen wir das Konturintegral aus:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)} dz &= \int_{\gamma_{r,w}} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(w)}{k!} (z - w)^k} dz \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{\frac{p^{(k)}(w)}{k!}} \int_{\gamma_{r,w}} \overline{(z - w)}^k dz \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{\frac{p^{(k)}(w)}{k!}} ir \int_0^{2\pi} r^k \exp(-ik\phi) \exp(i\phi) d\phi \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{\frac{p^{(k)}(w)}{k!}} ir^{k+1} \int_0^{2\pi} \exp(-i(k - 1)\phi) d\phi.
\end{aligned} \tag{674}$$

Im Falle $k \neq 1$ ist $k - 1 \neq 0$ und wir können das verbleibende Integral wie gewohnt berechnen

$$\int_0^{2\pi} \exp(-i(k - 1)\phi) d\phi = \left. \frac{\exp(-i(k - 1)\phi)}{-k + 1} \right|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = \frac{1 - 1}{-k + 1} = 0. \tag{675}$$

Im Falle $k \neq 1$ gibt es also keinen Beitrag. Im Falle $k = 1$ ist $\exp(-i(k - 1)\phi) = \exp(-i(1 - 1)\phi) = 1$ und damit

$$\int_0^{2\pi} \exp(-i(k - 1)\phi) d\phi \overset{k=1}{=} \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\phi = 2\pi. \tag{676}$$

Mit diesen beiden Ergebnissen finden wir

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)} dz &= \sum_{k=0}^{n} \overline{\frac{p^{(k)}(w)}{k!}} ir^{k+1} \int_0^{2\pi} \exp(-i(k - 1)\phi) d\phi \\
&= \overline{\frac{p^{(1)}(w)}{1!}} ir^{1+1} \cdot 2\pi \\
&= 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}.
\end{aligned} \tag{677}$$

Damit ist die behauptete Gleichung bewiesen. □

Aufgabe 48 Zu zeigen sind die folgenden Aussagen.
(a) Die folgende Reihe hat den Konvergenzradius $\rho = 1/2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n. \tag{678}$$

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \,\forall n \in \mathbb{N}. \tag{679}$$

Zur Berechnung des Konvergenz-Radius wenden wir das Quotientenkriterium an:

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)!2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!2^n(n!)^2} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2\cdot(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2} \frac{n+1}{n+1/2} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}} \right| \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{680}$$

wie behauptet. □
(b) Sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $D \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge. Zuletzt sei eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{E}$ gegeben. Wir zeigen, dass dann bereits h konstant ist. Sei dazu $z_0 \in D$ beliebig. Da D nach Voraussetzung diskret ist, finden wir eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $z_0 \in U$ und $U \cap D \setminus \{z_0\} = \emptyset$. Damit ist $h|_{U\setminus\{z_0\}}$ holomorph und beschränkt, da $h(U \setminus \{z_0\}) \subseteq \mathbb{E}$ und letzteres eine beschränkte Menge in $\mathbb{C}$ ist. Der Riemann'sche Hebbarkeitssatz liefert nun, dass z_0 eine hebbare Singularität von h ist. Beliebigkeit von $z_0 \in D$ impliziert, dass wir $h : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ zu einer ganzen Funktion $H : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{E}}$ fortsetzen können, sodass $H|_{\mathbb{C}\setminus D} = h$. Die Funktion H hat die Eigenschaft, dass $H(\mathbb{C}) \subseteq \bar{\mathbb{E}}$, ist also insbesondere beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist aber jede beschränkte ganze Funktion bereits konstant. Also finden wir, dass auch H konstant ist, und damit, wegen der Fortsetzungseigenschaft, auch $h = H|_{\mathbb{C}\setminus D}$ konstant ist. □
(c) Sei nun $K_{0.5,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} | 0.5 < |z| < 1\}$. Wir behaupten, dass $f : K_{0.5,1}(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto z^{-1}$ nicht gleichmäßig durch Polynome $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approximiert werden kann, d.h., dass es keine Folge von Polynomen $p_n : K_{0.5,1}(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto p_n(z)$ gibt, die die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ gleichmäßig haben. Angenommen, es sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen mit den soeben beschriebenen Eigenschaften. Nach dem Satz von Lebesgue über die gleichmäßige Konvergenz gilt für die Randkurve γ von $\partial B_{0.75}(0) \subsetneq K_{0.5,1}(0)$ (einfach und im positiven Sinne durchlaufen),

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} p_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma p_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} [0] = 0, \tag{681}$$

wobei im vorletzten Schritt verwendet wurde, dass p_n als Polynomfunktion auf $B_1(0) \supsetneq \bar{B}_{0.75}(0)$ nach dem Identitätssatz holomorph fortgesetzt werden kann und das Kurvenintegral von der Fortsetzung von p_n entlang γ nach dem Integralsatz von Cauchy verschwindet. Da $2\pi i \neq 0$ haben wir den Widerspruch zur Annahme, es gäbe eine Folge an Polynomen mit den beschriebenen Eigenschaft. Die Annahme war also falsch und f kann nicht auf $K_{0.5,1}(0)$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden. $\square$

Aufgabe 49 Gegeben sei die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto 2/(z(z^2+1))$. Wir definieren ferner die Gebiet $A_1 = K_{0,1/2}(0)$, $A_2 = K_{0,1}(i)$ sowie $A_3 = K_{2,3}(i)$. Wir bestimmen in jedem der drei Fälle die Laurent-Entwicklung von f.

- *Fall* A_1*:* Hier ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und wir können wegen $z \in A_1 \Leftrightarrow 0 < |z| < 0.5$ die geometrische Reihenformel anwenden:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{z(1+z^2)} \\ &= \frac{2}{z}\frac{1}{-(-z^2)} \\ &= \frac{2}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} \\ &= \frac{2}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{2k-1} \\ &= \frac{2}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} z^{2k+1}. \end{aligned} \tag{682}$$

- *Fall* A_2*:* Wir stellen fest, dass $z^2+1 = (z+i)(z-i)$. Entsprechend schreiben wir f um:

$$f(z) = \frac{2}{z(z-i)(z+i)}$$
$$= \frac{2}{z-i}\left(\frac{1}{z(z+i)}\right)$$
$$= \frac{2}{z-i}\left(\frac{-i}{z} + \frac{i}{z+i}\right)$$
$$= \frac{2i}{z-i}\left(\frac{-1}{i-(i-z)} + \frac{1}{2i-(i-z)}\right)$$
$$= \frac{2}{z-i}\left(\frac{-1}{1-(1+zi)} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1+zi}{2}}\right) \tag{683}$$
$$= \frac{2}{z-i}\left((-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k(z-i)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{2^{k+1}}(z-i)^k\right)$$
$$= -\frac{1}{z-i} + \left((-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^{k+1}(z-i)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^{k+1}}{2^{k+1}}(z-i)^k\right)$$
$$= -\frac{1}{z-i} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-2^{k+1}}{(2i)^{k+1}}(z-i)^k.$$

Hierbei haben wir wiederum die geometrische Summenformel verwendet, denn für $z \in A_2$ gilt $0 < |z-i| < 1$.

- *Fall A_3:* Wir stellen fest, dass $z \in K_{2,3}(i)$ insbesondere $1/3 < |z-i|^{-1} < 1/2$ impliziert. Entsprechend schreiben wir, die Rechnung aus Fall (2) modifizierend,

$$f(z) = \frac{2i}{z-i}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z}\right)$$
$$= \frac{2i}{z-i}\left(\frac{1}{2i-(i-z)} - \frac{1}{i-(i-z)}\right)$$
$$= \frac{2i}{(z-i)^2}\left(\frac{1}{1-\frac{2i}{z-i}} - \frac{1}{1-\frac{i}{z-i}}\right) \tag{684}$$
$$= \frac{2i}{(z-i)^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2i)^k}{(z-i)^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{(z-i)^k}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2i^{k+1}(2^k-1)}{(z-i)^{k+2}},$$

wobei wir $1/3 < |i/(z-i)| < 1/2$ und $2/3 < |2i/(z-i)| < 1$ für $z \in A_3$ verwendet haben, um die geometrische Summenformel wie dargestellt anwenden zu können.

Entsprechend wir für den Weg $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 0.5\exp(it)$, dass

$$\oint_{\alpha} f(z)dz = 2 \cdot 1 \cdot 2\pi i = 4\pi i, \tag{685}$$

da der relevante Koeffizient der Laurent-Entwicklung von f um $z_0 = 0$ $a_{-1} = 2$ ist. Für das Wegintegral entlang $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 4\exp(it)$ berechnen wir die Residuen von f in $B_4(0)$. Alle Singularitäten von f sind isoliert und liegen in $B_4(0)$ als einfache Polstellen. Entsprechend finden wir $\operatorname{Res}(f, 0) = 2$, $\operatorname{Res}(f, i) = -1$ und $\operatorname{Res}(f, -i) = -1$. Da β den Rand $\partial B_4(0)$ einfach im positiven Sinne durchläuft, liefert der Residuensatz

$$\oint_\beta f(z)dz = 2\pi i \cdot 1 \cdot (2 + (-1) + (-1)) = 0. \tag{686}$$

□

Aufgabe 50 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-2, -i, i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/((z+2)^2(z^2+1))$. Sie ist auf dem gesamten Definitionsbereich holomorph und hat die dreifache Polstelle $z_0 = -2$ sowie die beiden einfachen Polstellen $z_+ = i$ und $z_- = -i$.
(a) Gesucht ist zunächst die Laurent-Entwicklung von f um $z_0 = -2$. Hierzu beachten wir, dass Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z - i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z + i}. \tag{687}$$

Ferner finden wir für die Laurent-Entwicklung von $z \mapsto (z - i)^{-1}$ und $z \mapsto (z + i)^{-1}$ um $z_0 = -2$, dass

$$\frac{1}{z + i} = \frac{1}{-2 + i}\frac{1}{1 - \frac{z+2}{2-i}} = \frac{-2 - i}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2 + i)^k}{5^k}(z + 2)^k \tag{688}$$

$$\frac{1}{z - i} = \frac{1}{-2 - i}\frac{1}{1 - \frac{z+2}{2+i}} = \frac{-2 + i}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2 - i)^k}{5^k}(z + 2)^k. \tag{689}$$

Hierbei ist die erste Gleichung gültig für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 2| < |2 - i| = \sqrt{5}$ und die zweite für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |2 + i| = \sqrt{5}$. Damit finden wir

$$f(z) = \frac{1}{(z + 2)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(2 + i)^{k+1} - (2 - i)^{k+1}}{5^k}(z + 2)^k \tag{690}$$

$$= \frac{-4}{(z + 2)^3} + \frac{-6/5}{(z + 2)^2} + \frac{-4/25}{z + 2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(2 + i)^{k+4} - (2 - i)^{k+4}}{5^{k+3}}(z + 2)^k. \tag{691}$$

Für den Konvergenzradius fanden wir für die problematischen Terme $\sim (z - i)^{-1}$, $\sim (z + i)^{-1}$ aus der geometrischen Reihenformel $r = 5$, d.h., die Reihenausdrücke konvergieren absolut und punktweise auf $B_5(-2)$. Ausschluss der dreifachen Polstelle bei $z_0 = -2$ liefert dann das Konvergenzgebiet $K_{0,5}(-2)$ und der Konvergenzradius der angegebenen Reihenentwicklung ist $r = 5$.
(b) Gesucht ist nun das geschlossene Konturintegral von f über $\partial B_2(-1)$. Wir stellen fest, dass $|i - (-1)| = \sqrt{2}$, $| - i - (-1)| = \sqrt{2}$ und $| - 2 - (-1)| = 1$. Damit gilt

$i, -i, -2 \in B_2(-1)$. Wir berechnen das Integral durch Anwendung des Residuensatzes:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B_2(-1)} f(z)dz &= 2\pi i \sum_{z\in\{-2,-i,i\}} n(\partial B_2(-1), z)\mathrm{Res}(f,z) \\ &= 2\pi i \sum_{z\in\{-2,-i,i\}} \mathrm{Res}(f,z), \end{aligned} \tag{692}$$

da der nach Aufgabenstellung gewählte Weg so orientiert ist, dass $\partial B_2(-1)$ einfach positiv durchlaufen wird. Es verbleibt also die Residuen zu bestimmen. Wir finden die Residuen an den einfachen Polstellen $z_\pm = \pm i$ zu

$$\mathrm{Res}(f, z_+) = \lim_{z\to z_+} (f(z)(z - z_+)) = \frac{1}{(2+i)^3 2i} = \frac{(2-i)^3}{250i} \tag{693}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_-) = \lim_{z\to z_-} (f(z)(z - z_-)) = \frac{-1}{(2-i)^3 2i} = \frac{-(2+i)^3}{250i}. \tag{694}$$

Für die Polstelle dritter Ordnung verwenden wir, das bekannte Resultat

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_0) &= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(f(z)(z-z_0)^3)\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\frac{-2z}{(1+z^2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{-2(1+z^2)^2 + 4z^2(1+z^2)}{(1+z^2)^4} \\ &= \frac{-5^2 + 2\cdot 4\cdot 5}{5^4} \\ &= \frac{15}{5^4} \\ &= \frac{3}{125}. \end{aligned} \tag{695}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B_2(-1)} f(z)dz &= 2\pi i \cdot \left(\frac{(2-i)^3}{250i} + \frac{-(2+i)^3}{250i} + \frac{3}{125}\right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{i - 12i + i - 12i}{250i} + \frac{3}{125}\right) \\ &= \frac{-16\pi i}{125}. \end{aligned} \tag{696}$$

□

Aufgabe 51 (a) Gegeben sei eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto h(z)$ mit $h(z_0) \neq 0$ für ein bestimmtes $z_0 \in \mathbb{C}$. Definiere die meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto h(z)/(z-z_0)^2$. Gesucht ist ein Ausdruck, um das Residuum von f bei $z = z_0$ zu berechnen. Nach Definition des Residuums gilt

$$\begin{aligned}
2\pi i \mathrm{Res}(f, z_0) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z) dz \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{h(z)}{(z-z_0)^2} dz \\
&= 2\pi i \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{h(z)}{(z-z_0)^2} \right] \\
&= 2\pi i \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial}{\partial \xi}\bigg|_{\xi = z_0} \left(\frac{h(z)}{z - \xi} \right) dz \right] \\
&= 2\pi i \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{d}{d\xi}\bigg|_{\xi = z_0} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{h(z)}{z - \xi} dz \right] \\
&= 2\pi i \lim_{\epsilon \to 0^+} h'(z_0) \\
&= 2\pi i h'(z_0),
\end{aligned} \tag{697}$$

sodass $\mathrm{Res}(f, z_0) = h'(z_0)$. Wir haben hierbei die Cauchy'sche Integralformel verwendet.
(b) Für die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/((4 + z^2)^2)$ sind alle isolierten Singularitäten in $\mathbb{C}$ samt Typ und ggf. Polstellenordnung anzugeben. Wegen $\lim_{z \to 2i} |f(z)| = \infty$ und $\lim_{z \to -2i} |f(z)| = \infty$ haben wir bei $z_+ = 2i$ bzw. $z_- = -2i$ jeweils eine nicht-hebbare Singularität vorliegen. Zu entscheiden ist, ob es sich um eine wesentliche Singularität oder eine Polstelle handelt. Dazu stellen wir fest, dass $\lim_{z \to z_\pm}(1/f'(z)) = 0$ jeweils für $z \to z_+$ bzw. $z \to z_-$. Andererseits finden wir, dass $\lim_{z \to z_+} |1/f''(z)| = \lim_{z \to z_+} |2(4 + z^2) + 4z^2| = 16 \neq 0$ und $\lim_{z \to z_-} |1/f''(z)| = \lim_{z \to z_-} |2(4 + z^2) + 4z^2| = 16 \neq 0$. Da das Zählerpolynom von f gleich 1 ist, hat das Nennerpolynom von f eine doppelte Nullstelle jeweils bei $z = z_+ = 2i$ bzw $z = z_- = -2i$. Damit haben wir jeweils eine Polstelle der Ordnung 2 bei $z = z_\pm = \pm 2i$.
(c) Gesucht ist nun der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(4 + x^2)^2}. \tag{698}$$

Da der Grad des Nenner-Polynoms > 1 ist und das Nennerpolynom entlang der reellen Achse keine Nullstellen hat, liefert uns ein Resultat aus der Integrationstheorie, dass das doppelte uneigentliche Riemann-Integral über f existiert. Insbesondere gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x) dx. \tag{699}$$

Wir betrachten den geschlossenen Halbkreisbogen in der oberen komplexen Halbebene, definiert als Konkatenation von $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it)$. Dann ist für $R > 2$ laut Residuensatz

$$\oint_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z) dz = 2\pi i \cdot 1 \cdot \mathrm{Res}(f, z = z_+) = \frac{d}{dz}\bigg|_{z = 2i} \frac{1}{(z + 2i)^2} = \frac{\pi}{16}. \tag{700}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\gamma_1 * \gamma_2$ die Polstelle $z = z_+ = 2i$ einfach im positiven Sinne umschließt. Andererseits können wir die Rechenregeln für Konkatenationen von Wegen in der komplexen Ebene verwenden, um zu erhalten

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_0^{\pi} \frac{iR\exp(it)}{(4 + R^2\exp(2it))^2}. \tag{701}$$

Wir schätzen das zweite Integral für hinreichend große $R > 2$ ab

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{iR\exp(it)}{(4 + R^2\exp(2it))^2}\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{iR\exp(it)dt}{(4 + R^2\exp(2it))^2}\right| \leq \pi \frac{R}{(4 - R^2)^2} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{702}$$

Im vorletzten Schritt haben wir im Nenner die umgekehrte Dreiecksungleichung verwendet. Mit dem soeben erzielten Ergebnis finden wir das gesuchte Integral wie folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \frac{\pi}{16}. \tag{703}$$

□

Aufgabe 52 (a) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und erfülle die Abschätzung $|f(z)| \leq 1 + |z|^{-2}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zu zeigen ist, dass f dann von der Form $f(z) = a + b/z + c/z^2$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit geeigneten $a, b, c \in \mathbb{C}$ ist. Da f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, hat f eine Laurententwicklung auf $K_{0,\infty}(0)$ von der Gestalt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{704}$$

Wir sehen, dass für $|z| \to \infty$ der Hauptteil der Laurentreihe nicht zu $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)|$ beiträgt. Angenommen, es gäbe ein $N > 0$, sodass $a_N \neq 0$. Dann ist

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)/z^N| \geq |a_N|. \tag{705}$$

Die Abschätzung $|f(z)| \leq 1 + |z|^{-2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ liefert aber

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)/z^N| \leq \lim_{|z|\to\infty} (|z|^{-N} + |z|^{-N-2}) = 0,$$

im Widerspruch zu $a_N \neq 0$. Daher ist $a_N = 0$ für alle $N > 0$. Wir verbleiben also mit einer Laurentreihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k + a_0. \tag{706}$$

Wir definieren nun $w = 1/z$ und drücken f durch die neue Koordinate w aus

$$f(z(w)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k} w^k. \tag{707}$$

Angenommen, es gäbe ein a_{-k} für $k > 2$, sodass $a_{-k} \neq 0$, dann ist

$$\lim_{|w|\to\infty} f(z(w))/w^k \geq |a_k| > 0. \tag{708}$$

Andererseits liefert die Abschätzung $|f(z(w))| \leq 1 + |z(w)|^{-2} = 1 + |w|^2$, dass

$$\lim_{|w|\to\infty} |f(z(w))/w^k| \leq \lim_{|w|\to\infty} (|w|^{-k} + |w|^{-k+2}) = 0, \tag{709}$$

da $k > 2$. Damit ist gezeigt, dass alle $a_{-k} = 0$ für $k > 2$ und mittels Umbenennung $a_0 = a$, $a_{-1} = b$, $a_{-2} = c$ finden wir, dass f also nur von der Form

$$f(z) = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} \tag{710}$$

sein kann. Die $a, b, c \in \mathbb{C}$ sind dabei geeignet in dem Sinne, dass $|f(z)| \leq 1 + |z|^{-2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, waren aber nicht weiter zu spezifizieren.
(b) Seien $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und habe g einen Pol der Ordnung k bei $z = 0$. Zudem gelte für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right). \tag{711}$$

Zu zeigen ist, dass $f = g$ oder f hat eine wesentliche Singularität bei $z = 0$. Da g einen Pol der Ordnung k bei $z = 0$ hat, gibt es eine holomorphe Funktion $h_g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass $h_g(0) \neq 0$ und $g(z) = h_g(z)/z^k$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir definieren nun eine holomorphe Funktion $h_f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^k g(z)$. Dann gilt insbesondere

$$h_f(1/n) = h_g(1/n) \tag{712}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hätte nun h_f eine Polstelle der endlichen Ordnung ≥ 1, so wäre $\lim_{n\to\infty} |h_f(1/n)| = \infty$. Das steht aber im Widerspruch dazu, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ die Größe $|h_g(0) - h_f(1/n)| < \epsilon$, d.h., $(h_f(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $h_g(0) \neq 0$ konvergiert. Daher kann h_f keine Polstelle endlicher Ordnung haben. Also kann h_f nur entweder eine hebbare Singularität besitzen bei $z = 0$ oder eine wesentliche Singularität. Denn dann ist h_f so gewählt, dass $h_f(1/n) = h_g(1/n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $h_g(0) = \lim_{n\to\infty} h_f(1/n)$, was wegen der Dichtheit des Bildes in $\mathbb{C}$ eines Umgebung der wesentlichen Singularität unter h_f nach Casaroti-Weierstraß möglich ist. Entsprechend hat mit h_f auch f eine wesentliche Singulartät bei $z = 0$. Wir bezeichnen die Fortsetzung von h_f im Falle einer hebbaren Singularität wieder mit h_f. Hat h_f eine hebbare Singularität, so gilt $h_f(0) = h_g(0)$ nach Grenzübergang $n \to \infty$ in der oben angegebenen Gleichung. Da $M \equiv \{n^{-1} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{C}$ wegen $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \in M$ einen Häufungspunkt besitzt, ist M nicht-diskret. Zusammen mit $h_f(z) = h_g(z)$ für alle $z \in M$ liefert der Identitätssatz dann $h_f = h_g$ auf $\mathbb{C}$. Somit ist nach Division von $h_f|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} = h_g|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ durch z^k für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dann auch $f = g$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. □ □

Aufgabe 53 Gegeben sei die, offenbar ganze, Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto (z^2 + 4\pi^2)\sin(z)$.
(a) Zu berechnen sind alle Nullstellen der Funktion. Es gilt $f(z) = 0$ genau dann wenn $z^2 + 4\pi^2 = 0$ oder $\sin(z) = 0$. Da $z^2 + 4\pi^2 = 0 \Leftrightarrow z \in \{-2\pi i, 2\pi i\}$ und, wie aus der Vorlesung bekannt, $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$, finden wir die Nullstellenmenge $N[f] = \{\pi \cdot k | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\pi i, -2\pi i\}$. Wir halten bereits fest, dass $\pi \cdot k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ eine einfache Nullstelle von $f(z)$ ist, denn sonst wäre die Ordnung der Nullstelle $\pi \cdot k$ zumindest ≥ 2. Dann wäre aber $f'(\pi \cdot k) = 0$, was wegen $f'(z) = 2z\sin(z) + (z^2 + 4\pi^2)\cos(z)$ zu dem Widerspruch $0 = (-1)^k(k^2+4)\pi^2$ führt. Also sind tatsächlich alle Nullstellen von f aus $\pi \cdot \mathbb{Z}$ einfach. Da $z^2 + 4\pi^2$ in teilerfremde Linearfaktoren in $\mathbb{C}[z]$ zerfällt, sind ebenfalls die Nullstellen $\pm 2\pi i$ einfach.
(b) Zu berechnen sind die Residuen von $g : \mathbb{C} \setminus N[f] \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/f(z)$ für $z \in \pi\mathbb{Z}$. Wie in Teil (a) festgestellt, handelt es sich bei den Nullstellen von f jeweils um einfache Nullstellen, sodass g jeweils Polstellen der Ordnung 1 bei $z \in N[f]$, insbesondere also bei $z \in \pi\mathbb{Z}$, hat. Laut Vorlesung können wir dann für beliebiges aber festes $k \in \mathbb{Z}$ das gesuchte Residuum berechnen als

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(1/f, z = k \cdot \pi) &= \lim_{z \to k \cdot \pi} \left[\frac{z - k \cdot \pi}{(z^2 + 4\pi^2) sin(z)} \right] \\
&= \left(\lim_{z \to k\pi} \frac{1}{z^2 + 4\pi^2} \right) \left(\lim_{z \to k\pi} \frac{z - k\pi}{\sin(z)} \right) \\
&= \frac{1}{(-1)^k (k^2 + 4)\pi^2},
\end{aligned} \tag{713}$$

wobei wir den Grenzwert im zweiten Faktor durch Reduktion auf die komplexe Ableitung berechnet haben:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to k\pi} \left(\frac{z - k\pi}{\sin z} \right) &= \lim_{z \to k\pi} \left(\frac{z - k\pi}{\sin(z - k\pi)\cos(k\pi) + \cos(z - k\pi)\sin(k\pi)} \right) \\
&= \frac{1}{(-1)^k} \lim_{z \to k\pi} \left(\frac{z - k\pi}{\sin(z - k\pi)} \right) \\
&= \frac{1}{(-1)^k} \lim_{z \to k\pi} \left(\left(\frac{\sin(z - k\pi)}{z - k\pi} \right)^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{(-1)^k} \left(\lim_{z \to k\pi} \left(\frac{\sin(z - k\pi)}{z - k\pi} \right) \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{(-1)^k} \left(\lim_{z' \to 0} \frac{\sin(z') - \sin(0)}{z' - 0} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{(-1)^k} (\cos(0))^{-1} \\
&= \frac{1}{(-1)^k}.
\end{aligned}$$

(c) Gesucht ist eine Skizze (hier also Beschreibung) der Menge $M \equiv \{t - i\cos(t) | t \in [-\pi, \pi]\} \cup \{z \in \mathbb{C} | \Im[z] \geq 1, |z - i| = \pi\}$. Identifizieren wir $\mathbb{C}$ vermöge $(x, y) = (\Re[z], \Im[z])$ mit der Ebene, so entspricht M gerade $(\mathrm{id}, -\cos)([-\pi, \pi]) \cup (\partial B_\pi((0,1)) \cap$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y\geq 1\})$. Den gesuchten Weg $\Gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, dessen Spur M ist, geben wir wie folgt an:

$$\Gamma(t)=\begin{cases}(2t-\pi)-i\cos(2t-\pi) & 0\leq t\leq\pi\\ i+\exp(i(t-\pi)) & \pi<t\leq 2\pi\end{cases}. \tag{714}$$

Dieser Weg ist stückweise $\mathcal{C}^1$, also eine Kurve, und ferner geschlossen, denn $\Gamma(0)=(-\pi,1)=\Gamma(2\pi)$. Aus der Angabe ist direkt ersichtlich, dass $\mathrm{Spur}(\Gamma)=M$.
(d) Zu berechnen ist nun das folgende Kurvenintegral

$$I=\oint_\Gamma\frac{dz}{f(z)}. \tag{715}$$

Wir können den Wert des Integrals mittels Residuensatz berechnen. Γ berandet ein einfach zusammenhängende Gebiet $D\subseteq\mathbb{C}$, in dem die (Teil-)Menge $M_D=\{0\}\subsetneq N[f]$ der Polstellen von $1/f$ liegt. Per Inspektion der geschlossenen Kurve Γ in Teil (c) sehen wir, dass die einzige in D liegende Polstelle bei $z=0$ einfach und positiv umlaufen wird. Also gilt $n(\Gamma,0)=1$ für die Umlaufzahl. Aus Teil (b) ist insbesondere durch die Wahl von $k=0$ das Residuum von $1/f$ bei $z=0$ bekannt. Es gilt $\mathrm{Res}(1/f,z=0)=0=1/(4\pi^2)$. Damit finden wir kaut Residuensatz

$$I=2\pi in(\Gamma,0)\mathrm{Res}(1/f,0)=-2\pi i. \tag{716}$$

□

Aufgabe 54 Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{C},z^2/(z^2-1)$.
(a) Für alle Singularitäten von f ist der jeweilige Typ der Singularität zu bestimmen und das Residuum dort zu bestimmen. Mithilfe der Faktorisierung $(z^2-1)=(z+1)(z-1)$ sehen wir, dass f jeweils Polstellen der Ordnung 1 bei $z_\pm=\pm1$ hat, denn es ist $h_+:B_2(z_+)\to\mathbb{C},z\mapsto z^2/(z+1)$ holomorph und $f(z)=h_+(z)/(z-1)$ für alle $z\in B_2(z_+)\setminus\{z_+=1\}$. Analog ist $h_-:B_2(z_-)\to\mathbb{C},z\mapsto z^2/(z-1)$ holomorph und es gilt $f(z)=h_-(z)/(z+1)$ für alle $z\in B_2(z_-)\setminus\{z_-=-1\}$. Die Residuen finden wir wie folgt:

$$\mathrm{Res}(f,z_-)=\lim_{z\to z_-}(f(z)(z-z_-))=\lim_{z\to z_-}h_-(z)=-0.5, \tag{717}$$

$$\mathrm{Res}(f,z_+)=\lim_{z\to z_+}(f(z)(z-z_+))=\lim_{z\to z_+}h_+(z)=0.5. \tag{718}$$

(b) Zu zeigen ist, dass $f|_U$ auf $U=K_{1,\infty}(0)$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt. U ist offen und zusammenhängend, folglich ein Gebiet. $f|_U$ ist auf U holomorph. Die Existenz einer holomorphen Stammfunktion von f auf U ist daher äquivalent zu der Aussage, dass für jeden geschlossenen Weg Γ, der ganz in U verläuft,

$$0=\oint_\Gamma f(z)dz. \tag{719}$$

Da $\{-1,1\}\subset U^{\complement}$, umläuft jeder geschlossene Weg Γ, der ganz in U verläuft -1 und 1 gleichartig in dem Sinne, dass $n(\Gamma,-1)=n(\Gamma,1)\in\mathbb{Z}$. Mittels Residuensatz können wir also das obenstehende Konturintegral berechnen:

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma f(z)dz &= 2\pi i(n(\Gamma,1)\mathrm{Res}(f,1) + n(\Gamma,-1)\mathrm{Res}(f,-1)) \\ &= \pi i(n(\Gamma,1) - n(\Gamma,-1)) \\ &= 0,\end{aligned} \tag{720}$$

insbesondere also unabhängig von der Wahl von Γ mit den beschriebenen Eigenschaften. Damit verschwindet also das Kurvenintegral von f über besagte Γ, sodass das eingangs zitierte Vorlesungsresultat die Existenz einer holomorphen Stammfunktion von f auf U gewährleistet. □

Aufgabe 55 Sei $f_n : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z+k} \tag{721}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, dass $f : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ holomorph ist. Hierzu beachten wir, dass für jedes endliche n

$$f_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2z}{z^2-k^2}. \tag{722}$$

Die f_n's sind für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ holomorph. Um den Weierstraß'schen Konvergenzssatz anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, das gegeben ist durch

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2k^2}. \tag{723}$$

Hierzu reicht es aus, zu zeigen, dass $(f_n)_n$ kompakt konvergiert. Sei dazu $K \subseteq \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ ein Kompaktum. Dann gibt es $0 < r < R$, sodass für alle $z \in K$ gilt $0 < r \leq |z| \leq R$. Nun gilt

$$f_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\lfloor R\rfloor} \frac{2z}{z^2-k^2} + \sum_{k=\lceil R\rceil}^{n} \frac{2z}{z^2-k^2}. \tag{724}$$

Die erste Summe bleibt für festes K auch für $n \to \infty$ eine endliche Summe. Für die zweite Summe sehen wir hingegen, dass

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=\lceil R\rceil}^{n} \frac{2z}{z^2-k^2}\right| &\leq \sum_{k=\lceil R\rceil}^{n} \left|\frac{2z}{z^2-k^2}\right| \\
&\leq \sum_{k=\lceil R\rceil}^{n} \frac{2R}{||z^2|-|k^2||} \\
&\leq \sum_{k=\lceil R\rceil}^{n} \frac{2R}{k^2-R^2} \\
&\leq \frac{2R}{\lceil R\rceil^2-R^2} + 2R \sum_{k=\lceil R\rceil+1}^{n} \frac{1}{k^2-R^2} \\
&\leq \frac{2R}{\lceil R\rceil^2-R^2} + 2R \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{725}$$

Entsprechend sehen wir auf dem vorgegebenen K, dass für alle $n \geq N$ zu einem $N \in \mathbb{N}$ $|f - f_n| \leq 2R \sum_{l=1}^{\infty}(n+l)^{-2} \to 0$ falls $N \to \infty$. Damit konvergiert $(f_n)_n$ kompakt gegen f, also lokal gleichmäßig. Der Weierstraß'sche Konvergenzsatz für lokal gleichmäßig konvergente Folgen liefert nun, dass $f_n \to f$ wenn $n \to \infty$. Da die einzelnen Folgenglieder f_n jeweils holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ sind, gilt dies laut dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz auch für die Grenzfunktion f. Damit ist die Holomorphie von f auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ bewiesen. □

Aufgabe 56 (a) Sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C}||z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$. Damit hat f bei $z = 0$ eine Nullstelle der Ordnung $s \geq 1$. Damit ist $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, definiert als die holomorphe Fortsetzung von $f(z)/z^s$, ebenfalls holomorph. Da $\mathbb{E}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist, und es ist $f(z) = z^s g(z)$. Wir definieren nun

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f(z^k) = \sum_{k=1}^{n} z^{s\cdot k} g(z^k). \tag{726}$$

Das sind für alle $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{E}$ holomorphe Funktionen. Wir zeigen, dass diese absolut und lokal gleichmäßig gegen $F : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ konvergieren, wobei $F \equiv \lim_{n\to\infty} F_n$. Dazu verwenden wir, dass auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßige und kompakte Konvergenz äquivalent sind. Auf einem Kompaktum $K \subset \mathbb{E}$ existiert für g nach dem Maximumsprinzip ein Maximum $M_K \equiv \max_{z\in K}\{g(z)\}$. Dann gilt

$$|f(z^k)| \leq M_K \cdot |z|^{s\cdot k} \leq M_K \cdot (q^s)^k, \tag{727}$$

wobei $0 \leq q < 1$ wegen $K \subseteq \mathbb{E}$. Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z^k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_K (q^s)^k = \frac{M_K q^s}{1-q^s} < \infty \tag{728}$$

mit der Formel für die geometrische Reihe auf $\mathbb{E}$ liefert das Weierstraß'sche Majorantenkriterium die gleichmäßige Konvergenz auf K. Damit finden wir die absolute und kompakte Konvergenz von $F_n \to F$ für $n \to \infty$ auf ganz $\mathbb{E}$, die, wie einführend erwähnt, äquivalent dazu ist, dass $F_n \to F$ wenn $n \to \infty$ absolut und lokal gleichmäßig. Damit konvergiert die Funktionenreihe F absolut und lokal gleichmäßig auf $\mathbb{E}$.
(b) In Ergänzung zu (a) fordern wir nun, dass f sogar auf einer Umgebung U von $\bar{\mathbb{E}}$ analytisch sei. Wir zeigen: Konvergiert

$$G(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n) < \infty \tag{729}$$

auf $\bar{\mathbb{E}}$ absolut, so ist $f \equiv 0$. Aus der Forderung, dass G auf $\bar{\mathbb{E}}$ absolut konvergiert, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z^k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |g(z^k)||z|^{s \cdot k}. \tag{730}$$

Nach Wahl von s gemäß (a) gilt $g(0) = a_s$, wobei a_s der erste nicht-verschwindende Koeffizient der Taylorreihe von f um $z = 0$ ist. Da $g : U \to \mathbb{C}$ analytisch ist, ist g dort holomorph. Setze $z = \exp(2\pi ip/q)$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Riemann'schen Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |g(z^k)| &= \sum_{k=1}^{\infty} |g(\exp(2\pi kp/q))| \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=0}^{\infty} |g(\exp(2\pi i(l + k/q)))| \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |g(\exp(2\pi ik/q))| \right). \end{aligned} \tag{731}$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist eine unendliche Reihe mit konstanten Summanden. Er kann ausschließlich dann konvergieren wenn einer der, und damit alle, Summanden verschwindet. Wir haben also $g(\exp(2\pi ik/q)) = 0$ für festes $q \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, .., q\}$. Auf diese Weise, da $q \in \mathbb{N}$ beliebig war, gilt die vorangehende Aussage für alle $x = p/q \in M \equiv \mathbb{Q}$. Da auch $\{\exp(2\pi ix) | x \in \mathbb{Q}\}$ eine nicht-diskrete Teilmenge von $\partial\mathbb{E}$ ist (z.B. Häufungspunkt 0), erhalten wir mit dem Identitässatz, dass $g = 0$ auf jedem $\bar{\mathbb{E}}$ beinhaltenden und in U enthaltendem Gebiet G ist. Damit finden wir aber, dass $f(z) = g(z)z^s = 0$ auf jedem in U als Teilmenge enthaltenen Gebiet G mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $\bar{\mathbb{E}} \subseteq G$. Damit ist die Aussage bewiesen (Offenbar wird der Begriff der Umgebung bereits als ein Gebiet aufgefasst, das $\bar{\mathbb{E}}$ beinhaltet). $\square$

Aufgabe 57 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \partial G$ gilt $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$. Zu zeigen ist, dass f nicht holomorph ist. Wir nehmen dazu an, dass f holomorph ist.

- *Fall 1:* Angenommen, f hat keine Nullstelle in G. Dann ist die Funktion $g \equiv 1/f$ holomorph auf G und es gilt für die oben beschriebenen Folgen $(z_n)_n$, dass $\lim_{n\to\infty} |g(z_n)| = 0$. Indem wir die Fortsetzung $\tilde{g} : \bar{G} \to \mathbb{C}$ von g durch $\tilde{g}(z) = 0$ auf ∂G erklären, erhalten wir eine auf G holomorphe Funktion, die zusätzlich auf $G \cup \partial G$ stetig ist. Laut dem Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen auf beschränkten Gebieten nimmt $|\tilde{g}|$ dann sein Maximum auf ∂G an. Damit gilt $0 \leq |\tilde{g}(z)| = |g(z)| \leq 0$ für alle $z \in G$. Damit ist aber $g \equiv 0$ auf G, im Widerspruch zur Funktionsgeigenschaft von f.

- *Fall 2:* Angenommen, f hat unendlich viele Nullstellen in G. Wir bezeichnen die Nullstellenmenge von f in G als $M(\subseteq G)$. Da $M \subseteq \bar{G}$ in einem Kompaktum liegt, können wir eine Folge aus Nullstellen aus M mit paarweise verschiedenen Folgengliedern wählen. Sei $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine solche Folge. Dann hat $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bereits in einem Kompaktum $K \subset G$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine gegen den Grenzwert Z konvergente Teilfolge $(Z_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$: Denn andernfalls wäre $\lim_{l\to\infty} Z_{k_l} = Z \in \partial G$ und wir hätten den Widerspruch zur Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$ für jeden Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \partial G$. Also ist $Z \in G$ und da f dort holomorph, insbesondere also stetig, ist, gilt $f(Z) = \lim_{l\to\infty} f(Z_{k_l}) = 0$, d.h., $Z \in M$. Damit haben wir mit $\{Z_{k_l} | l \in \mathbb{N}\} \cup \{Z\} \subseteq M \subseteq G$ eine in G nichtdiskrete Teilmenge gefunden, sodass dort $f(z) = 0$. Da G ein Gebiet und f laut Annahme holomorph ist, liefert der Identitätssatz $f \equiv 0$ auf G. Damit gilt aber für jeden Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $|f(z_n)| = 0$. Die Bedingung, dass $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$ für jeden Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \partial G$, kann somit nicht erfüllt werden. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung an f.

- *Fall 3:* Wir nehmen nun, dass f lediglich endlich viele Nullstellen in G hat. Ausschließen können wir den Fall, dass f eine Nullstelle der Ordnung unendlich hat. Dann wäre f alut Identitätssatz nämlich identisch 0 auf G, was wiederum der Voraussetzung entspricht, dass $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = 0$ für alle Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \partial G$. Wir können uns also auf die Situation beschränken, dass f lediglich endlich viele Nullstellen hat, die jeweils endliche Ordnung haben. Sei N die Anzahl der paarweise verschiedenen Nullstellen und $\mu_k \in \mathbb{N}$ für $1 \leq k \leq N$ deren Ordnung. Wir definieren

$$p(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - z_k)^{\mu_k}, \tag{732}$$

wobei $\{z_k | 1 \leq k \leq N\}$ die Nullstellenmenge von f bezeichnet. Dann ist $h : G \to \mathbb{C}$ definiert als die holomorphe Fortsetzung von $f/p(z)$ auf G nach Definition nullstellenfrei auf G und dort holomorph. Ferner ist $0 < |p(z)| < \infty$, da alle Nullstellen von f und damit von p in G liegen. Der Fall 1 liefert uns nun, dass es kein h geben kann, dass die Voraussetzung $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \partial G$ gilt $\lim_{n\to\infty} |h(z_n)| = \infty$ erfüllt. Damit ist es dann auch unmöglich, dass f diese Bedingung erfüllt.

Insgesamt haben wir gesehen, dass es kein holomorphes f mit den gewünschten Eigenschaften geben kann. □

Aufgabe 58 (a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z$ und den Weg γ, der sogleich definiert werden wird. f ist eine holomorphe Funktion. γ ist definiert als derjenige Bogen der Ellipse um den Ursprung mit großer Halbachse 2 in Richtung der reellen Achse und kleiner Halbachse von 1 in Richtung der imaginären Achse, der in der oberen komplexen Halbebene liegt und vom Punkt $z_i = 2$ bis zum Punkt $z_f = -2$ verläuft. Zu berechnen ist das Kurvenintegral

$$I = \int_\gamma f(z)dz. \tag{733}$$

Da f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, besitzt f auf $\mathbb{C}$ eine komplexe Stammfunktion, bspw. $F(z) = z^2/2$, denn das so definierte $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und es gilt $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Also finden wir

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F'(z)dz = F(z_f) - F(z_i) = 2 - 2 = 0, \tag{734}$$

nach dem Hauptsatz der Analysis im Falle von komplex differenzierbaren Funktionen, der in den Vorlesungen bewiesen wurde. Das gesuchte Integral hat mithin den Wert $I = 0$.
(b) Wählt man als Integrationsweg γ' nun denjenigen Bogen der in (a) spezifizierten Ellipse, der in der unteren komplexen Halbebene verläuft, kann man das Konturintegral von f längs γ' bspw. aus dem Cauchy'schen Integralsatz bestimmen. Dazu sieht man, dass $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet ist und $\gamma^- * \gamma'$, d.h., die Konkatenation von γ' und dem mit umgekehrter Orientierung durchlaufenen γ, eine (einfach) geschlossene Kurve ist. Der Cauchy'sche Integralsatz liefert nun

$$0 = \int_{\gamma^- * \gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz + \int_{\gamma'} f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz. \tag{735}$$

Damit verschwindet auch das Konturintegral von f längs γ'. □

Aufgabe 59 Mithilfe des Residuensatzes soll das Integral

$$I \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5 - 4\cos(2x)} dx \tag{736}$$

berechnet werden. Da die Integrandenfunktion stetig in x ist und $[0, 2\pi]$ kompakt in $\mathbb{R}$, existiert das angegebene Integral im Riemann'schen Sinne als eigentliches Integral. Wir verwenden die Darstellung der Kosinusfunktion über die komplexe Exponentialfunktion, $\cos(z) = 1/2(\exp(iz) + \exp(-iz))$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und schreiben das Integral um

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{(\exp(ix) + \exp(-ix))}{10 - 4(\exp(2ix) + \exp(-2ix))} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(\exp(2ix) + 1)\exp(ix)}{-4\exp(4ix) + 10\exp(2ix) - 4} dx \\ &= \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(ix)^2 + 1}{\exp(ix)^4 - 5/2\exp(ix)^2 + 1} (i\exp(ix))dx \\ &= \frac{i}{4} \int_{\partial B_1(0)} \frac{z^2 + 1}{z^4 - 5/2z^2 + 1} dz, \end{aligned} \tag{737}$$

indem wir die Transformation $z = \exp(ix)$ angewendet haben, um das Integral in ein Kurvenintegral umzuwandeln. Die Integrandenfunktion $f : \mathbb{C} \setminus (1/f)^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C}, z \mapsto (z^2+1)/(z^4 - 5/2z^2 + 1)$ ist eine rationale Funktion über $\mathbb{C}$. Diese hat Polstellen an den Nullstellen des Nennerpolynoms. Definiere zunächst $w \equiv z^2$ und fasse das Nennerpolynom als Polynom vom Grad 2 in w auf. Dann sind die Nullstellen gegeben durch

$$w \in \{2, 1/2\}. \tag{738}$$

Davon brauchen wir nur den Fall $w = 1/2$ zu betrachten, denn $\partial B_1(0)$ wird unter $z \mapsto z^2 = w$ invariant gelassen, sodass $w = 2$ zu Nullstellen z', z'' mit Betrag > 1 korrespondiert. Diese liegen nicht in dem von $\partial B_1(0)$ berandeten, einfach zusammenhängenden Gebiet $B_1(0)$, sind also nicht einschlägig für unsere Rechnung. Die beiden Nullstellen vom Nennerpolynom von f, die wir berücksichtigen müssen, sind also gegeben durch $z_- = -\sqrt{2}/2$ und $z_+ = \sqrt{2}/2$. Es gilt $|z_+| = \sqrt{2}/2 = |z_-|$, also $z_\pm \in B_1(0)$. Nun wenden wir den Residuensatz an, um das Konturintegral von f zu berechnen. Dabei wird $\partial B_1(0)$ einfach und im positiven Sinne durchlaufen, wie aus der Wahl der Transformation $z = \exp(ix)$ und $x \in [0, 2\pi]$ ersichtlich. Dann ist $n(\partial B_1(0), z_+) = 1 = n(\partial B_1(0), z_-)$ und der Residuensatz liefert

$$I = \frac{2\pi i \cdot i}{4} \left(\frac{z_+^2 + 1}{(z_+^2 - 2)(z_+ + \sqrt{2}/2)} + \frac{z_-^2 + 1}{(z_-^2 - 2)(z_- - \sqrt{2}/2)} \right) = 0. \tag{739}$$

Das gesuchte Integral verschwindet also. □

Aufgabe 60 Gesucht ist das folgende Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx. \tag{740}$$

Das doppelt uneigentliche Riemann-Integral existiert nach einem Vorlesungsresultat, denn der Grad des (reinen) Zählerpolynoms $p_z(x) = 1$ ist 0 und damit um mindestens 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms $p_n(x) = 1 + x^2$, das den Grad 2 hat. Wir stellen fest, dass $\cos(x) = \Re[\exp(ix)]$ nach der Euler'schen Formel, sodass

$$I = \Re\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{1+x^2} dx\right] = \Re\left[\lim_{R\to\infty} \frac{\exp(ix)}{1+x^2}\right]. \tag{741}$$

Das Umschreiben des doppelt uneigentlichen Riemannintegrals kann dabei wegen des Existenz vollzogen werden. Wir definieren nun die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}, \exp(iz)/(1+z^2)$. Sie hat jeweils eine einfache Polstelle bei $z = +i$ und bei $z = -i$. Bezeichnet Γ_R die Konkatenation der beiden Kurven $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it)$, so ist Γ_R für alle $R > 0$ eine einfach geschlossene Kurve, die ein einfach zusammenhängendes Gebiet berandet, nämlich denjenigen Teil eines Kreises um den Ursprung, der in der oberen komplexen Halbebene liegt. In diesem liegt die Polstelle $z = +i$ von f, die von Γ_R einfach im positiven Sinne umlaufen wird, $n(\Gamma_R, i) = 1$, falls hinreichend groß, genauer $R > 1$, ist. Der Residuensatz liefert uns also für $R > 1$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot 1 \cdot \frac{1}{2ie} = \frac{\pi}{e}. \tag{742}$$

Andererseits können wir nutzen, dass die Spuren von γ_1 und γ_2 lediglich eine diskrete Schnittmenge, nämlich $\{-R, R\}$ haben, und so das Konturintegral auseinanderziehen:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz. \tag{743}$$

Das zweite Integral schätzen wir für $R \gg 1$ ab,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| &\leq \int_0^{\pi} \left|\frac{R\exp(it)\exp(-R\sin(t) + iR\cos(t))}{1 + R^2\exp(2it)}\right| dt \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{R\exp(-R\sin(t))}{R^2 - 1} dt.\end{aligned} \tag{744}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\tau \in (0, \pi)$, sodass

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R\exp(-R\sin(\tau))}{R^2 - 1}. \tag{745}$$

Da dann $0 < \sin(\tau) \leq 1$, sehen wir, dass im Grenzfall $R \to \infty$ der Beitrag des Integrals über den Halbkreisbogen, d.h., das Konturintegral von f längs γ_2 verschwindet. Das liefert

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz + \overbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz}^{=0}, \tag{746}$$

und nach Einsetzen der Parametrisierung γ_1,

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{1 + x^2} dx. \tag{747}$$

Realteilbildung liefert nun das gewünschte Integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{e}. \tag{748}$$

Imaginärteilbildung zeigt, dass das Integral mit der Sinusfunktion anstelle der Kosinusfunktion den Wert 0 annimmt. $\square$

Aufgabe 61 Gegeben sei die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x/(1 + x^3)$.
(a) Zu zeigen ist, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^3} dx \tag{749}$$

existiert. Wir betrachten dazu ohne Einschränkung für ein beliebiges $R > 1 > 0$ das Integral

$$I(R) = \int_0^R \frac{x}{1 + x^3} dx = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx + \int_1^R \frac{x}{1 + x^3} dx. \tag{750}$$

Die Funktion f ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich, deswegen existiert das (eigentliche) Riemann-Integral über $[0,1]$ und $[0,R]$ (für endliches R) jeweils. Wir bemerken ferner, dass auf $[1,R]$ sogar gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1,R]$. Daher können wir die Existenz des zweiten Integrals im Grenzfall $R \to \infty$ beweisen, indem wir zeigen, dass der Grenzwert für eine (leichtere) Majorante existiert. Hierzu betrachten wir die Funktion $h : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $h(x) = 1/x^2$. Da $1+x^2 \geq x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$ auf dem kompletten Intervall $[1,\infty)$, finden wir $0 \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in (1,\infty)$. Wegen der (positiven) Monotonie des Integraloperators gilt dann auch für alle $R > 1$,

$$0 \leq \int_1^R \frac{x}{1+x^3} dx \leq \int_1^R \frac{1}{x^2} dx = 1 - R^{-1}. \tag{751}$$

Damit ist im Grenzfall $R \to \infty$,

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{x}{1+x^3} dx \leq 1. \tag{752}$$

Wählen wir nun eine beliebige Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (1,\infty)$ mit $R_n \to \infty$ für $n \to \infty$, so finden wir für alle $\epsilon > 0$, dass

$$\left| \int_1^{R_n} \frac{x}{1+x^3} dx - \int_1^{R_m} \frac{x}{1+x^3} dx \right| \leq |R_n^{-1} - R_m^{-1}| < 1/N < \epsilon, \tag{753}$$

wenn wir $n, m > N'$ fordern, wobei $R_n, R_m > N$ wegen der uneigentlichen Konvergenz der Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit ist gezeigt, dass die Folge an Integralwerten eine Cauchy-Folge ist. Da $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen bzgl. der Standardnormtopologie ist und ferner $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist auch $[0,1]$ vollständig. Damit konvergiert die Folge der Integrale gegen einen Grenzwert. Für je zwei Folgen $(R_n)_n, (R'_n)_n$ ist dieser auch eindeutig, denn wenn dem nicht so wäre, ist durch alternierendes Durchlaufe den beiden Folge eine Folge von oberen Integralgrenzen konstruiert, die uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert, aber zwei Grenzwerte für das Integral (s.o.) herbeiführt. Das stünde im Widerspruch zur Cauchy-Eigenschaft, die die Eindeutigkeit des Grenzwerts der wie beschrieben konstruierten Folge impliziert. Da nun

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{x}{1+x^3} dx = \int_1^\infty \frac{x}{1+x^3} dx \tag{754}$$

existiert, liefern die Rechenregeln für Grenzwerte unmittelbar die Existenz des gesuchten Integrals

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^3} dx + \int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}. \tag{755}$$

Damit ist der geforderte Nachweis erbracht.
(b) Das Integral berechnen wir nun konkret, indem wir beachten, dass $g : \mathbb{C} \setminus \{\zeta_6, \zeta_6^5, -1\} \to \mathbb{C}, z \mapsto z/(1+z^3)$ mit $\zeta_6 = \exp(\pi i/3)$ holomorph ist. Die Polstellen sind gerade die Nullstellen des Polynoms mit reellen Koeffizienten im Nenner der rationalen Funktion, und einfach, wie man leicht nachrechnet. Wir wählen nun für

$R > 1$ den Kreissektor $K(R)$, der durch die Punkte $0, R, R\exp(2\pi i/3)$ definiert wird. In diesem liegt nur die Polstelle $\zeta_6 = \exp(\pi i/3)$ und $K(R)$ ist für alle $R > 1$ einfach zusammenhängend. Auf $\partial K(R)$ liegt für alle $R > 1$ ferner keine Nullstelle von g. Wir definieren nun noch eine Parametrisierung von $\partial K(R)$ durch $\gamma \equiv \gamma_3 * \gamma_2 * \gamma_1$, wobei

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t \\ \gamma_2 &: [0, 2\pi/3] \to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it) \\ \gamma_3 &: [0, R] \to \mathbb{R}, t \mapsto (R-t)\exp(2\pi i/3). \end{aligned} \tag{756}$$

Es ist leicht anhand der Definition zu sehen, dass so tatsächlich eine Parametrisierung von $\partial K(R)$ erzielt wurde und $\partial K(R)$ einfach im positiven Sinne, bei 0 startend und endend, durchlaufen wird. Daher ist bereits $n(\gamma, \zeta_6) = +1$. Nun wenden wir für γ und g den Residuensatz an,

$$\begin{aligned} \oint_\gamma g(z)dz &= 2\pi i \cdot 1 \cdot \operatorname{Res}(g, \exp(\pi i/3)) \\ &= 2\pi i \frac{\exp(\pi i/3)}{(\exp(\pi i/3) - \exp(3\pi i/3))(\exp(\pi i/3) - \exp(5\pi i/3))}, \end{aligned} \tag{757}$$

wobei wir aus $\operatorname{Res}(g, \exp(\pi i/3)) = \lim_{z\to\exp(\pi i/3)}[g(z)(z - \exp(\pi i/3))]$ das Residuum berechnet hatten. Das Kurven-Integral können wir auch aufsplitten

$$\begin{aligned} \oint_\gamma g(z)dz &= \int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz + \int_{\gamma_3} g(z)dz \\ &= \int_0^R \frac{x}{1+x^3}dx + \int_0^{2\pi/3} \frac{iR^2\exp(2it)}{1+R^3\exp(3it)} \\ &\quad - \exp(4\pi i/3)\int_0^R \frac{(R-t)}{1+(R-t)^3}dt \\ &= \int_0^R \frac{x}{1+x^3}dx + \int_0^{2\pi/3} \frac{iR^2\exp(2it)}{1+R^3\exp(3it)} \\ &\quad - \exp(4\pi i/3)\int_0^R \frac{x}{1+x^3}dx, \end{aligned} \tag{758}$$

wobei wir auf $x = (R - t)$ transformiert haben und dann die Orientierung des Integrationsintervalls vertauscht haben (dritter Beitrag). Damit sehen wir

$$\oint_\gamma g(z)dz = (1 - \exp(2\pi i/3))\int_0^R f(x)dx + \int_0^{2\pi/3} \frac{iR^2\exp(2it)}{1+R^3\exp(3it)}. \tag{759}$$

Wir zeigen, dass das zweite Integral in der letzten Gleichung für $R \to \infty$ verschwindet und schätzen für hinreichend großes $R > 1$ ab,

$$\left|\int_0^R \int_0^{2\pi/3} \frac{iR^2\exp(2it)}{1+R^3\exp(3it)}\right| \le \int_0^R \left|\frac{R^2}{R^3\exp(3it)+1}\right| dt \le \frac{R^2}{R^2-1}\frac{2\pi}{3} \to 0, \tag{760}$$

sowie $R \to \infty$. Damit finden wir durch Gleichsetzen der beiden Ergebnisse für das komplexe Konturintegral von g längs γ und Grenzübergang,

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi i \exp(\pi i/3)}{(\exp(\pi i/3) - \exp(3\pi i/3))(\exp(\pi i/3) - \exp(5\pi i/3))}\\&= (1 - \exp(2\pi i/3)) \int_0^\infty f(x)dx.\end{aligned} \tag{761}$$

Das können wir zunächst durch Division vereinfachen,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)dx &= \frac{2\pi i}{\exp(\pi i/3) - \exp(5\pi i/3)}\\&= \frac{2\pi i}{\exp(\pi i/3) - \exp(-\pi i/3)}\\&= \frac{2\pi i}{2i\Im[\exp(\pi i/3)]}\\&= \frac{\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned} \tag{762}$$

Damit finden wir

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}. \tag{763}$$

□

Aufgabe 62 Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zu zeigen ist, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}. \tag{764}$$

Da der Grad des Nennerpolynoms $2n$, der Grad des Zählerpolynoms 0 ist, liefert uns ein Vorlesungsresultat zur Existenz uneigentlicher Riemann-Integrale rationaler Funktionen die Existenz des Integrals links. Rechnerisch zeigen wir die Gleichheit. Wir stellen fest, dass $x^{2n} = -1$ die komplexen Lösungen $x_k \equiv \exp(\pi i/(2n) + 2\pi ik/(2n))$ mit $k \in \{0, 1, 2, ..., 2n-1\}$ hat. Für $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ liegen diese in der oberen komplexen Halbebene, und für alle zulässigen k auf $\partial\mathbb{E}$. Auf der reellen Achse liegt keine der Lösungen von $x^{2n} = -1$. Sei $R > 1$. Wir definieren nun $\gamma = \gamma_3 * \gamma_2 * \gamma_1$, wobei

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, R] &\to \mathbb{C}, t \mapsto t\\ \gamma_2 : [0, 2\pi/(2n)] &\to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it)\\ \gamma_3 : [0, R] &\to \mathbb{C}, t \mapsto (R-t)\exp(\pi i/n).\end{aligned} \tag{765}$$

Das ist die Randkurve eines Kreissektors, der durch die Punkte $0, R, R\exp(\pi i/n)$ mit dem Ursprung 0 als Mittelpunkt fixiert wird. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{x_k | 0 \le k \le 2n-1\} \to \mathbb{C}, x \mapsto (1+x^{2n})^{-1}$ ist holomorph und hat einfache Polstellen bei $x = x_k$.

Keine Polstelle liegt auf Spur(γ) und γ berandet ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Mit dem Residuensatz finden wir

$$\oint_\gamma \frac{dz}{1+z^{2n}} = \frac{2\pi i}{\prod_{k=1}^{2n-1}(x_0 - x_k)}, \tag{766}$$

denn x_0 ist die einzige Nullstelle des Nennerpolynoms in dem von γ berandeten Kreissektor. Das Residuum haben wir dabei mit der aus den Vorlesungen bekannten Formel $\mathrm{Res}((1+z^{2n})^{-1}, x_0) = \lim_{z\to x_0}[(1+z^{2n})^{-1}(z-x_0)]$ berechnet und dabei den Nenner nach dem Fundamentalsatz der Algebra faktorisiert. Wir zerlegen nun die Kontur γ,

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{dz}{1+z^{2n}} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{1+z^{2n}} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1+z^{2n}} + \int_{\gamma_3} \frac{dz}{1+z^{2n}} \\
&= \int_0^R \frac{dt}{1+t^{2n}} + \int_0^{\pi/n} \frac{iR\exp(it)}{1+R^{2n}\exp(2int)}dt \\
&\quad - \exp(\pi i/n) \int_0^R \frac{dt}{1+(R-t)^{2n}} \\
&= \int_0^R \frac{dx}{1+x^{2n}} - \exp(\pi i/n) \int_0^R \frac{dx}{1+x^{2n}} \\
&\quad + \int_0^{\pi/n} \frac{iR\exp(it)}{1+R^{2n}\exp(2nit)}dt \\
&\equiv (1-\exp(\pi i/n)) \int_0^R \frac{dx}{1+x^{2n}} + I(R).
\end{aligned} \tag{767}$$

Wir schätzen nun $I(R)$ für $R > 1$ ab,

$$\begin{aligned}
|I(R)| &= \left| \int_0^{\pi/n} \frac{iR\exp(it)}{1+R^{2n}\exp(2nit)}dt \right| \\
&\leq \int_0^{\pi/n} \left| \frac{iR\exp(it)}{1+R^{2n}\exp(2nit)} \right| dt \\
&\leq \int_0^{\pi/n} \frac{R}{R^{2n}-1}dt \\
&= \frac{\pi}{n}\frac{R}{R^{2n}-1} \\
&\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned} \tag{768}$$

denn $n \geq 1$. Mit den zwei Darstellung für das komplexe Konturintegral finden wir nach Grenzübergang $R \to \infty$, dass

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi i}{\prod_{k=1}^{2n-1}(x_0 - x_k)} &= (1-\exp(\pi i/n)) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} \\
\Leftrightarrow \frac{2\pi i}{\prod_{k=1}^{2n-1}(x_0 - x_k)} &= -2i\exp(\pi i/(2n))\sin(\pi/(2n)) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} \\
&= \frac{2\pi i}{\exp(\pi i(2n-1)/(2n)) \prod_{k=1}^{2n-1}(1-\exp(\pi ik/n))}.
\end{aligned} \tag{769}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}
2i\sin(\pi/(2n))\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} &= \frac{2\pi i}{\prod_{k=1}^{2n-1}(1-\exp(\pi ik/n))} \\
&= \frac{2\pi i}{2\prod_{k=1}^{n-1}(1-\exp(-\pi ik/n))(1-\exp(\pi ik/n))} \\
&= \frac{\pi i}{\prod_{k=1}^{n-1}(2-2\cos(\pi k/n))}
\end{aligned} \tag{770}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2\sin(\pi/(2n))\prod_{k=1}^{n-1}(2-2\cos(\pi k/n))} \tag{771}$$

Dies ist eine Darstellung für das Integral – Wir wenden nun eine andere Strategie an, um die Aussaqe zu beweisen. Dazu beachten wir, dass $x_0^{2n} = -1 \Leftrightarrow 1 + x_0^{2n} = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}((1+z^{2n})^{-1}, x_0) &= \lim_{z\to x_0}\left[\frac{z-x_0}{(1+z^{2n})-(1+x_0^{2n})}\right] \\
&= \left(\frac{(1+z^{2n})-(1+x_0^{2n})}{z-x_0}\right)^{-1} \\
&= \left.\frac{d(1+z^{2n})}{dz}\right|_{z=x_0} \\
&= \left.\frac{1}{2nz^{2n-1}}\right|_{z=x_0} \\
&= \frac{1}{2n\exp((2n-1)\pi/(2n))}.
\end{aligned} \tag{772}$$

Verwenden wir diese Darstellung des Residuums, dann finden wir

$$\begin{aligned}
(1-\exp(\pi i/n))\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} &= \frac{2\pi i}{2n\exp((2n-1)\pi/(2n))} \\
\Leftrightarrow -2i\sin(\pi/(2n))\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} &= \frac{\pi i}{-n\exp(-\pi/(2n))} \\
\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{n\sin(\pi/(2n))}.
\end{aligned} \tag{773}$$

Indem wir verwenden, dass der Integrand symmetrisch ist, erhalten wir

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/(2n))}. \tag{774}$$

Zudem erhalten wir anhand der beiden Darstellung des Integrals die interessante Identität, dass jede natürliche Zahl n dargestellt werden kann als

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right). \tag{775}$$

Letzteres war nicht in der Aufgabenstellung gefordert. $\square$

Aufgabe 63 Gesucht ist das Integral

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^4+5x^2+4}dx. \tag{776}$$

Wegen $(x^2+4)(x^2+1)=(x^4+5x^2+4)$ ist das Nennerpolynom nullstellenfrei auf der reellen Achse. Da der Grad des Zählerpolynoms um zwei geringer ist als der des Nennerpolynoms existiert nach einem Vorlesungsresultat der reellen Analysis das doppelt uneigentliche Riemann-Integral. Wir berechnen dieses indem wir den Weg $\gamma=\gamma_2*\gamma_1$ definieren als Konkatenation von

$$\begin{aligned}\gamma_1:[-R,R]\to\mathbb{C}&,t\mapsto t\\ \gamma_2:[0,\pi]\to\mathbb{C}&,t\mapsto R\exp(it),\end{aligned} \tag{777}$$

und den Residuensatz auf die holomorphe Funktion $f:\mathbb{C}\setminus\{\pm i,\pm 2i\}, z\mapsto(z^2-2z+5)/(z^4+5z^2+4)$ anwenden. Spur(γ) berandet $M\equiv D_R^2(0_{\mathbb{C}})\cap\{z\in\mathbb{C}|\Im[z]>0\}$ und γ durchläuft ∂M einfach und im positiven Sinne. Dabei sind lediglich die Polstellen i und $2i$ in dem von γ berandeten Elementargebiet enthalten und auf Spur(γ) liegen keine Singularitäten von f. Insbesondere ist $n(\gamma,i)=1=n(\gamma,2i)$. Definiere $p:\mathbb{C}\setminus\{\pm i,\pm 2i\}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^4+5z^2+4$. Wir berechnen die beiden Residuen durch

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,i)&=\lim_{z\to i}\left[\frac{(z^2-2z+5)(z-i)}{p(z)-p(i)}\right]\\ &=(4-2i)\left(\lim_{z\to i}\left(\frac{p(z)-p(i)}{z-i}\right)\right)^{-1}\\ &=\frac{4-2i}{p'(i)}\\ &=\frac{4-2i}{-4i+10i}\\ &=\frac{-12-24i}{36}\\ &=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i,\end{aligned} \tag{778}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,2i)&=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{(z^2-2z+5)(z-2i)}{p(z)-p(2i)}\right]\\ &=(1-4i)\left(\lim_{z\to 2i}\left(\frac{p(z)-p(2i)}{z-2i}\right)\right)^{-1}\\ &=\frac{1-4i}{p'(2i)}\\ &=\frac{1-4i}{-32i+20i}\\ &=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}i.\end{aligned} \tag{779}$$

Damit finden wir laut Residuensatz für $R>2$

$$\oint_\gamma f(z)dz=2\pi i\left(1\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}i\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i\right)\right)=\frac{7\pi}{6}. \tag{780}$$

Die Kontur γ können wir in Beiträge von γ_1, γ_2 zerlegen,

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\
&+ \int_0^\pi \frac{iR\exp(it)(R^2\exp(2it) - 2R\exp(it) + 5)}{(R^2\exp(2it) + 1)(R^2\exp(2it) + 4)} dt.
\end{aligned} \tag{781}$$

Das zweite Integral können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\pi \frac{iR\exp(it)(R^2\exp(2it) - 2R\exp(it) + 5)}{(R^2\exp(2it) + 1)(R^2\exp(2it) + 4)} dt \right| \\
&\leq \int_0^\pi \left| \frac{iR\exp(it)(R^2\exp(2it) - 2R\exp(it) + 5)}{(R^2\exp(2it) + 1)(R^2\exp(2it) + 4)} \right| dt \\
&\leq \frac{\pi R(R^2 + 2R + 5)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} \\
&\xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned} \tag{782}$$

Hierbei haben wir im ersten Schritt die Dreiecksungleichung für Integrale bemüht. Im zweiten Schritt haben wir die gewöhnliche Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$ verwendet, um die t-Dependenzen des Zählers im Absolutbetrag zu vereinfachen. Den Nenner haben wir für $R > 2$ unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$ abgeschätzt. Für die Grenzwertbildung haben wir bemerkt, dass das Polynom in R im Nenner einen um eins größeren Grad hat als das Zählerpolynom in R. Da das doppelt uneigentliche Riemann-Integral existiert, ist der Grenzwert eindeutig. Indem wir also die Grenzwertbildung $R \to \infty$ im Spezialfall der symmetrischen Integrationsgrenzen vollziehen, resultiert

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx &= \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{R} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \right] \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{R} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \right. \\
&\left. + \int_0^\pi \frac{iR\exp(it)(R^2\exp(2it) - 2R\exp(it) + 5)}{(R^2\exp(2it) + 1)(R^2\exp(2it) + 4)} dt \right] \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{7\pi}{6} \right] \\
&= \frac{7\pi}{6}.
\end{aligned} \tag{783}$$

Somit haben wir für den Wert I des gesuchten Integrals $I = 7\pi/6$ gefunden. $\square$

Aufgabe 64 (F12T1A3) Sei $U = B_{1/2}(0)$. Zu zeigen ist, dass einen holomorphen Logarithmus $h : U \to \mathbb{C}$ von $f : U \to \mathbb{C}, z \mapsto z^{10} + z^5 + 1$ gibt. Gesucht ist also ein wie beschrieben geartetes h, sodass für alle $z \in U$ gilt

$$\exp(h(z)) = z^{10} + z^5 + 1. \tag{784}$$

Da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph und nullstellenfrei ist, überprüfen wir zunächst, dass auch $f(z)$ zumindest auf U nullstellenfrei ist. Dazu setzen wir $w = z^5$ und lösen $w^2 + w + 1 = 0$ nach w auf. Das liefert nach quadratischer Ergänzung $w_\pm = -0.5 \pm 0.5\sqrt{1-4} = -0.5 \pm 0.5\sqrt{3}i$. Wegen $|w_\pm| = 1$ ist auch $|z| = \sqrt[5]{|w|} = 1$ bzgl. der reellen Wurzelfunktion. Damit gilt für eine beliebige Nullstelle z von $f(z)$, dass $z \in \partial\mathbb{E}$, sodass insbesondere $f(z)$ in U keine Nullstellen besitzt. Um nun die Existenz von h nachzuweisen, differenzieren wir die definierende Gleichung für h nach z. Da h per Anforderung holomorph auf U sein soll, erhalten wir die Differentialgleichung

$$h'(z) = \frac{10z^9 + 5z^4}{z^{10} + z^4 + 1}. \tag{785}$$

Die rechte Seite ist als rationale Funktion mit auf U nullstellenfreiem Nennerpolynom auf U holomorph. Da U als Ball in der komplexen Ebene ferner ein Elementargebiet ist, also einfach zusammenhängendes Gebiet, existiert zu dem nach dem ebene Gesagten holomorphen $h'(z)$ eine holomorphe Stammfunktion $h(z)$. Per Konstruktion erfüllt diese die Eigenschaften eines holomorphen Logarithmus von f, sodass wir die Existenz eines für die Aufgabe tauglichen h verifiziert haben. $\square$

Aufgabe 65 (F19T1A5) (a) Die Reihenentwicklung von f hat den Konvergenzradius $\sqrt{2}$. Nach Voraussetzung ist f auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph, sodass die Laurentreihe von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1 + i$ nur einen Nebenteil hat, d.h., effektiv eine Taylor-Reihe ist. Diese hat dann mindestens den Konvergenzradius $\sqrt{2}$. Wir müssen nun den Fall ausschließen, dass f bei $z = 0$ eine hebbare Singularität hat. Dann wäre der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f nämlich ∞. Wir nehmen an, dass $z = 0$ eine hebbare Singularität von f ist. Dann ist nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz $|f|(z)$ für alle z in einer Umgebung U von $z = 0$ beschränkt, d.h., es gibt ein $M > 0$, sodass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in U$. Sei also $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $B_{1/n}(0) \subseteq U$. Da aus $\mathbb{N} \ni m > n$ bereits $B_{1/m}(0) \subseteq B_{1/n}(0)$ folgt, stellen wir fest, dass $|f(1/m)| = m \geq n$ für alle $m \geq n$ gilt. Wir setzen nun $n \equiv \lceil M \rceil$ und finden, dass $f(m) = m > n \geq M$ für alle $n > m$ gilt, im Widerspruch dazu, dass f auf U durch M (absolut) beschränkt ist. Damit war die Annahme, $z = 0$ wäre hebbare Singularität von f falsch, und $z = 0$ ist eine isolierte Singularität, die entweder eine Polstelle ist oder eine wesentliche Singularität. In jedem Fall kann die Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = 1+i$ nun keinen Konvergenzradius von $> \sqrt{2}$ haben, denn in dem Fall lieferte der Identitätssatz, angewendet auf ein Gebiet $G \supsetneq B_{\sqrt{2}}(1+i)$, also $0 \in G$, dass f und die auf G holomorphe Potenzreihen identisch wären. Insbesondere wäre dann f in $z = 0$ holomorph fortsetzbar, was wir aber soeben durch die Untersuchung des Singularitätentyps von f bei $z = 0$ ausgeschlossen haben. Also ist der gesuchte Konvergenzradius tatsächlich $\sqrt{2}$.

(b) Sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und seien $a, b \in G$ mit $a \neq b$. Zu zeigen ist die Existenz einer biholomorphen Abbildung $f : G \to G$ mit $f(a) = b$. Hierzu bemühen wir den Riemann'schen Abbildungssatz, der uns die (eindeutige) Existenz einer bijektiven biholomorphen Abbildung $\psi_1 : G \to \mathbb{E}$ gilt, die die zusätzliche Eigenschaft $\psi(a) = 0$ hat. Entsprechend liefert der Riemann'sche Abbildungssatz, die Existenz einer bijektiven biholomorphen Abbildung $\psi_2 : G \to \mathbb{E}$ mit $\psi_2(b) = 0$. Da ψ_2 bijektiv und biholomorph ist, existiert ψ_2^{-1} und ist überdies

selbst bijektiv und biholomorph. Indem wir nun $f \equiv \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ setzen, haben wir eine bijektive biholomorphe Abbildung $f : G \to G$ gefunden, die die Bedingung $f(a) = b$ erfüllt.
(c) Zu zeigen ist, dass es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\partial\mathbb{E}) = \partial\mathbb{E}$ und $f(z) \neq 0$ auf $\mathbb{C}$ gibt. Nach dem Maximusprinzip auf beschränkten Gebieten gilt $|f|_{\mathbb{E}}(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Nach dem Satz von der Gebietstreue wissen wir, dass $f_0 : \mathbb{E} \to \bar{\mathbb{E}}$ die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ auf ein Gebiet abbildet. Somit gibt es auch für $f|_{\bar{\mathbb{E}}} : \bar{\mathbb{E}} \to \bar{\mathbb{E}}$ mindestens ein $z_0 \in \mathbb{E}$, sodass $|f|(z_0) < 1$. Nach dem reellen Maximums- & Minimumsprinzip wissen wir, dass es in $\bar{\mathbb{E}}$ ein c gibt, sodass $|f|(c) = \min_{z\in\bar{\mathbb{E}}}\{|f|(z)\}$. Wegen der obenstehenden Ausführungen auf Basis des Satzes von der Gebietstreue gilt sogar $c \in \mathbb{E}$. Nach dem komplexen Minimumsprinzip gilt dann entweder $f(c) = 0$ oder aber f ist konstant. Im letzteren Fall wäre aber f auch auf $\partial\mathbb{E}$ konstant, was der Gleichheit $f(\partial\mathbb{E}) = \partial\mathbb{E}$ widerspricht. Also kann der zweite Fall, den das komplexe Minimumsprinzip prinzipiell zulässt, unter den hier betrachteten Voraussetzungen nicht auftreten. Damit wissen wir bereits, dass es ein $c \in \mathbb{E}$ gibt, sodass $f(z) = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass jede holomorphe Funktion mit den geforderten Eigenschaften bereits eine Nullstelle in $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{C}$ hat, bzw., dass es keine nullstellenfreie ganze Funktion f mit $f(\partial\mathbb{E}) = \partial\mathbb{E}$ gibt. $\square$

Aufgabe 66 (F19T2A2) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = 4z + z^2 + e^z$. (a) Wir sollen zuerst nachweisen, dass f genau eine einfache Nullstelle in $\bar{\mathbb{E}}$ hat. Hierzu definieren wir die beiden auf $\mathbb{C} \supset \mathbb{E}$ holomorphen Funktionen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $p(z) = 4z$ und $q(z) = z^2 + \exp(z)$. Offenbar gilt auf $\partial\mathbb{E}$ $|p(z)| = 4 > e + 1 \geq |q(z)|$, sodass f laut dem Satz von Rouché erstens auf $\partial\mathbb{E}$ keine Nullstelle hat und zweitens die mit Vielfachheiten gezählte Nullstellenzahl von f und p auf $\mathbb{E}$ übereinstimmen. Da p genau eine einfache Nullstelle (als Polynom vom Grad 1), nämlich $z = 0$, hat, hat auch f genau eine Nullstelle, die dann nur Vielfachheit 1 haben kann. Wir bezeichnen diese Nullstelle mit z_0.
(b) Wir sollen nun zeigen, dass es keinen komplexen Logarithmus l von f auf $\mathbb{E}$ gibt. Angenommen, l wäre ein komplexer Logarithmus von f auf $\mathbb{E}$. Dann gilt $\exp(l(z)) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Da aber $f(z_0) = 0$, müsste $\exp(l(z_0)) = 0$, was unmöglich ist, da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wie aus den Vorlesungen zur Funktionentheorie bekannt ist. Damit war die Annahme, es gäbe einen holomorphen Logarithmus von f auf $\mathbb{E}$ falsch. Somit gibt es keinen holomorphen Logarithmus von f auf $\mathbb{E}$.
(c) Wir sollen nun zeigen, dass es keine holomorphen Zweig w der dritten Wurzel von f auf $\mathbb{E}$ gibt. Angenommen, es ist w ein holomorpher Zweig der dritten Wurzel von f auf $\mathbb{E}$. Dann gilt $(w(z))^3 = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Nun gilt $3(w(z))^2 w'(z) = f'(z)$, was wir zu $3w'(z)/w(z) = f'(z)/f(z)$ umformen können, wenn wir $z = z_0$ außer Acht lassen, uns also auf $\mathbb{E} \setminus \{z_0\}$ beschränken. Wäre die linke Seite nun auch für $z = z_0$ holomorph, so hätten wir auch einen holomorphen Logarithmus l von f gefunden auf $\mathbb{E}$, denn dessen komplexe Ableitung erfüllt $l'(z) = f'(z)/f(z)$ auf $\mathbb{E}$. Das widerspricht aber dem Ergebnis aus Teil (b), in dem wir festgestellt haben, dass f keine holomorphen Logarithmus auf $\mathbb{E}$ erlaubt. Somit war die Annahme, es gäbe einen holomorphen Zweig der dritten Wurzel von f auf $\mathbb{E}$, falsch. Eine holomorpher Zweig der dritten Wurzel von f auf $\mathbb{E}$ existiert demnach nicht. $\square$

Aufgabe 67 (F19T1A1) (a) Sei $P(z) = 2019z^{2019} + \sum_{k=0}^{2018} a_k z^k$, wobei $|a_k| < 1$ für alle $k \in \{0, 1, 2, ..., 2018\}$. Wir bestimmen alle Nullstellen von P in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$. Zunächst sehen wir, dass für alle $z \in \partial\mathbb{E}$, d.h., für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ infolge der Dreiecksungleichung für den komplexen Absolutbetrag gilt,

$$|2019z^{2019}| = 2019|z|^{2019} = 2019, \tag{786}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{2018} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{2018} |a_k| < 2019 \cdot 1 = 2019 \tag{787}$$

Da P und $p(z) = 2019 \cdot z^{2019}$ als Polynome auf dem Gebiet $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen sind und gilt $|p(z)| > |P(z) - p(z)|$ auf $\partial\mathbb{E}$ liefert der Satz von Rouché, dass erstens P und p auf $\partial\mathbb{E}$ keine Nullstellen haben und dass zweitens P und p in der offenen Kreisscheibe genau gleich viele, mit Vielfachheiten gezählte Nullstellen haben. Da $p(z)$ die 2019-fache Nullstelle $z = 0$ hat, hat auch P insgesamt 2019 Nullstellen in $\mathbb{E} \ni 0$.
(b) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf einem Gebiet holomorphe Funktion, P eine auf U meromorphe und nicht-konstante Funktion, die höchstens Polstellen als isolierte Singularitäten hat, und $\mathcal{D} \subseteq U$ ein Gebiet, sodass P auf der Spur Spur(γ) eines ganz in U verlaufenden, nullhomologen Wegs weder Null- noch Polstellen hat. Wir bezeichnen das von γ, ohne Einschränkung im positiven Sinne, berandete einfach zusammenhängende Gebiet mit $K \subseteq U$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \sum_{a \in N[P] \cap K} n(\gamma, a) w(P, a) f(a), \tag{788}$$

wobei $w(P, a)$ die Ordnung der Nullstellen (> 0) bzw. der Polstelle (< 0) angibt. Für den Spezialfall, dass P ein Polynom N Nullstellen in K hat, dass $f \equiv 1$, und γ den Rand ∂K einfach durchläuft finden wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \sum_{a \in N[P] \cap K} w(f, a) = N. \tag{789}$$

Es werden die Nullstellen von P bzw. dessen Polstellen im allgemeinen Fall jeweils mit Vielfachheiten gezählt.
(c) Wir zeigen nun, dass für das P aus (a) gilt

$$\exp\left(\frac{1}{673} \int_{\partial\mathbb{E}} \frac{P'(z)}{P(z)} dz\right) = 1. \tag{790}$$

Nach dem Argumentpinzip, angewendet auf das Polynom P aus (a) und das Gebiet $\mathbb{E}$ finden wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{E}} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 2019, \tag{791}$$

denn wir haben bereits in Teil (a) festgestellt, dass P genau 2019 mit Vielfachheiten gezählte Nullstellen in $\mathbb{E}$ hat. Da $2019 = 3 \cdot 673$ finden wir

$$\frac{1}{673} \int_{\partial\mathbb{E}} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 3 \cdot 2\pi i, \tag{792}$$

und somit

$$\exp\left(\frac{1}{673}\int_{\partial\mathbb{E}}\frac{P'(z)}{P(z)}dz\right) = \exp(3\cdot 2\pi i) = 1. \tag{793}$$

Damit ist Behauptung bewiesen. □

Aufgabe 68 (F18T2A1) (a) Wir definieren die beiden Gebiete

$$\Omega_1 \equiv \{z\in\mathbb{C}|\Re[z]>0,\, \Im[z]>0\} \tag{794}$$
$$\Omega_2 \equiv \{z\in\mathbb{C}|\Re[z]\in\mathbb{R},\, \Im[z]\in(0,1)\}. \tag{795}$$

Zu zeigen ist, dass eine biholomorphe Abbildung $f:\Omega_1\to\Omega_2$ existiert. Seien dazu $a\in\Omega_1$ und $b\in\Omega_2$ beliebig. Offenbar sind Ω_1,Ω_2 nicht nur Gebiete, sondern sogar einfach zusammenhängende Gebiete. Ferner gilt $\Omega_1\neq\mathbb{C}$ und $\Omega_2\neq\mathbb{C}$. Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz existiert daher jeweils eine biholomorphe Abbildung $f_1:\Omega_1\to\mathbb{E}$ und $f_2:\Omega_2\to\mathbb{E}$. Da mit f_2 auch f_2^{-1} biholomorph ist, und ebenso für f_1, ist $f\equiv f_1^{-1}\circ f_2:\Omega_2\to\Omega_1$ eine Abbildung und ferner selbst biholomorph. Legt man fest, dass $f_1(a)=0=f_2(b)$, so ist f eindeutig festgelegt. Wir geben eine solche Abbildung nun konkret an.

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp(\pi/2z)\\ &= \exp(\pi/2\Re[z])\exp(i\pi/2\Im[z])\\ &= \exp(\pi/2\Re[z])\cos(\pi/2\Im[z]) + i\exp(\pi/2\Re[z])\sin(\pi/2\Im[z]), \end{aligned} \tag{796}$$

erfüllt $\Re[f(z)]>0$ und $\Im[f(z)]>0$ wegen der Positivität der Exponentialfunktion auf der reellen Achsen und der Positivität der Sinus- und Cosinusfunktion auf $(0,\pi/2)$. Zudem ist sie als Einschränkung einer Verknüpfung als linearer Funktion und Exponentialfunktion auf Ω_2 holomorph. Um zu zeigen, dass f biholomorph ist, reicht es nun laut Vorlesung aus, zu zeigen, dass f bijektiv ist. In der Tat ist Ω_1 ein einfach zusammenhängendes Gebiet und es gilt $0\notin\Omega_1$. Damit sind die Voraussetzungen für die Existenz eines holomorphen Zweiges des Logarithmus erfüllt und wir bezeichnen mit log den Hauptzweig des Logarithmus. Es gilt nun

$$g:\Omega_1\to\Omega_2, w\mapsto \frac{2}{\pi}\log(w), \tag{797}$$

und man sieht leicht, dass diese Abbildung wohldefiniert ist, d.h., nach Ω_2 abbildet. Da $(f\circ g)(z)=\mathrm{id}_{\Omega_1}(z)$ für alle $z\in\Omega_1$ und $(g\circ f)(z)=\mathrm{id}_{\Omega_2}(z)$ für alle $z\in\Omega_2$, ist g also tatsächlich die Umkehrfunktion für f. Aus dem oben Gesagten bzw. aus der Holomorphie des Zweiges des Logarithmus folgt nun, dass g ebenfalls holomorph ist. Damit ist bewiesen, dass f biholomorph ist.
(b) Gegeben sei das Polynom $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^{87}+36z^{57}+71z^4+z^3-z+1$. P ist als Polynomfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Wir wollen die mit Vielfachheiten gezählte Anzahl der Nullstellen von P auf dem Kreisring $K_{1,2}(0)\equiv\{z\in\mathbb{C}|1<|z|<2\}$ bestimmen. Wir definieren hierzu die folgenden Polynome

$$p_1:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto 71z^4 \;\&\; q_1:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^{87}+36z^{57}+z^3-z+1, \tag{798}$$
$$p_2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^{87} \;\&\; q_2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto 36z^{57}+71z^4+z^3-z+1. \tag{799}$$

Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, dass $z \in \partial K_{1,2}(0)$ und

$$|p_1(z)| = 71|z|^4 = 71, \tag{800}$$

$$\begin{aligned} |q_1(z)| &= |z^{87} + 36z^{57} + z^3 - z + 1| \\ &\leq |z|^{87} + 36|z|^{57} + |z|^3 + |z| + 1 = 40 < 71, \end{aligned} \tag{801}$$

also $|p_1(z)| > |q_1(z)|$. Hierbei haben wir die Dreiecksungleichung für den komplexen Absolutbetrag bemüht. Analog stellen wir fest, dass für alle $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| = 2$, erstens $z \in \partial K_{1,2}(0)$ gilt und zweitens

$$|p_2(z)| = 2^{87} \tag{802}$$

$$|q_2(z)| \leq 36 \cdot 2^{57} + 2^3 + 2 + 1 < 4 \cdot 2^6 \cdot 2^{57} = 2^{65} < 2^{87}, \tag{803}$$

da die allgemeine Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ mit Basis echt größer als 1 streng monoton steigend ist. Wiederum haben wir die Dreiecksungleichung für den komplexen Absolutbetrag für die Abschätzung nach oben eingesetzt. Wir schließen nun aus den obigen Ergebnissen für den Fall $|z| = 2$, dass $|p_2(z)| > |q_2(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $|z| = 2$. Da $\mathbb{C}$ sogar ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, liefert uns die Anwendung des Satzes von Rouché auf die $\partial B_1(0)$ bzw. $\partial B_2(0)$ einfach und positiv durchlaufenden Kurven γ_1, γ_2 die folgenden Ergebnisse. Erstens haben p_1 und p auf $\partial B_1(0)$ keine und in $B_1(0)$ genau gleich viele Nullstellen. Da p_1 die 4-fache Nullstelle $z = 0$ in $B_1(0)$ hat, besitzt auch p in $B_1(0)$ genau 4, mit Vielfachheiten gezählte Nullstellen. Zweitens haben p_2 und p auf $\partial B_2(0)$ keine Nullstellen, sie haben aber in $B_2(0)$ genau gleich viele Nullstellen. $p_2(z)$ hat die 87-fache Nullstelle $z = 0$ in $B_2(0)$. Damit hat auch p in $B_2(0)$ genau 87 Nullstellen, die jeweils mit Vielfachheiten gezählt worden sind. Da wir bereits wissen, dass p keine Nullstelle auf $\partial B_1(0)$ besitzt, können wir sogar folgern, dass p auf $\bar{B}_1(0)$ genau 4 Nullstellen besitzt. Da $\bar{B}_1(0) \subseteq B_2(0)$, liegen diese 4 Nullstellen auch allesamt in $B_2(0)$. Wegen $K_{1,2}(0) = B_2(0) \setminus \bar{B}_1(0)$ hat p damit in $K_{1,2}(0)$ genau $87 - 4 = 83$ Nullstellen, die mit Vielfachhheiten gezählt worden sind. $\square$

Aufgabe 69 (F19T3A3) (a) Gegeben sei die Menge $H \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Hierbei handelt es sich um die beiden Zweige der Einheitshyperbel, d.h., den Graphen den Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto y = 1/x$.
(b) Nun sei $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass $w > 0$. Gesucht sind alle lokalen Extremstellen der linearen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto vx + wy$ in Abhängigkeit von v und w, wobei (x, y) der Nebenbedingung $(x, y) \in H$ genügen soll. Aus Teil (a) sehen wir, dass dann $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gelten muss. Indem wir $xy = 1$ für $x, y \neq 0$ zu $x = 1y$ umformen, eliminieren wir die Nebenbedingung und erhalten die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, y \mapsto f(x(y), y) = v/y + wy$. Diese ist auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar, sodass wir die lokalen Extrema bestimmen können. Für ein lokales Extremum $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ muss gelten $f'(y) = 0$. Damit finden wir $-v/y^2 + w = 0$, was wir zu $y^2 = v/w$ umformen können. Da $w > 0$ müssen wir drei Fälle unterscheiden. Erstens $v = 0$. In diesem Falle ist $y^2 = 0$, was wegen $y \neq 0$ nicht erfüllt werden kann. In diesem Fall hat g und damit $f|_H$ also kein Extremum, denn andernfalls resultierte ein Widerspruch zum notwendigen Kriterium für die Existenz lokaler Extrema. Im Fall $v < 0$ gilt $y^2 = v/w < 0$. Diese quadratische Gleichung hat keine

reelle Lösung, sodass auch im Falle $v < 0$ keine Extrema für g und damit für $f|_H$ existieren. Zuletzt ist im Fall $v > 0$ die Gleichung $y^2 = v/w$ lösbar und sie hat die beiden Lösungen $y_+ = \sqrt{v/w} > 0$ sowie $y = -\sqrt{v/w} < 0$. Um zu beweisen, dass es sich hierbei wirklich um Extrema handelt, beachten wir, dass g sogar zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist. Die zweite Ableitung von g ist gegeben durch $g''(y) = 2v/y^3$. Einsetzen liefert $\text{sign}(g'')(y_+) = +1$ und $\text{sign}(g'')(y_-) = -1$. Das notwendige und hinreichende Kriterium zeigt also, dass g nur bei $y = y_+$ ein Minimum, und damit insbesondere eine Extremum, und bei $y = y_-$ ein Maximum, also ebenfalls ein Extremum, aufweist. Da g und $f|_H$ bereits auf einer maximalen offenen Teilmenge definiert sind, haben wir alle Extrema gefunden. Nur im Falle $v > 0$ hat $f|_H$ also Extrema und diese liegen bei $(\sqrt{w/v}, \sqrt{v/w})$, $(-\sqrt{w/v}, -\sqrt{v/w}) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. In allen anderen Fällen für $v \in \mathbb{R}$ und $w > 0$ hat f auf H keine lokalen Extrema. Das Maximum und Minimum sind jeweils lokal, nicht aber global. □

Aufgabe 70 (F19T1A2) (a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, bestehend aus Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls es eine Folge von reellen Zahlen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $|f_n(x)| \leq M_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ und zusätzlich $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) =: f(x) \tag{804}$$

absolut gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.
(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zu zeigen ist, dass f global Lipschitz-stetig ist. Da f stetig differenzierbar ist, existiert $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ und ist dort stetig. Nach dem Maximumsprinzip für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen, gibt es ein $\zeta \in [0,1]$, sodass $f(\zeta) = L \equiv \max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$, denn sowohl $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ als auch f' sind stetige Funktionen, also auch die Komposition $|f'|$, und $[0,1]$ ist bereits laut Angabe kompakt in $\mathbb{R}$. Andererseits ist zu beliebigem $x, y \in [0,1]$ laut Mittelwertsatz der Differentialrechnung $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$ für ein $\xi \in (0,1)$, das im Allgemeinen von x, y abhängt. Multiplikativität der 1-Norm liefert $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y|$. Da $(0,1) \subsetneq [0,1]$ gilt auf jeden Fall $|f'(\xi)| \leq L = \max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$. Zusammen mit der Nichtnegativität der 1-Norm finden wir die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$. Insbesondere ist die Konstante L unabhängig von x und y. Das bedeutet aber gerade, dass f auf $[0,1]$ global Lipschitz-stetig ist.
(c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wir weisen die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n^2 + x^2}\right) - f(0) \right] \tag{805}$$

nach. Wir beachten zunächst, dass stets gilt $0 < 1/(n^2 + x^2) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Aus dem Aufgabenteil (b) wissen wir bereits, dass $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion ist. Wir bezeichnen die dazugehörige Lipschitz-Konstante mit $L(\geq 0)$. Betrachten wir zunächst die einzelnen Summanden nach Komposition mit der 1-Norm auf $\mathbb{R}$,

$$\left| f\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right) - f(0) \right| \leq L \left| \frac{1}{n^2+x^2} - 0 \right| = \frac{L}{n^2+x^2} \leq \frac{L}{n^2}. \tag{806}$$

Nun definieren wir die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen durch $M_n \equiv L/n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus den Analysis-Vorlesungen ist bekannt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \infty \tag{807}$$

erfüllt, also konvergiert. Somit konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty. \tag{808}$$

Das Majorantenkriterium von Weierstraß liefert nun, dass die oben angegebene Funktionenreihe absolut gleichmäßig konvergiert, solange $0 \leq 1/(n^2+x^2) \leq 1$ ist. Da die mittlere Seite der Ungleichung ein globales Maximum bei $x = 0$ hat, und ansonsten für alle $n \in \mathbb{N}$ und reelle x strikt positiv ist, konvergiert also die angegebene Funktionenreihe für alle reellen x absolut und gleichmäßig. Für die gleichmäßig konvergente Funktionenreihe der Aufgabe ist nach einem Vorlesungresultat die Grenzfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right) - f(0) \right] \tag{809}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. □ □

Aufgabe 71 (F19T3A5) (a) Gegeben sei die Differentialgleichung $y^{(4)}+y^{(2)} = 0$. Dies ist für die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Der dazugehörige Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert die Existenz der Lösung y, wie beschrieben, und zudem die Eindeutigkeit, falls Anfangsbedingungen $(y(0), y'(0), y''(0), y^{(3)}(0), y^{(4)}(0)) \in \mathbb{R}^4$ spezifiziert werden. Die allgemeine Lösung hingegen hängt von vier reellen Parametern ab, die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können und ansonsten bildet die Gesamtheit der allgemeinen Lösungen eine vierdimensionalen reellen Vektorraum. Wir sehen zunächst, dass Funktionen der Form $x \mapsto ax + b$ eine zwei-Parameter Familie von Lösungen der obenstehenden Differentialgleichung definieren. Zudem stellen wir fest, dass auch $x \mapsto c\sin(x) + d\cos(x)$ eine zwei-parametrige Familie von Lösungen der obenstehenden Differentialgleichung bilden. Durch Berechnung der Wronski-Determinante am Punkt $x = 0$ stellt man fest, dass $\{1, x, \sin(x), \cos(x)\}$ in der Tat linear unabhängig sind, denn die Wronski-Determinante nimmt hier den Wert $1 \neq 0$ an. Aus der Theorie linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen ergibt sich somit, dass das genannte Funktionensystem auf ganz $\mathbb{R}$ über den reellen Zahlen linear unabhängig ist. Somit ist $\dim \operatorname{span}\{1, x, \sin(x), \cos(x)\} = 4$. Die allgemeine reell-wertige Lösung ist insgesamt also gegeben durch

$$y(x; a, b, c, d) = a + bx + c\sin(x) + d\cos(x). \tag{810}$$

(b) In einem zweiten Schritt bestimmen wir die allgemeine, reellwertige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)} + y^{(2)} = 12x + 20\exp(2x)$. Infolge der Linearität des involviert Differentialoperators auf der linken Seite, lässt sich die allgemeine Lösung als die Summe der allgemeinen Lösung des homogenen Teils der Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auffassen. Da die Inhomogenität auf der rechten Seite der zu untersuchenden Differentialgleichung eine Summe von zwei Inhomogenitäten ist, reicht es wiederum aufgrund der Linearität der zu untersuchenden Differentialgleichung aus, für jede Inhomogenität getrennt eine spezielle Lösung der Differentialgleichung zu finden. Wir bestimmen also eine spezielle Lösung für $y_1^{(4)} + y_1^{(2)} = 12x$ und eine für $y_2^{(4)} + y_2^{(2)} = 20\exp(2x)$. Die für das Ausgangsproblem relevante spezielle Lösung ist dann die Summe der beiden erhaltenen speziellen Lösungen für die reduzierten Probleme. Wir stellen fest, dass $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x^3$ sogar eine glatte Funktion ist und zudem gilt $y_1^{(4)}(x) = 0$ und $y^{(2)}(x) = 12x$. Somit ist das angegebene y_1 eine spezielle Lösung des ersten reduzierten Problems. Wiederum durch Inspektion stellen wir fest, dass $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(2x)$ eine glatte Funktion ist und $y^{(4)}(x) = 2^4\exp(2x) = 16\exp(2x)$ sowie $y^{(2)}(x) = 2^2\exp(2x) = 4\exp(2x)$ erfüllt. Somit gilt $y_2^{(4)}(x) + y_2^{(2)}(x) = (16+4)\exp(2x) = 20\exp(2x)$. Folglich ist y_2 eine spezielle Lösung des zweiten reduzierten Problems. Addition der beiden partikulären Lösungen für die jeweils reduzierten Probleme und Beachtung der anfänglichen Ausführung zur Lösung des mit der Differentialgleichung assoziierten homogenen Problems liefert die allgemeine Lösung

$$y(x; a, b, c, d) = a + bx + c\sin(x) + d\cos(x) + 2x^3 + \exp(2x) \tag{811}$$

mit Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 72 (F19T3A2) (a) Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen reelle Zahlen, die die Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \ \ \& \ \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty \tag{812}$$

Wir zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergiert. Sei $N \in \mathbb{N}$ und betrachte die Vektoren $\mathbf{a} = (|a_1|, ..., |a_N|)$ sowie $\mathbf{b} = (|b_1|, ..., |b_N|)$. Dann ist

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\|_2 \cdot \|\mathbf{b}\| \tag{813}$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $\mathbb{R}^N$. Es gilt explizit

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} |b_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} b_k^2}. \tag{814}$$

Die linke Seite ist nach der Dreiecksungleichung größer oder gleich dem Absolutbetrag der zu untersuchenden Reihe, sodass

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} |b_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} b_k^2}. \tag{815}$$

Da die linke Seite der vorletzten Gleichung stets durch 0 nach unten beschränkt, und die rechte Seite auch im Limes $N \to \infty$ endlich bleibt, folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}. \tag{816}$$

Mit anderen Worten konvergiert die zu untersuchende Reihe absolut nach dem Majorantenkriterium. Grenzübergang $N \to \infty$ in der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{N} a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k b_k| \tag{817}$$

liefert nun die schwächere Abschätzung

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}, \tag{818}$$

die neben der absoluten Konvergenz bewiesen werden sollte.
(b) Wir beweisen als nächstes die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}. \tag{819}$$

Die Ungleichung ist offenbar äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}, \tag{820}$$

denn sie entsteht aus der ersten Ungleichung durch Subtraktion von 1 auf beiden Seiten und Umbenennung der Indizes auf der linken Seite, sodass die Summe wieder bei $k = 1$ startet. Nun stellen wir in der zweiten Ungleichung fest, dass jeder der Summanden links und rechts jeweils positiv ist, und der n-te Summand links echt kleiner ist als der n-te Summand rechts, denn $1/(n+1)^2 < 1/(n(n+1)) \Leftrightarrow n(n+1) < (n+1)^2 \Leftrightarrow 0 < n+1$, was für $n \in \mathbb{N}$ war ist. Somit haben wir die Gültigkeit der zweiten Ungleichung von oben bewiesen, sodass infolge der zuvor bewiesenen Äquivalenz auch die erste Ungleichung gilt. Wir zeigen nun für alle $n \geq 2$

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2 - \frac{1}{n}. \tag{821}$$

Für $n = 2$ ergibt sich auf der linken Seite $1 + 1/(1 \cdot (1+1)) = 3/2$. Rechts finden wir $2 - 1/2 = 3/2$. Linke und rechte Seite stimmen also überein und die Gültigkeit der Gleichung ist für $n = 2$ bewiesen. Wir setzen nun voraus, dass die angegebene Gleichung für ein beliebiges aber festes $n \geq 2$ gilt und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt. Wir finden

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= 2-\left(\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right) \\ &= 2-\frac{1}{n+1},\end{aligned} \tag{822}$$

womit der Induktionsschritt abgeschlossen ist. Nach dem Induktionsprinzip gilt die angegebene Gleichung also für beliebige $n \geq 2$. (c) Sei nun $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 < \infty$. Wir sollen zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergiert. Wir definieren zunächst die beiden Hilfsfolgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ durch $A_k \equiv kc_k$ und $B_k = 1/k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $A_k B_k = c_k$ und nach Voraussetzung an $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 < \infty$. Indem wir die Abschätzung aus Teil (b) bemühen sehen wir, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 \leq 2 < \infty$. Somit liefert uns der Beweisgang aus Teil (a), dass

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_k B_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}B_k^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}k^2c_k^2}. \tag{823}$$

Damit ist bewiesen, dass die angegebene Reihe absolut konvergiert. Die ferner zu beweisende Abschätzung für den Absolutbetrag des Werts der Reihe erhalten wir, indem wir die Definitionen von $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in die in Teil (a) zu zeigende Ungleichung substituieren und dabei, wie gerade eben, $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 \leq 2$ durch Grenzwertübergang $n \to \infty$ der in Teil (b) bewiesenen Ungleichung verwenden. Damit ist auch die in der Aufgabe spezifizierte Ungleichung nachgewiesen. $\square$

5.2 Aufgaben Übungen

Aufgabe 29 Gegeben sei die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^3y - xy^3$, Gesucht ist diejenige holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deren Realteil u ist, und die $f(0) = 2i$ erfüllt. Wie verifizieren zunächst, dass u eine harmonische Funktion ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $\Delta u(x,y) = (\partial_x^2 + \partial_y^2)u(x,y) = 0$. Als bivariate Polynomfunktion ist u mindestens zweimal stetig partiell differnzierbar und wir finden für die beiden relevanten partiellen Ableitungen der Ordnung 2 für beliebiges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_x^2 u(x,y) = 6xy$ sowie $\partial_y^2 u(x,y) = -6xy$. Damit ergibt sich $\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 6xy - 6xy = 0$, d.h., u ist harmonisch. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet ist, können wir eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ finden, so dass der Realteil von f durch u gegeben ist. Bezeichne den Imaginärteil von f, ausgedrückt durch $x = \Re[z]$, $y = \Im[z]$, mit v. Es muss dann $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch sein und zusammen mit u den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen genügen, d.h., $\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y)$ und $\partial_x v(x,y) = -\partial_y u(x,y)$ auf $\mathbb{R}^2$. Ausgedrückt durch x, y wie oben definiert, ist dann $f = u + iv$. Wir finden aus der ersten der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$v(x,y) - v(x,0) = \int_0^y \partial_x u(x,y')dy' = \int_0^y (3x^2y' - y'^3)dy' = 3/2x^2y^2 - y^4/4. \quad (824)$$

Aus der zweiten der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, eingeschränkt auf $y = 0$, ergibt sich

$$v(x,0) - v(0,0) = -\int_0^x \partial_y u(x',0)dx' = -\int_0^x x'^3 dx' = -x^4/4. \quad (825)$$

Addition der beiden Ergebnisse und Umformen liefert nun

$$v(x,y) = v(0,0) - (y^4/4 + x^4/4 - 3/2x^2y^2). \quad (826)$$

Damit erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} f(x,y) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^3y - xy^3 - i(y^4/4 + x^4/4 - 3/2x^2y^2) + iv(0,0). \end{aligned} \quad (827)$$

Die Bedingung $f(0,0) = 2i$ fixiert nun $v(0,0) = 2$, sodass zunächst die gesuchte Funktion v gegebn ist durch

$$v(x,y) = 2 - (y^4/4 + x^4/4 - 3/2x^2y^2) \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (828)$$

Wir wollen nun f in Abhängigkeit von $z = x + iy$ ausdrücken. Wir behaupten, dass $f(z) = -i/4z^4 + 2i$ die gewünschte Eigenschaft hat. In der Tat liefert uns der binomische Lehrsatz,

$$\begin{aligned} f(z = x + iy) &= -i/4(x+iy)^4 + 2i \\ &= 4/4(x^3y - xy^3) + i(-x^4/4 - y^4/4 + 6/4x^2y^2 + 2) \\ &= (x^3y - y^3x) + i(-x^4/4 - y^4/4 + 3/2x^2y^2 + 2) \\ &= u(x,y) + iv(x,y). \end{aligned} \quad (829)$$

Als Polynomfunktion ist f offenbar holomorph und v daher harmonisch als Imaginärteil einer holomorphen Funktion. □

Aufgabe 30 (a) Zu prüfen ist die Existenz einer holomorphen Funktion $f : B_2(0) \to \mathbb{C}$, sodass $f(1/2) = 2$ und $|f(z)| = 1$ für $z \in B_2(0)$ mit $|z| = 1$. Wir behaupten, dass es eine solche Funktion nicht geben kann. Angenommen, es gäbe ein f mit den gewünschten Eigenschaften. Da f in $B_2(0)$ holomorph ist, ist f insbesondere auf $B_1(0)$ holomorph und ferner auf $\bar{B}_1(0)$ stetig. Da $B_1(0)$ offen und zusammenhängend ist, ist es ein Gebiet und $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} = \partial B_1(0) \subset B_2(0)$. Das Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen besagt nun, dass $|f(z)| \leq \sup_{\xi \partial B_1(0)}\{|f(\xi)|\}$ für alle $z \in B_1(0)$. Da $\sup_{\xi \in \partial B_1(0)}\{|f(\xi)|\} = \sup_{\xi \in \partial B_1(0)}\{1\} = 1$, finden wir die Absolutschranke $0 \leq |f(z)| \leq 1$. Andererseits ist $1/2 \in B_1(0)$ und wegen $f(1/2) = 2$ gibt es ein $z \in B_1(0)$ mit $|f(z)| \geq 2 > 1$, im Widerspruch zu dem vorher hergeleiteten Ergebnis unter Anwendung des Maximumsprinzips. Daher war die Annahme, ein f

wie beschrieben existierte, falsch und es kann kein f mit geforderten Eigenschaften geben.
(b) Zu prüfen ist die Existenz einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $\Im[g](x,y) = x^2 - y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Wir stellen fest, dass falls wir eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ mit $\Re[f](x,y) = x^2 - y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ finden können, die durch $g \equiv i \cdot f$ definierte Funktion den gewünschten Imaginärteil hat und als Vielfaches einer holomorphen Funktion selbst holomorph ist. Wir definieren die Hilfsfunktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. Diese ist mindestens C^2-partiell differenzierbar als bivariate Polynomfunktion. Ferner ist u auf dem gesamten Definitionsbereich harmonisch, denn es gilt für beliebiges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dass $\partial_x^2 u(x,y) = 2$ und $\partial_y^2 u(x,y) = -2$, also $\Delta u(x,y) = \partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 2 - 2 = 0$. Da $\mathbb{R}^2$ laut Vorlesung ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, existiert eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass $\Re[h](x,y) = u(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Infolge des eingangs Gesagten ist dann $g = i \cdot h$ existent und holomorph mit $\Im[g](x,y) = u(x,y) = x^2 - y^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(c) Zu prüfen ist die Existenz einer offenen Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, sodass $h^{(n)}(0) = (2n)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir behaupten, dass es eine entsprechende Funktion nicht gibt. Angenommen, es gäbe eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, deren Ableitungen an der Stelle 0 durch die obenstehenden Ausdrücke gegeben sind. Dann gibt es infolge der Holomorphie von h ein $r > 0$, sodass h auf der offenen Kugel $B_r(0) \subseteq U$ eine Taylor-Reihe um die 0 besitzt. Die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 ist gegeben durch den Ausdruck

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!} z^k. \tag{830}$$

Wir führen dies zum Widerspruch, indem wir zeigen, dass der Konvergenzradius ρ der Potenzreihe gerade 0 ist. Wegen $r \leq \rho$ muss dann auch $\rho = 0$ im Widerspruch zu $r > 0$. Zu diesem Zwecke verwenden wir das Quotientenkriterium und rechnen

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{k} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{2k(2k+1)} \right| = 0. \tag{831}$$

Damit haben wir den gewünschten Widerspruch. □

Aufgabe 31 Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein nicht-leeres Gebiet und $f.G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = f(z)g(z)$, wobei $g : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ist. Zu zeigen ist: Hat f in G eine Nullstelle, so ist f bereits die Nullfunktion. Sei $z_0 \in G$ die Nullstelle von f in G gemäß Voraussetzung. Wir zeigen zuerst, dass $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist das gerade die Aussage, dass z_0 Nullstelle von f ist. Für $n = 1$ stellen wir fest, dass $f'(z_0) = g(z_0)f(z_0) = 0$. Wir nehmen nun an, dass wir bereits für alle $0 \leq k \leq n$ gezeigt haben $f^{(k)}(z_0) = 0$. Wir zeigen, dass dann $f^{(n+1)}(z_0)$ folgt. Per Induktion zeigt man leicht

$$f^{(n+1)}(z_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z_0) g^{(n-k)}(z_0). \tag{832}$$

In dieser endlichen Summe ist jeder Summand endlich und für den mittleren Faktor in jedem Summanden gilt $f^{(k)}(z_0) = 0$ nach Induktionsvoraussetzung, da $0 \leq k \leq n$. Damit evaluiert jeder Summand zu 0 und wir erhalten $f^{(n+1)}(z_0) = 0$. Wir beweisen per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ noch die verwendete Identität. Der Fall $n = 0$ ist klar, denn dann $f'(z) = f(z)g(z)$, was bereits ganz zu Beginn festgelegt worden war. Wir setzen nun voraus, dass wir die Gleichung bereits für $n = N$ bewiesen haben und zeigen, dass sie dann auch im Fall $n = N + 1$ gilt. Denn

$$
\begin{aligned}
f^{(N+2)}(z_0) &= (f^{(N+1)}(z))'|_{z=z_0} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} f^{(k)}(z)g^{(N-k)}(z)\right]'\Bigg|_{z=z_0} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(f^{(k+1)}(z)g^{(N-k)}(z) + f^{(k)}(z)g^{(N-k+1)}(z)\right)\Bigg|_{z=z_0} \\
&= g^{(N+1)}(z_0)f(z_0) \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} \left[\binom{N}{k} + \binom{N}{k+1}\right] f^{(k)}(z)g^{(N+1-k)}(z)\Bigg|_{z=z_0} \\
&+ g(z_0)f^{(N+1)}(z_0) \\
&= g^{(N+1)}(z_0)f(z_0) + \sum_{k=1}^{N} \binom{N+1}{k} f^{(k)}(z_0)g^{(N+1-k)}(z_0) + f^{(N+1)}(z_0)g(z_0) \\
&= \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} f^{(k)}(z_0)g^{(N+1-k)}(z_0).
\end{aligned}
$$

Im zweiten Schritten haben wir die Induktionsvoraussetzung verwendet, im dritten Schritt wurde die Lineatität der komplexen Differentiation zusammen mit der Produktregel verwendet. Im vierten Schritten haben wir Grundtatsachen über endliche Reihen bemüht, um geeignet umzuordnen. Im fünften Schritt haben wir das wohlbekannte Additionstheorem für Binomialkoeffizienten verwendet. Der sechste Schritt diente lediglich der Zusammenfassung der im vorangegangenen Schritt erzielten Ergebnisse. Damit haben wir den Beweis, dass $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, beendet. Nun bemerken wir, dass die Nullfunktion $0 : G \to \mathbb{C}, z \mapsto 0$ die Eigenschaft $0^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ hat. Mit anderen Worten, gilt $0^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ in einem Punkt z_0 im Gebiet G. Damit können wir den Identitätssatz anwenden, welcher uns liefert, dass sogar $f = 0$ auf ganz G gilt. Damit haben wir die Behauptung, $f(z) = 0$ für alle $z \in G$, bestätigt. □

Aufgabe 32 (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \geq 0$ und $R > 0$. Gesucht ist der Wert des komplexen Konturintegrals

$$\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z-1|=R\}} \frac{f(z)\,dz}{z-1}. \tag{833}$$

Wir leiten aus den Angaben zunächst eine Potenzreihendarstellung von f um den Entwicklungspunkt 0 her. Es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k-1)!}. \tag{834}$$

Aus dem Quotientenkriterium finden wir zunächst den Konvergenzradius

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k-1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} |k| = \infty, \tag{835}$$

sodass die obige Potenzreihendarstellung in der gesamten komplexen Zahlenebene konvergiert und dort eine analytische, und damit holomorphe Funktion anhand ihrer Ableitungen in eindeutiger Weise (Identitätssatz) definiert. Wir finden zudem

$$f(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = z \exp(z), \tag{836}$$

wo $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Exponentialfunktion bezeichnet. Mit diesem Ausdruck können wir das angegebene Kurvenintegral evaluaieren, wobei wir in jenem die Cauchy'sche Integralformel erkennen:

$$(2\pi i) \cdot 1^{-1} \cdot f(1) = \int_{\{z\in\mathbb{C}||z-1|=R\}} \frac{f(z)\, dz}{z-1}. \tag{837}$$

Damit finden wir unter Verwendung der oben hergeleiteten Darstellung der holomorphen Funktion f,

$$\int_{\{z\in\mathbb{C}||z-1|=R\}} \frac{f(z)\, dz}{z-1} = 2\pi i e. \tag{838}$$

(b) Wir behaupten, dass es keine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(1/n) = n/(2n-1)$ gibt. Wir schreiben zunächst um:

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-1/n}. \tag{839}$$

Angenommen, es gäbe eine ganze Funktion f mit den beschriebenen Eigenschaften. Dann ist f insbesondere in $z = 0$ stetig und es gilt mit der Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = 1/2 = f(0) = f(\lim_{n\to\infty} 1/n)$. Wir betrachten nun die punktierte komplexe Zahlenebene $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Einschränkung von f auf G ist dort ebenfalls holomorph, genauso wie die Funktion $g : G \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/(2-z)$. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $f(1/n) = n/(2n-1) = g(1/n)$ und $f(0) = 1/2 = g(0)$ und die Menge $M := \{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{N}\} \subset G$ ist per Konstruktion eine nicht-diskrete Menge mit Häufungspunkt 0. Der Identitätssatz liefert uns nun, dass $f|_G = 1/(z-2)$. Andererseits hat diese Funktion eine Polstelle erster Ordnung bei $z = 2$, d.h., insbesondere eine nicht-hebbare Singularität. Damit gibt es keine holomorphe Fortsetzung von $f|_G$ auf $\mathbb{C}$, im Widerspruch zur Annahme, es gäbe eine ganze Funktion mit den beschriebenen Eigenschaften. Die Annahme war also falsch, und es gibt kein holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(1/n) = n/(2n-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$! □

Aufgabe 33 (a) Nach Definition des Konvergenzradius handelt es sich um das maximale $r > 0$, sodass die Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = 1 + i$ gegen f konvergiert. Wir stellen anhand der gegebenen Werte fest, dass f bei $z = 0$ keine holomorphe Fortsetzung erlaubt, denn $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = \infty$. Also hat f an dieser Stelle eine nicht-hebbare Singularität. Da die Konvergenzkreisscheibe $B_r(0) \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ sein muss, ist maximal $r = \sqrt{2} = \|(1+i) - 0\|_2$ möglich. Da f im Übrigen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist, ist der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung tatsächlich $r = \sqrt{2}$.
(b) Sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $a, b \in G$ mit $a \neq b$. Zu zeigen ist, dass es eine biholomorphe Abbildung $f : G \to G$ gibt, sodass $f(a) = b$. Da G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und verschieden von $\mathbb{C}$ ist, spezifiziert der Riemann'sche Abbildungssatz, dass es eine biholomorphe Abbildung $\Phi_{a\to 0} : G \to \mathbb{E}$ gibt, wobei $\mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe ist und $\Phi_{a\to 0}$ die Eigenschaft $\Phi_{a\to 0}(a) = 0$ hat. Analog erhalten wir die Existenz einer biholomorphen Abbildung $\Phi_{b\to 0} : G \to \mathbb{E}$ mit $\Phi_{b\to 0}(b) = 0$. Da $\Phi_{b\to 0}$ insbesondere bijektiv ist, erfüllt die Funktion $\Phi_{a\to b} = \Phi_{b\to 0}^{-1} \circ \Phi_{a\to 0}$ die gewünschten Eigenschaften, da die Komposition bijektiver Abbildungen selbst bijektiv ist und ebenso die Komposition holomorpher Abbildungen selbst wieder holomorph ist. Überdies gilt $\Phi_{a\to b}(a) = \Phi_{b\to 0}^{-1}(\Phi_{a\to 0}(a)) = \Phi_{b\to 0}^{-1}(0) = b$.
(c) Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Wir behaupten, dass es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Angenommen, es gäbe eine Funktion f mit den geforderten Eigenschaften. Dann ist insbesondere $f(z) \neq 0$ auf $\mathbb{D}$. Ferner gilt $|f(z)| = 1$ für $z \in \partial\mathbb{D}$ und f eingeschränkt auf $\bar{\mathbb{D}}$ ist stetig und $f|_{\mathbb{D}}$ ist holomorph auf $\mathbb{D}$. Nach dem Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen zusammen mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt, dass $1/|f(z)|$ am Rande von $\mathbb{D}$ maximiert wird, d.h., für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt $|f(z)| \geq 1$. Analog liefert das Maximumsprinzip, dass $|f(z)| \leq 1$ ist. Zusammen finden wir also $|f(z)| = 1$ auf $\mathbb{D}$. Hiermit haben wir aber einen Widerspruch zum Satz der Gebietstreue: Denn es ist $\mathbb{D}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f|_{\mathbb{D}}$ ist dort holomorph. Der Satz von der Gebietstreue sagt nun, dass $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}$ ebenfalls ein Gebiet sein muss. Andererseits haben wir aber bereits vorher festgestellt, dass $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$, d.h., dass $f(\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}$ ist. Der Widerspruch entsteht nun dadurch, dass $\partial\mathbb{D}$ bekanntermaßen nicht offen in $\mathbb{C}$, also erst recht kein Gebiet ist. Damit war die Annahme, es gäbe ein f wie beschrieben, falsch und es gibt keine nullstellenfreie ganze Funktion, die $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ erfüllt. $\square$

Aufgabe 34 Sei f eine in einer Umgebung von $\bar{D}_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$ definierte, holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ in $\bar{D}_2$. Zu zeigen ist, dass für alle $z \in \bar{D}_1$ gilt $|f''(z)| \leq 4$. Sei $z \in \bar{D}_1$ beliebig. Nach der Cauchy'schen Integralformel gilt für den in $\bar{D}_2$ liegenden Kreis $\partial B_2(z)$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2(0)} \frac{f(w)dw}{w - z}, \tag{840}$$

so $\partial B_2(0)$ einfach im positiven Sinne durchlaufen wird. Entsprechend finden wir durch zweimalige Differentiation nach z und Anwendung des Satzes über die Vertauschbarkeit von Differentiation nach einem Parameter und Integralzeichen,

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial B_2(0)} \frac{f(w)dw}{(w-z)^3}. \tag{841}$$

Wir schätzen das Integral nun ab:

$$\begin{aligned}
0 &\leq |f''(z)| && (842)\\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\partial B_2(0)} \left| \frac{f(w)}{(w-z)^3} \right| dw && (843)\\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\partial B_2(0)} \left| \frac{1}{(w-z)^3} \right| dw && (844)\\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\partial B_2(0)} dw && (845)\\
&\leq \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 && (846)\\
&\leq 4. && (847)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir für das zweite Ungleichungszeichen die Dreiecksungleichung in Integralformulierung verwendet, im dritten Ungleichungszeichen ist die Voraussetzung $|f(z)| \leq 1$ auf $\bar{D}_2$ eingegangen und im vierten Ungleichungszeichen haben wir verwendet, dass $|w-z| \geq 1$ ist, falls $w \in \partial D_2$ und $z \in \bar{D}_1$, infolge der umgekehrten Dreiecksungleichung. Zuletzt haben wir verwendet, dass der Umfang eines Kreises mit Radius 2 durch $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ gegeben ist. □

Aufgabe 35 Seien die beiden holomorphen Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben, sodass $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zu zeigen ist, dass es eine konstante $\lambda \in \bar{\mathbb{E}} := \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$ gibt, sodass $f(z) = \lambda \cdot g(z)$. Dies sehen wir wie folgt ein: Falls g ein nicht-diskrete Menge an Nullstellen hat, so liefert uns der Identitätssatz, dass $g \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{C}$. Dann ist wegen der Ungleichung, der f und g laut Voraussetzung genügen müssen, $f \equiv 0$ und wir können beispielsweise die Konstante $\lambda = 1$ wählen. Wir betrachten den Fall, dass g lediglich eine diskrete, aber nicht-leere Nullstellenmenge hat. In diesem Fall ist g von der Nullfunktion verschieden und auch nicht-konstant. Die Ungleichung $0 \leq |f(z)| \leq |g(z)|$ liefert nun, dass für jede Nullstelle z_0 von g auch $f(z_0) = 0$ gilt. Ebenso stellen wir durch Abspalten und Kürzen eines $(z - z_0)$ auf beiden Seiten der Ungleichung fest, dass, falls z_0 eine Nullstelle höherer Ordnung von g ist, z_0 ebenfalls eine Nullstelle höherer Ordnung von f ist. Da der Fall, dass g die Nullfunktion ist, ausgeschlossen ist, ist die Ordnung der Nullstelle z_0 von g, notiert als $\mathrm{ord}(z_0; g) < \infty$, für f hingegen gilt nur $\mathrm{ord}(z_0; f) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und die Schranke $\mathrm{ord}(z_0; f) \geq \mathrm{ord}(z_0; g)$. Wir definieren nur die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als die holomorphe Fortsetzung von $f/g : \mathbb{C} \setminus g^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C}$, über den Hebbarkeitssatz. Diese Funktion ist wohldefiniert nach den obenstehenden Überlegungen zu den Nullstellenordnungen. Insbesondere gilt nun $|h(z)| \leq 1$ auf ganz $\mathbb{C}$. Da h eine ganze beschränkte Funktion ist, liefert der Satz von Liouville die Existenz einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$, deren Absolutbetrag wegen $|h| \leq 1$ ebenfalls ≤ 1 sein muss, sodass $h(z) = \lambda$. Hieraus folgt durch Einschränkung auf $\mathbb{C} \setminus g^{-1}(\{0\})$, dass $f(z) = \lambda g(z)$. Auf der Nullstellenmenge von g, $g^{-1}(\{0\})$, ist die Gleichung trivial erfüllt, sodass in der Tat $f(z) = \lambda g(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ gilt. Im Falle, dass g keine Nullstellen hat, führt die gleiche Argumentation über den Satz von Liouville zum Ziel, allerdings gleich auf ganz $\mathbb{C}$: Dann ist nämlich $f/g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bereits holomorph und es gilt $|f(z)/g(z)| \leq 1$, sodass nach dem Satz von Lioville und der Ungleichung von gerade eben ein $\lambda \in \bar{\mathbb{E}}$ existiert, sodass $f(z)/g(z) = \lambda$. Umformen liefert dann wiederum die Gleichung $f(z) = \lambda g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und für ein $\lambda \in \bar{\mathbb{E}}$. Damit sind alle Fälle betrachtet und wir haben die Behauptung bewiesen. □

Aufgabe 36 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$ und $f|_G$ holomorph. Zu zeigen ist, dass dann $\partial f(G) \subseteq f(\partial G)$. Da f auf G holomorph ist und G ein Gebiet ist, liefert der Satz von der Gebietstreue holomorpher Funktionen, dass $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Nach Definition gilt $\partial f(G) = \overline{f(G)} \backslash f(G)$, d.h., für jedes $z \in \partial f(G)$ gilt $z \notin f(G)$. Andererseits gibt es nach Definition des topologischen Abschlusses, eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $z_n \in f(G)$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Zu jedem n finden wir ein $w_n \in G$, sodass $f(w_n) = z_n$. Die Folge der $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ konvergiert zumindest in $\bar{G}$. Denn $\bar{G}$ ist nach Definition abgeschlossen und nach Voraussetzung beschränkt. Daher können wir, ggf. nach Wechsel zu einer Teilfolge, nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass annehmen, dass die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Kompaktum $\bar{G}$ gegen w konvergiert. Entsprechend wechseln wir zur korrespondierenden Teilfolge der $(z_n)_n$ in $\overline{f(G)}$. Wir zeigen nun, dass der Grenzwert $w \notin G$. Angenommen, es wäre $w \in G$. Dann liegt $f(w) \in f(G)$ nach Definition der Bildmenge. Gerade das hatten wir aber zu Beginn des Beweises bereits ausschließen können. Daher ist nur $w \in \partial G = \bar{G} \setminus G$ möglich und es gilt entsprechend $f(w) \in f(\partial G)$. Da f stetig ist, gilt $z = \lim_n f(w_n) = f(\lim_n w_n) = f(w)$, sodass wir gezeigt haben $z \in f(\partial G)$. Beliebigkeit von $w \in \partial f(G)$ impliziert nun $\partial f(G) \subseteq f(\partial G)$, wie behauptet. Wir suchen nun ein Beispiel, sodass die Inklusion strikt gilt. Hierzu wählen wir $G = \{z \in \mathbb{C}|z - 1| < 2\}$ und $f : \bar{G} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$. Diese Wahl von f ist holomorph fortsetzbar auf ganz $\mathbb{C}$, genügt also in jedem Fall den Regularitätsanforderungen, die wir weiter oben gestellt haben. Offenbar gilt $-1 \in \partial G$ und $f(-1) = 1 \in f(\partial G)$. Andererseits ist $1 = f(1)$, da $1 \in G$, also $1 \notin \partial f(G)$. Damit gilt $\partial f(G) \subsetneq f(\partial G)$. Wir modifizieren nun die Regularitätseigenschaften von f dorthingehend, dass f nur noch beliebig ofr reell differenzierbar sei. Wir zeigen, dass dann $f(\partial G) \nsubseteq \partial f(G)$ im Allgemeinen. Dazu betrachten wir wiederum $G = \{z \in \mathbb{C}||z - 1| < 2\}$ und definieren die Funktion $g : \bar{G} \to \mathbb{C}, z \mapsto \|z\|_2^2$. Diese Funktion ist unendlich oft reell differenzierbar, nicht aber holomorph. Angenommen, $\partial f(G) \subseteq f(\partial G)$. Es ist $f(G) = (0, 3)$, also $\partial f(G) = \{0, 3\}$. Andererseits ist $0 \notin \partial G$, sodass $0 \notin f(\partial G)$. Damit war die Annahme falsch und es gilt in der Tat $\partial f(G) \nsubseteq f(\partial G)$ im Allgemeinen für lediglich reell differenzierbare f mit den beschriebenen Eigenschaften. □

Aufgabe 37 (a) Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $n \in \mathbb{N}$, sodass $\lim_{|z|\to\infty} |h(z)z^{-n-1}| = 0$. Zu zeigen ist, dass h dann eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ ist. Angenommen, h wäre keine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$. Da h holomorph ist, besitzt h

eine Taylor-Entwicklung der Form

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{848}$$

Zudem gibt es mindestens ein $k > n$, sodass $a_k \neq 0$. Wir bezeichnen das so definierte, minimale k mit $N+n+1$. Dann gilt für die meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) = z^{-n-1}h(z)$, die Laurentreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=-n-1}^{-1} a_{k+n+1} z^k + \sum_{k=N}^{\infty} a_{n+1+k} z^k. \tag{849}$$

Nach Voraussetzung existiert der Limes und ist endlich. Dies ist mit Koeffizientenvergleich nur möglich, falls $a_k = 0$ für alle $k > N+1$. Dann hat f eine Laurentreihendarstellung mit konstantem Nebenteil,

$$f(z) = \sum_{k=-n-1}^{-1} a_{k+n+1} z^k + a_{n+1}. \tag{850}$$

Um nun den richtigen Wert für $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ zu erhalten, muss aber, wiederum nach Koeffizientenvergleich für $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ auch $a_{n+1} = 0$ sein. Das ist ein Widerspruch zur oben gemachten Annahme, dass f gerade keine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ ist! Denn, f hat verschwindenden Nebenteil und die Funktion h ist somit eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$.
(b) Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $\Re[h] : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zu zeigen ist, dass h bereits dann konstant ist. Wir definieren die Hilfsfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(h(z))$. Als Komposition ganzer Funktionen ist f ganz. Ferner ist f auch beschränkt, denn es gibt wegen der Beschränktheit von $\Re[h]$ ein $M > 0$, sodass $|Re[h]| < M$. Damit finden wir $0 \leq |f(z)| = |\exp(\Re[h](z))\exp(i\Im[h](z))| = |\exp(Re[z])| \leq \exp(M)$, weil die Exponentialfunktion für reelle Argumente streng monoton wachsend ist. Somit ist f eine beschränkte und ganze Funktion, nach dem Satz von Lioville also konstant. Das heißt, es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $0 \leq |\lambda| \leq \exp(M)$, sodass $f(z) = \lambda$. Wir behaupten, dass nun auch h konstant ist. Bezeichne $G \subseteq \mathbb{C}$ das Bild von $\mathbb{C}$ unter h. Wir nehmen an, dass h nicht konstant sei. Dann ist nach dem Satz von der Gebietstreue G ebenfalls ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und es wäre $\exp : G \to \{\lambda\}, z \mapsto \exp(z) = \lambda$. Da die Exponentiafunktion aber nicht konstant auf einem Gebiet in $\mathbb{C}$ ist, haben wir den Widerspruch, dass $\{\lambda\}$ ein Gebiet ist. Da $\{\lambda\}$ als ein-elementige Menge bereits nicht offen ist, ist es erst recht kein Gebiet. Somit war die Annahme, h wäre nicht konstant, falsch und es gibt ein $\kappa \in \mathbb{C}$, sodass $h(z) = \kappa$ für alle $z \in \mathbb{C}$. □

Aufgabe 38 (a) Diese Aussage ist falsch. Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$. Sie ist holomorph. Andererseits hat f keine Stammfunktion auf dem gesamten Definitionsbereich, denn es gilt

$$2\pi i = \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = \int_{\partial B_1(0)} f(z)dz. \tag{851}$$

Besäße f eine komplexe Stammfunktion, so müsste laut dem Cauchy'schen Integralsatz das obenstehende Kurvenintegral den Wert 0 haben.
(b) Die Laurentreihe konvergiert nirgends. Wir betrachten dazu die beiden Hilfsreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}, \tag{852}$$

also Neben- und Hauptteil. Die erste Reihe konvergiert auf $B_1 0$ als geometrische Reihe, die zweite Reihe konvergiert auf $K_{1,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < \infty\}$ als geometrische Reihe in $1/z$. Das Konvergenzgebiet der angegebenen Reihe ist gleich der Schnittmenge der Konvergenzgebiete von Haupt- und Nebenteil, hier also $B_1(0) \cap K_{1,\infty}(0) = \emptyset$.
(c) Diese Aussage ist richtig. Angenommen, es gäbe einen Wert $a \in \mathbb{C}$, sodass es kein $z \in \mathbb{C}$ gibt, mit $\sin(z) = a$. Da $\sin(z) = (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i)$ und $\sin(0) = 0$ ist $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Einsetzen der Darstellung der Sinus- über die Exponentialfunktion liefert $\exp(iz) - \exp(-iz) = 2ia$. Da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, formen wir in eine quadratische Gleichung um $\exp(iz)^2 - 2ia \exp(iz) - 1 = 0 = w^2 - 2iaw - 1$. Da der konstante Term ungleich 0 ist, hat diese Gleichung, im Falle der Existenz, Lösungen in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Genauer existieren nach dem Fundamentalsatz der Algebra sogar genau zwei Lösungen w_1, w_2 für w in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Damit ist durch die Wahl eines $z \in \exp^{-1}(\{w_1, w_2\})$ ein geeignetes z gefunden, im Widerspruch zur Annahme. Also war die Annahme falsch und die komplexe Sinus-Funktion nimmt in der Tat jeden Wert aus $\mathbb{C}$ an. $\square$

Aufgabe 39 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomoorph und definiert durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{853}$$

(a) Wir zeigen die Abschätzung $|a_k| \leq r^{-k} \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Offenbar gilt für alle $k \geq 0$:

$$a_k = \frac{1}{k!} d_z^k f(z = 0). \tag{854}$$

Wir drücken die Ableitung auf der rechten Seite über die Cauchy'sche Integralformel aus ($r > 0$):

$$d_z^k f(z = 0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z) dz}{z^{k+1}}. \tag{855}$$

Einsetzen in die obige Formel für a_k liefert die Darstellung

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{f(z) dz}{z^{k+1}}. \tag{856}$$

Da f holomorph auf einer Umgebung von $\bar{B}_r(0)$ ist, existiert $\max_{z \in \bar{B}_r(0)}\{f(z)|\}$ nach dem reellen Maximumprinzip. Ferner gilt $\max_{z \in \bar{B}_r(0)}\{|f(z)|\} \geq \max_{z \in \{|z|=r\}}\{|f(z)|\}$, sodass die rechte Seite ebenfalls existiert und endlich ist. Damit können wir abschätzen:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq |a_k| && (857)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial B_r}\frac{f(z)dz}{z^{k+1}}\right| && (858)\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(0)}\left|\frac{f(z)}{z^{k+1}}\right|dz && (859)\\
&\leq \frac{\max\{|f(z)||z\in\mathbb{C}:|z|=r\}}{2\pi}\int_{\partial B_r(z)}\frac{dz}{|z|^{k+1}} && (860)\\
&= \frac{\max\{|f(z)||z\in\mathbb{C}:|z|=r\}}{2\pi}\frac{2\pi r}{r^{k+1}} && (861)\\
&= r^{-k}\max\{|f(z)||z\in\mathbb{C}:|z|=r\}. && (862)
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die angegebene Ungleichung bewiesen. Im zweiten Ungleichungszeichen haben wir die Dreiecksungleichung für Integrale benutzt und anschließend den Zähler der Integrandenfunktion nach oben abgeschätzt. Im vorletzten Schritt haben wir verwendet, dass entlang des Integrationsweges $|z|=r$ fix eine Konstante ist und die bekannte Formel für die Länge einer geschlossenen Kreislinie.
(b) Falls nun $\limsup_{|z|\to\infty}|z|^{-n}|f(z)|<\infty$, so ist $f(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$. Angenommen, f wäre kein Polynom vom Grad $\leq n$, dann ließe sich die Potenzreihendarstellung von f in einen, gegebenenfalls verschwindenden polynomialen Teil mit Grad $\leq n$ zerlegen, und einen Teil, der Form $z^{n+1}g(z)$, wobei $g\neq 0$ ein nichtverschwindender Potenzreihenausdruck ist. Für alle $r>0$ finden wir dann

$$\limsup_{|z|=r\to\infty} r^{-n}|f(z)| \geq \lim_{r\to\infty}(|r|\max_{|z|=r}\{|g(z)|-|a_n|). \tag{863}$$

Da $g(z)\neq 0$, verschwindet das Maximum nicht und im Limes $r\to\infty$ finden wir, dass $\limsup_{|z|\to\infty}|z|^{-n}|f(z)|=\infty$, im Widerspruch zur Endlichkeit des Limes superior. Kontraposition liefert nun die Behauptung.
(c) Falls nun $\liminf_{|z|\to\infty}|z|^{-n}|f(z)|>0$, so ist f ein Polynom vom Grad $\geq n$. Wiederum beweisen wir über Kontraposition. Sei also $f(z)$ ein Polynom vom Grad $<n$. Dann ist

$$|z|^{-n}|f(z)|\leq |z|^{-1}|a_{n-1}| \tag{864}$$

für hinreichend großes $|z|$. Damit folgt für den Limes Inferior

$$0\leq \liminf_{|z|\to\infty}|z|^{-n}|f(z)|\leq \lim_{|z|\to\infty}|z|^{-1}|a_{n-1}|=0, \tag{865}$$

sodass $\liminf_{|z|\to\infty}|z|^{-n}|f(z)|=0$. Da der Limes Inferior einer nicht-negativen Größe ebenfalls nicht-negativ ist, liefert uns Kontraposition die Gültigkeit der zu untersuchenden Behauptung. □

Aufgabe 40 Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{C}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{C}, z\mapsto 1/((z-1)(2-z))$. Wir bestimmen in drei verschiedenen Gebieten die Laurent-Entwicklung von f.

- *Gebiet $B_0(1)$:* Für $z \in B_1(0)$ gilt $|z| < 1$. Wir schreiben mittels Partialbruchzerlegung um:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}. \tag{866}$$

  Auf die beiden Summanden können wir die geometrische Reihe anwenden, denn sowohl $|z| < 1$ als auch $|z/2| < 1$:

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2^{k+1}-1}{2^{k+1}} z^k. \tag{867}$$

  Der letztere Ausdruck ist die Laurent-Entwicklung von f auf $B_1(0)$.

- *Gebiet $K_{1,2}(0)$:* Wir bestimmen hier die Laurent-Entwicklung um den Entwicklungspunkt $z = 0$, und beachten im Vorfeld, dass $z \in K_{1,2}(0)$ insbesondere $2 > |z| > 1$ bedingt:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}. \tag{868}$$

  Wir können nun auf beide Summanden die geometrische Reihenformel anwenden, für den ersten Summanden entwicklen wir in $1/z$, was im betrachteten Gebiet stets $1/2 < |1/z| < 1$ genügt, und den zweiten Summanden entwickeln wir in $z/2$, was im betrachteten Gebiet absolut beschränkt ist getreu $1/2 < |z/2| < 1$. Wir finden also die Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}. \tag{869}$$

- *Gebiet $K_{2,\infty}(0)$:* Für $z \in K_{2,\infty}(0)$ wissen wir $2 < |z| < \infty$. Wir bemerken ferner, dass $|1/z| < 1/2 < 1$ und $|2/z| < 1$ für alle $z \in K_{2,\infty}(0)$. Damit

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-2z^{-1}}. \tag{870}$$

  Wenden wir hierauf wiederum die geometrische Summenformel und, wie oben, die bekannten Rechenregeln für Laurententwicklungen, so finden wir

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} + \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+1}{z^{k+1}}. \tag{871}$$

  Infolge der obenstehenden Herleitung hat diese Reihe in der Tat das Konvergenzgebiet $K_{2,\infty}(0)$.

Wir geben uns nun zwei beliebige reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ dergestalt vor, dass $1 < a, b < 2$ sowie $a \neq b$, und betrachten den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto a\cos(t) + ib\sin(t)$. Diese durchläuft den Rand einer Ellipse mit Halbachsen a, b. Da $a, b < 2$ liegt $\mathrm{Spur}(\gamma) \subset B_2(0)$. Da ferner $1 < a, b$ umschließt γ ein Gebiet Ω, sodass $\bar{B}_1(0) \subsetneq \Omega$.

Somit folgern wir, dass lediglich die Polstelle bei $z = 1$ im von γ umschlossenen Gebiet Ω liegt. Das Integral

$$I \equiv \oint_\gamma f(z)dz \tag{872}$$

können wir also mithilfe des Residuensatzes berechnen. Für das Residuum von f bei $z = 1$ finden wir

$$\operatorname{Res}(f, z = 1) = \lim_{z\to 1}[f(z)(z-1)] = 1. \tag{873}$$

Dann gilt

$$I = 2\pi i n(\gamma, z = 1)\operatorname{Res}(f, z = 1) = 2\pi i \cdot 1 \cdot 1 = 2\pi i, \tag{874}$$

insbesondere ist der Wert des Integral also unabhängig von a, b im angegebenen Parameterbereich. □

Aufgabe 41 Gegeben sei eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von z_0, sodass z_0 eine p-fache Nullstelle der Funktion f ist. f liege in der Potenzreihenentwicklung auf besagter Umgebung von z_0 vor

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k(z - z_0)^k. \tag{875}$$

(a) Gesucht sind nun die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion $1/f$ mit Entwicklungspunkt z_0. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir erreichen, dass die Umgebung aus der Angabe so gewählt ist, dass f lediglich die p-fache Nullstelle dort besitzt. Andernfalls zeigt man leicht mittels Identitätssatz, dass $f \equiv 0$ auf jedem Gebiet, dass z_0 beinhaltet und in der genannten Umgebung von z_0 liegt, d.h., in der Umgebung selbst $f = 0$ im Widerspruch dazu, dass z_0 eine $p < \infty$-fache Nullstelle von f ist. Da nun z_0 in der geeignet gewählten Umgebung von z_0 die einzige Nullstelle von f ist, ist $z \mapsto 1/f(z)$ dort eine meromorphe Funktion, die eine isolierte Singularität in der Form einer p-fachen Polstelle bei $z = z_0$ hat. In der Folge können wir als Laurent-Entwicklung ansetzen

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=-p}^{\infty} b_k(z - z_0)^k. \tag{876}$$

Da $1 = f(z)/(f(z))$ für alle z in der Umgebung von z_0 exklusive $z = z_0$, finden wir durch Koeefizienten-Vergleich in Potenzen von $(z - z_0)$, dass für alle $N \in \{-p, -p+1, -p+2, ..., 0, 1, 2, ...\}$ für den Koeffizienten c_{N+p} der Taylorentwicklung der konstanten (und damit auf der betrachteten Umgebung komplex-analytischen) Funktion $z \mapsto 1$,

$$b_{-p} \cdot a_p = 1 = c_0 \tag{877}$$

$$\sum_{k=-p}^{N} b_k a_{N+p-k} = \delta_{N+p,0}, \tag{878}$$

wobei letztere Gleichung für $N = -p$ die erste reproduziert und δ_{ij} das Kronecker'sche δ-Symbol bezeichnet. In die Gleichung ging das Cauchy'sche Produkt von Reihen ein, das laut Vorlesung auf der betrachteten Umgebung von z_0 gebildet werden kann. Da $a_p \neq 0$ wegen der Anforderung, dass z_0 Nullstelle der Ordnung p von f ist, können wir mittels des angegebenen Gleichungssystem rekursiv die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung von f bzgl. des Entwicklungspunkts z_0 bestimmen.
(b) Gesucht ist nun die Laurent-Reihe der Funktion $z \mapsto \sin(z)$ für die Entwicklungspunkte $z_0 = 0$ und $z_1 = \pi$. Wir stellen zunächst fest, dass $f : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Da $\sin(\pi\mathbb{Z}) = \{0\}$ aber $\sin'(\pi\mathbb{Z}) = \cos(\pi\mathbb{Z}) = \{-1, 1\} \not\ni 0$, finden wir, dass die Sinus-Funktion jeweils einfache Nullstellen bei $z \in \pi\mathbb{Z}$ hat. Entsprechend hat die Funktion f jeweils Pole der Ordnung 1 bei $\pi\mathbb{Z}$. Auf $B_\pi(0)$ können wir daher die Ergebnisse auf Teilaufgabe (a) anwenden. Die Sinus-Funktion besitzt auf ganz $\mathbb{C}$, also erst recht auf $B_\pi(0)$ die Taylor-Entwicklung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{879}$$

Ebenso finden wir wegen $\sin^{(2k)}(\pi) = 0$ und $\sin^{(2k+1)}(\pi) = (-1)^k \cos(\pi) = (-1)^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Taylor-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(z-\pi)^{2k+1}. \tag{880}$$

Hiermit können wir rekursiv die Koeffizienten der Laurent-Entwicklungen um die Entwicklungspunkte $z_0 = 0$ bzw. $z_1 = \pi$ bestimmen. Wir bezeichnen diese mit $b_k^{(0)}$ bzw. $b_k^{(\pi)}$ und $k \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0$ respektive.

$$b_{-1}^{(0)} = 1 \,\&\, b_{2k}^{(0)} = 0 \,\&\, b_{2k+1}^{(0)} = -\sum_{l=-1}^{k-1} \frac{b_{2l+1}^{(0)}(-1)^{k+1-l}}{(2k-2l+1)!}, \tag{881}$$

$$b_{-1}^{(\pi)} = -1 \,\&\, b_{2k}^{(\pi)} = 0 \,\&\, b_{2k+1}^{(\pi)} = \sum_{l=-1}^{k-1} \frac{b_{2l+1}^{(0)}(-1)^{k-l}}{(2k-21+1)!}. \tag{882}$$

Die entsprechenden Laurententwicklungen sind dann gegeben durch

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} b_{2k+1}^{(0)} z^{2k+1} \,\&\, f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} b_{2k+1}^{(\pi)}(z-\pi)^{2k+1}. \tag{883}$$

(c) Gesucht ist das Konturintegral

$$\oint_{\partial B_2(3/2)} \frac{dz}{\sin(z)}. \tag{884}$$

Wir stellen fest, dass $f(z)$ auf $\partial B_2(3/2)$ selbst keine Polstellen hat, denn alle Nullstellen der Sinusfunktion sind irrational oder 0 und $\partial B_2(3/2)$ schneidet die reelle Achse nur an den von Null verschiedenen Punkten $z_a = -1/2$ und $z_b = 7/2$, d.h., an zwei rationalen Stellen. In $B_2(3/2)$ liegen also nur die Polstellen $z \in \pi\mathbb{Z}$, die

$-0.5 < z < 3.5$ erfüllen. Dies sind die beiden Zahlen $z_0 = 0$ und $z_1 = \pi$. Bezeichnen wir den $\partial B_2(3/2)$ durchlaufenden Weg wie in der Aufgabenstellung mit Γ, finden wir unter Anwendung des Residuensatzes

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \frac{dz}{\sin(z)} &= 2\pi i(n(\Gamma,0)\mathrm{Res}(f,0) + n(\Gamma,\pi)\mathrm{Res}(f,\pi)) \\ &= 2\pi i(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi)), \end{aligned} \tag{885}$$

denn Γ umläuft laut Aufgabenstellung die beiden Polstellen jeweils einfach und positiv. Die Residuen sind nach der Vorlesung gegeben durch $\mathrm{Res}(f,0) = b_{-1}^{(0)} = 1$ und $\mathrm{Res}(f,\pi) = b_{-1}^{(\pi)} = -1$. Damit finden wir also

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{\sin(z)} = 2\pi i(1 + (-1)) = 0. \tag{886}$$

Der Wert des gesuchten Integrals ist also 0! □

Aufgabe 42 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(iz)/(z^2+1)^2$. (a) Gesucht sind Typ der Singularitäten bei $z_\pm = \pm i$ und der Wert des Residuums von f an beiden Stellen. Hierzu beachten wir, dass $z \mapsto \exp(z)$ von $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbildet, und ebenso $z \mapsto \exp(iz)$. Insbesondere ist die letztgenannte Funktion ganz und nullstellenfrei auf $\mathbb{C}$. Das Nennerpolynom $z \mapsto (z^2+1)^2$ hat die beiden doppelten Nullstellen $z_\pm$, d.h., $(z^2+1)^2 = (z-z_+)^2(z-z_-)^2$. Beide Nullstellen sind einfach. Da in beiden Fällen jeweils gilt $\lim_{z\to z_\pm} |(z-z_\pm)^j f(z)| = \infty$ im uneigentlichen Sinne für $j \in \{0,1\}$ und $\lim_{z\to\pm} |(z-z_\pm)^2 f(z)| = |\exp(iz_\pm)/(z_\pm - z_\mp)^2| \neq 0$ im eigentlichen Sinne, handelt es sich bei $z_\pm$ jeweils um Polstellen von f mit Polstellenordnung 1. Der Wert des Residuums lässt sich leicht anhand es im Nachfolgenden angewendeten Vorlesungsresultats bestimmen

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_+ = i) &= \lim_{z\to z_+} \partial_z[f(z)(z-z_+)^2] \\ &= ((z_+ - z_-)^2 i - 2(z_+ - z_-))\exp(iz_+)/(z_+ - z_-)^4 \\ &= -i\exp(-1)/2, \\ \mathrm{Res}(f, z_- = -i) &= \lim_{z\to z_-} \partial_z[f(z)(z-z_-)^2] \\ &= ((z_- - z_+)^2 i - 2(z_- - z_+))\exp(iz_-)/(z_- - z_+)^4 \\ &= (-4 - (-4))i\exp(1)/(16) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{887}$$

(b) Wir sollen nun das doppelt uneigentliche Riemann-Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx \tag{888}$$

berechnen. Wir stellen zunächst fest, dass die beiden doppelt uneigentlichen Riemann-Integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx\,,\ J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^2)^2} dx \tag{889}$$

existieren, denn der Grad des Nenner-Polynoms ist ≥ 1. Im Falle von J liefert die Antisymmetrie des Integrandenfunktion direkt $J = 0$. Wegen der Euler'schen Identität $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ sogar auf $\mathbb{C}$ existiert also das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{(1+x^2)^2} dx = I + iJ. \tag{890}$$

Die Existenz des doppelt uneigentlichen Riemann-Integrals impliziert, dass insbesondere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{(1+x^2)^2} dx. \tag{891}$$

Nunmehr verwenden wir, dass $f|_{\mathbb{R}} = \exp(ix)/(1+x^2)^2$ und betrachten die Konkatenation $\gamma_1 * \gamma_2$ der beiden Kurven $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it)$. Es ist $\mathrm{Spur}(\gamma_1 * \gamma_2) = \partial(B_R(0) \cap \mathbb{H})$, wobei $\mathbb{H} \equiv \{z \in \mathbb{C} | \Im[z] > 0\}$ die obere komplexe Halbebene angibt. Wir stellen fest, dass für $R > 1$

$$\oint_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z\in\{i\}} n(\gamma_1 * \gamma_2, z) \mathrm{Res}(f, z) = 2\pi i \cdot 1 \cdot \frac{-i\exp(-1)}{2} = \frac{\pi}{e}, \tag{892}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\gamma_1 * \gamma_2$ die Polstelle $z = z_+ = i$ einfach und im positiven Sinne durchläuft und lediglich z_+ in dem vom $\gamma_1 * \gamma_2$ umschlossenen Gebiet liegt. Andererseits können wir uns die Additivität des Integrals bezüglich Konkatenation zunutze machen

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{iR\exp(it)\exp(-R\sin t + iR\cos t)}{(1+R^2\exp(2it))^2} dt. \tag{893}$$

Wir schätzen das zweite Integral für den Limes $R \to \infty$ ab,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} \frac{iR\exp(it)\exp(-R\sin t + iR\cos t)}{(1+R^2\exp(2it))^2} dt \right| &\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{iR\exp(it)\exp(-R\sin t + iR\cos t)}{(1+R^2\exp(2it))^2} \right| dt \\ &\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{R}{(R^2-1)^2} \right| dt \\ &= \pi \frac{R}{(R^2-1)^2} \\ &\xrightarrow{R\to 0} 0, \end{aligned} \tag{894}$$

wobei wir im ersten Schritt die Dreiecksungleichung für Integrale verwendet haben. Im zweiten Schritt haben wir erstens die exp-Funktion nach oben durch 1 abgeschätzt haben, da $|\exp(-R\sin t + iR\cos t)| \leq \exp(-R\sin t) < 1$, denn $\sin t \geq 0$ für $0 \leq t \leq \pi$ und $R > 1 > 0$, und zweitens die Umgekehrte Dreiecksungleichung auf den Nenner angewendet, denn $|1 + R^2\exp(2it)| \geq ||1| - |R^2\exp(2it)|| \geq R^2 - 1$ für $R > 1$ und $0 \leq t \leq \pi$. Das resultierende Integral einer konstante Funktion über ein beschränktes Intervall haben wir zuletzt wie gewohnt berechnet und den Grenzwert wie spezifiziert berechnet. Wir sehen also, dass der Beitrag der Integration über den Halbkreisbogen im Limes $R \to \infty$ verschwindet. Indem wir nun die Zerlegung des geschlossenen Konturintegrals im Limes $R \to \infty$ betrachten, erhalten wir nach Grenzübergang in den Integrationsgrenzen und Zerlegung der Integrandenfunktion in Real- und Imaginärteil

$$\frac{\pi}{e} + i \cdot 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^2)^2} dx. \tag{895}$$

Mithin schließen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{e} \ \ \& \ \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^2)^2} dx = 0, \tag{896}$$

was insbesondere die zu Beginn der Teilaufgabe angestellten Symmetrieüberlegungen für das zweite Integral bestätigt und den Wert des gesuchten Integrals festlegt. □

Aufgabe 43 Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Eigenschaft, dass $f(n^{-1}) = (-1)^n n^{-1}$ und $n \in \mathbb{N}$.
(a) Zu zeigen ist, dass f bei $z = 0$ weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle hat. Angenommen, f hat bei $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität. Dann lässt sich f zu einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortsetzen, sodass $g|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} = f$ und $g(0) = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = 0$. Wir betrachten nun die Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$. Ferner ist $h_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft, dass $h_1(a_{2n}) = h_1(1/(2n)) = (-1)^{2n}/(2n)$. Da $\{a_{2n}|n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ nicht-diskrete Teilmenge vom Gebiet $\mathbb{C}$ (Gebietseigenschaft ist aus der Vorlesung bekannt) ist, liefert die Identitätssatz, dass $f = h_1$ auf ganz $\mathbb{C}$. Andererseits können wir auch die Teilfolge $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Hier gilt $a_{2n-1} = -1/(2n-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = 0$. Wir definieren nun die auf dem Gebiet $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $h_2(z) = -z$. Da $h_2(z) = g(z)$ für alle $z \in \{a_{2n-1}|n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ und letzteres eine nicht-diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, folgern wir mithilfe des Identitätssatzes, dass bereits $f = h_2$ auf ganz $\mathbb{C}$. Damit ist aber $h_1(z) = h_2(z)$ für alle komplexen Zahlen z, was den Widerspruch $h_1(1) = 1 = -1 = h_2(1)$ liefert. Damit haben wir gezeigt, dass es kein g wie oben beschrieben gibt. Das heißt, es gibt keine holomorphe Fortsetzung von f an $z = 0$, sodass f bei $z = 0$ keine hebbare Singularität hat. Wir schließen nun noch aus, dass f eine Polstelle bei $z = 0$ hat. Angenommen, $z = 0$ wäre ein Pol der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ von f. Dann gilt für alle $1 \leq k < N$, dass $\lim_{z\to 0} |z^k f(z)| = \infty$ und $\lim_{z\to 0} |z^N f(z)| \neq 0$ im eigentlichen Sinne. Sei nun N fix und betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgengliedern a_n wie oben angegeben. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und die Eindeutigkeit der Grenzwerte im Falle der Existenz liefert $0 \neq \lim_{n\to\infty} a_n^N f(a_n)$. Andererseits ist nach Einsetzen $\lim_{n\to\infty} a_n^N f(a_n) = \lim_{n\to\infty}[(-1)^n(1/n)^{N+1}] = 0$. Das liefert den Widerspruch $0 \neq 0$. Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, finden wir, dass $z = 0$ keine Polstelle sein kann. Diese haben definitionsgemäß stets endliche Ordnung. Insgesamt haben wir ausgeschlossen, dass f eine Polstelle bzw. eine hebbare Singularität bei $z = 0$ aufweist.
(b) Wir sollen nun eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion mit den in der Aufgabenstellung beschriebenen Eigenschaften angeben. Wir stellen fest, dass $z \mapsto \sin(\pi/2 + \pi/z)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist und eine isolierte Singularität bei $z = 0$

besitzt. Diese ist, wie man durch Laurent-Entwicklung um $z = 0$ leicht sieht, von nicht-verschwindendem Hauptteil, also eine wesentliche Singularität. Insbesondere ist $z = 0$ keine Polstelle der Funktion und auch keine hebbare Singularität. Ferner gilt $\sin(\pi/2+\pi/a_n) = (-1)^{n-1}$, wobei $a_n = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wie im vorangegangenen Aufgabenteil. Da $z = 0$ wesentliche Singularität von $z \mapsto \sin(\pi/2+\pi/z)$, ändert sich durch Betrachtung der Produktfunktion $h : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto -z\sin(\pi/2+\pi/z)$ nichts an dem Typ der Singularität bei $z = 0$ – die Singularität ist weiterhin wesentlich. Überdies liefert die Holomorphie der Faktoren von h auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Holomorphie von h selbst auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für a_n zu $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt ergibt sich $h(a_n) = h(1/n) = (-1) \cdot n^{-1} \sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)(-1)^{n-1}n^{-1} = (-1)^n/n$. Damit erfüllt die Funktion h, die wir soeben definiert haben, die Anforderungen der Aufgabenstellung. $\square$

Aufgabe 44 Seien $f, g : \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zudem habe f bei i eine Polstelle. Wir bezeichnen deren Ordnung mit $N \in \mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte ferner

$$f(i + n^{-1}) = g(i + n^{-1}). \tag{897}$$

Zu zeigen ist, dass entweder $f = g$ oder es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $\lim_{n\to\infty} z_n = i = \lim_{n\to\infty} g(z_n)$. Da f eine Polstelle der Ordnung N bei $z = i$ hat, besitzt $\mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto (z - i)^N f(z)$ eine hebbare Singularität bei $z = i$, mit der Eigenschaft, dass $\lim_{z\to i}[(z-i)^N f(z)] \neq 0$. Wir multiplizieren die angegebene Idenität auf beiden Seiten mit $(i + n^{-1} - i)^N = 1/n^N$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das liefert

$$(1/n)^N f(i + n^{-1}) = 1/n^N g(i + n^{-1}). \tag{898}$$

Nach den Ausführungen zur Hebbarkeit der Singularität bei $z = i$ von $z \mapsto (z - i)^N f(z)$ können wir zumindest die linke Seite der Gleichung auch im Grenzwert $n \to \infty$ betrachten. Hierbei gibt es dann zwei Fälle.

- *Fall 1:* Es gilt auch $0 \neq \lim_{n\to\infty}[(1/n)^N f(i+n^{-1})] = \lim_{n\to\infty}[(1/n)^N g(i+n^{-1})]$. Es gibt zwei Möglichkeiten, die Gleichheit zu gewährleisten. Entweder hat die Funktion $z \mapsto (z - i)^N g(z)$ ebenfalls eine hebbare Singularität bei $z = i$ oder die Singularität von g ist wesentlich. Denn im letztgenannten Fall garantiert der Satz von Casaroti-Weierstrass, dass für alle $\epsilon > 0$, $g(B_\epsilon(i) \setminus \{i\})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist und g ist so beschaffen, dass die Folge $(i + n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(z - i)^N g(z)$ nach Limes-Bildung den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}[(1/n)^N f(i + n^{-1})]$ reproduziert.

- *Fall 2:* Es gilt $0 \neq \lim_{n\to\infty}[(1/n)^N f(i + n^{-1})] \neq \lim_{n\to\infty}[(1/n)^N g(i + n^{-1})]$ und wir erlauben rechts auch uneigentliche Grenzwerte. Dieser Fall kann nicht auftreten, denn dann gäbe es ein $M \in \mathbb{N}$, sodass es unendlich viele $k \geq M$ gibt mit $(1/k)^N f(i + k^{-1}) \neq (1/k)^N g(i + k^{-1})$. Kürzen von $1/k^N$ liefert den Widerspruch, dass $f(i + k^{-1}) \neq g(i + k^{-1})$, aber, nach Voraussetzung auch, $f(i + k^{-1}) = g(i + k^{-1})$.

Somit gibt es zwei Möglichkeiten: Erstens, die holomorphen Fortsetzungen von $(z - i)^N f(z)$ und $(z-i)^N g(z)$ auf der nicht-diskreten Teilmenge $\{i+n^{-1}|n \in \mathbb{N}\}\cup\{i\}$ des Gebiets $\mathbb{C}$ übereinstimmen, somit also $(z - i)^N f(z) = (z - i)^N g(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ gilt.

Damit ist dann $f(z) = g(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. Zweitens, hat $(z-i)^N g(z)$ eine wesentliche Singularität bei $z = i$, damit dann auch $g(z)$. Da $g(z)$ eine wesentliche Singularität bei $z = i$ hat, liefert der Satz von Casaroti-Weierstrass, dass das Bild von $B_\epsilon(i) \setminus \{i\}$ für jedes $\epsilon > 0$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. Wegen der Dichtheit des Bildes wie gerade beschrieben, können wir eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, sodass $\lim_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lim_{n\in\mathbb{N}} g(z_n) = z$, wobei $z \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt ist. Insbesondere gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften, dass $\lim_{n\to\infty} z_n = i = \lim_{n\to\infty} g(z_n)$. Insbesondere sind die beiden Möglichkeit für g verschieden, sodass tatsächlich das exklusive "oder" aus der Aufgabenstellung resultiert. □

Aufgabe 45 Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = 1/z + \exp((z-i)/(z^2+1))$. Einleitend stellen wir fest, dass f auf dem gesamten Definitionsbereich holomorph ist.
(a) Zu bestimmen ist jeweils der Typ der Singularität von f bei $z \in \{0, -i, i\}$. Wir behandeln zuerst den Fall $z = 0$. Wir stellen fest, dass $\lim_{z\to 0} |f(z)| = \infty$ und $\lim_{z\to 0} |f(z)z| = 1 \neq 0$. Damit ist $z = 0$ eine Polstelle von f, genauer eine einfache Polstelle von f. Wir behandeln nun den Fall, $z = i$. Zuerst stellen wir fest, dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\}$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{z} + \exp((z+i)^{-1}), \tag{899}$$

denn $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$. Sei nun $B_\epsilon(i) \setminus \{i\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\}$ eine punktierte Umgebung von i für $0 < \epsilon < 1$ beliebig. Dann gilt

$$|f(z)| \leq |1/z| + |\exp((z-i)/(z^2+1))| \leq 1/(1-\epsilon) + \exp(1/(1-\epsilon)), \tag{900}$$

weil die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ konvex ist. Ferner haben wir die umgekehrte Dreiecksungleichung im Nenner bemüht. In der Konsequenz ist f in einer hinreichend kleinen Umgebung von $z = i$ beschränkt. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz ist $z = i$ damit eine hebbare Singularität von f. Zuletzt betrachten wir den Fall der Singularität bei $z = -i$. Für alle $z \in B_\epsilon(-i)$ $(0 < \epsilon < 1)$, gilt die Reihenentwicklung von f um $z = -i$,

$$f(z) = \frac{1}{-i + (z+i)} + \exp\left(\frac{1}{z+i}\right) = i \sum_{k=0}^{\infty} i^{-k} (z+i)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(z+i)^k}. \tag{901}$$

Aus dieser Entwicklung sehen wir bereits, dass der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um $-i$ nicht abbricht, d.h., keine endliche Reihe in Potenzen von $(z+i)^{-1}$ ist. Laut Vorlesung ist das äquivalent dazu, dass es sich bei $z = -i$ um eine wesentliche Singularität von f handelt. Zusammenfassend stellen wir fest, dass die drei isolierten Singularitäten von f die folgenden Typen haben: $z_1 = i$ ist ein hebbare Singularität, $z_2 = 0$ ist eine Polstelle der Polstellenordnung 2 und $z_3 = -i$ ist eine wesentliche Singularität. Wir sollen in einem zweiten Schritt die Residuen $\mathrm{Res}(f, z = z_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ berechnen. Für hebbare Singularitäten holomorpher Funktionen ist bereits aus der Vorlesung bekannt, dass das Residuum an dieser Stelle verschwindet. Für die zu untersuchende Funktion f bedeutet das, dass $\mathrm{Res}(f, z = z_1) = 0$. Für die Polstelle erster Ordnung lassen wir $\gamma_\epsilon : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\}, t \mapsto \epsilon \exp(it)$ mit $0 < \epsilon < 1$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\epsilon} f(z) dz \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon \exp(it)}{\epsilon \exp(it)} dt + \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\epsilon} \exp\left(\frac{z-i}{z^2+1}\right) dz \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{2\pi i \epsilon}{2\pi i \epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0^+} 0 \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{902}$$

denn die Integrandenfunktion des zweiten Integrals in Zeile 2 ist holomorph in dem von γ_ϵ eingeschlossenen Gebiet. Somit finden wir $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$. Zuletzt berechnen wir $\operatorname{Res}(f, -i)$. Wir arbeiten wiederum direkt mit der Definition: Sei für $0 < \epsilon < 1$ der Weg $\Gamma_\epsilon : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\}, t \mapsto -i + \epsilon \exp(it)$ definiert. Er durchläuft, analog zur Situation bei γ_ϵ, $\partial B_\epsilon(z = -i)$ einfach im positiven Sinne. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, -i) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\epsilon} f(z) dz \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{z} + \lim_{\epsilon \to 0^+} dz \exp\left(\frac{1}{z+i}\right) \\
&= 0 + \lim_{\epsilon \to 0^+} \sum_{k=0, k \neq 1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{k!} \frac{1}{(z+i)^k} + \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{z+i} \\
&= 0 + \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon \exp(it)}{\epsilon \exp(it)} dt \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{2\pi i \epsilon}{2\pi i \epsilon} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{903}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $1/z$ holomorph in $B_\epsilon(-i)$ ist, das Zirkulationsintegral über Γ_ϵ also für alle $0 < \epsilon < 1$ identisch verschwindet. Zudem wurde die insbesondere auf ganz $B_\epsilon(-i) \setminus \{-i\}$ gleichmäßig konvergente Laurent-Entwicklung von $\exp((z+i)^{-1})$ verwendet. Die gleichmäßige Konvergenz erlaubte hierbei das Vertauschen des Summations- und Integralzeichens. Eine bekannte Identität liefert, dass alle Beiträge von $1/(z+i)^k$ für $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ identisch verschwinden, unabhängig von der Wahl von $0 < \epsilon < 1$. Damit verschwindet auch die Summe über eben diese Beiträge unabhängig von ϵ mit $0 < \epsilon < 1$, also erst recht der Limes $\epsilon \to 0^+$. Den Beitrag von $(z+i)^{-1}$ zum Residuum haben wir schließlich von Hand ausgerechnet. Insgesamt stellen wir also fest, dass $\operatorname{Res}(f, 0) = 1 = \operatorname{Res}(f, -i)$ und $\operatorname{Res}(f, i) = 0$.
(b) Gegeben ist nun der, offenbar geschlossenen und $\mathcal{C}^1$-Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\}, t \mapsto \exp(-2it)$. Wir sehen, dass γ das $\partial B_2(0)$ zweifach im negativen Sinne durchläuft. Folglich ist $n(\gamma, z) = -2$ für alle $z \in B_2(0) \supset \{-i, 0, i\}$. Wir können nun den Residuensatz anwenden, um

$$I \equiv \oint_\gamma f(z) dz \tag{904}$$

zu berechnen. Dieser liefert

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i(n(\gamma,0)\mathrm{Res}(f,0) + n(\gamma,i)\mathrm{Res}(f,i) + n(\gamma,-i)\mathrm{Res}(f,-i)) \\ &= 2\pi i((-2)\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + (-2)\cdot 1) \\ &= -8\pi i. \end{aligned} \tag{905}$$

Der gesuchte Wert ist also $I = -8\pi i$. □

Aufgabe 46 (a) Definiere $\Delta \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le 2|y| \le x \le 6\}$. Gesucht ist der Wert des Integrals

$$I = \int_\Delta (x-y)^2 \, d(x,y). \tag{906}$$

Dieses ist wohldefiniert, da $\Delta \subset [0,6] \times [-3,3]$, d.h., Teilmenge eines kompakten Quaders ist, und die Integrandenfunktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x-y)^2$ stetig, insbesondere also in $L^1(\Delta)$ ist. Wir sehen, dass Δ ein Dreieck beschreibt, welches äquivalent als $\Delta = \mathrm{Conv}(\{(0,0),\ (-3,6),(3,6)\}$ aufgefasst werden kann. Insbesondere ist das Dreieck achsensymmetrisch bzgl. der x Achse, d.h., $(x,y) \mapsto (x,-y)$ bildet Δ auf sich selbst ab. Wir bezeichnen $\Delta \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ =: \Delta_+$ und $\Delta \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- =: \Delta_-$. Bis auf Vernachlässigung der Nullmenge $[0,6] \times \{0\}$ bzgl. des Lebesgue-Borel Maßes auf dem $\mathbb{R}^2$ gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_\Delta (x-y)^2 \, d(x,y) &= \int_{\Delta_+} (x-y)^2 \, d(x,y) + \int_{\Delta_-} (x-y)^2 \, d(x,y) \\ &= \int_0^6 \left(\int_0^{x/2} (x-y)^2 \, dy \right) dx + \int_0^6 \left(\int_{-x/2}^0 (x-y)^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_0^6 \left(\int_0^{x/2} (x-y)^2 \, dy \right) dx - \int_0^6 \left(\int_{x/2}^0 (x+y)^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_0^6 \left(\int_0^{x/2} (x-y)^2 \, dy \right) dx + \int_0^6 \left(\int_0^{x/2} (x+y)^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_0^6 \left(\int_0^{x/2} [(x-y)^2 + (x+y)^2] \, dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^6 \left(\int_0^{x/2} (x^2+y^2) \, dy \right) dx. \end{aligned} \tag{907}$$

Hierbei haben wir im ersten Schritt die o.g. Zerlegung von Δ in Δ_+, Δ_- bis auf eine Nullmenge verwendet. Im zweiten Schritt fand der Satz von Fubini Anwendung. Im dritten Schritt haben wir den Transformationssatz für Integrale angewendet: Hierbei wurde $\Delta_- \to \Delta_+$ vermöge der Spieglung an der x-Achse, d.h., durch den $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $(x,y) \mapsto (x,-y)$. Dabei wurde ausgenutzt, dass sich die Transformationsformel auf den eindimensionalen Fall reduziert, denn die x-Koordinate bleibt von der o.g. Transformation unberührt. Im vierten Schritt haben wir die

Orientierung des Integrationsintervalls im inneren Integral umgekehrt, was den Vorzeichenwechsel herbeiführte. Im fünften Schritt wurde die Linearität des Integrals bemüht, um die Summe nunmehr über dem Gleichen Bereich auszuführenden Integrale in ein Integral umzuschreiben. Im sechsten Schritt wurde der Integrand mittels erster und dritter Binomi'scher Formel expandiert und vereinfacht sowie zuletzt die sich ergebende Konstante 2 vor das Integral gezogen. Wir finden für das innere Integral

$$\int_0^{x/2} (x^2 + y^2) dy = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{8} = \frac{13x^3}{24}. \tag{908}$$

Dieses Ergebnis verwendend, berechnen wir das äußere Integral und damit I,

$$I = \int_0^6 \frac{13x^3}{24} dx = \left.\frac{13x^4}{96}\right|_0^6 = \frac{13 \cdot 6^3}{16} = \frac{13 \cdot 3^3}{2} = \frac{351}{2}. \tag{909}$$

(b) Gegeben sei nun die Funktion $f : K_{1,\infty}(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto (1 + z^2)^{-1}$. Wir sollen für $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2\exp(it)$ den Wert des Integrals

$$J = \int_\gamma f(z) dz \tag{910}$$

berechnen und sodann entscheiden, ob f eine komplexe Stammfunktion auf $K_{1,\infty}(0)$ besitzt. Wir beachten zunächst, dass f nur an den Stellen $\pm i$ jeweils eine isolierte Singularität in der Form einer Polstelle der Ordnung 1 besitzt. Da $\pm i \notin K_{1,\infty}(0)$ ist f auf $K_{1,\infty}(0)$ holomorph. Für die entsprechenden Residuen gilt

$$\mathrm{Res}(f, i) = 1/(2i) \ \& \ \mathrm{Res}(f, -i) = -1/(2i). \tag{911}$$

Da γ den Kreisrand $\partial B_2(0) \subseteq K_{1,\infty}(0)$ einfach und im positiven Sinne durchläuft, liefert uns der Residuensatz

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i(n(\gamma, i)\mathrm{Res}(f, i) + n(\gamma, -i)\mathrm{Res}(f, -i)) = 0. \tag{912}$$

Wir zeigen nun, dass f eine komplexe Stammfunktion auf dem Gebiet $K_{1,\infty}(0)$ hat. Sei dazu Γ ein ganz in $K_{1,\infty}(0)$ verlaufender geschlossener Weg. Da $\pm i$ in derselben Zusammenhangskomponente von $K_{1,\infty}(0)^{\complement} = \mathbb{C} \setminus K_{1,\infty}(0)$ liegen, gilt $n(\Gamma, i) = n(\Gamma, -i)$. Zusammen mit dem Residuensatz finden wir wiederum

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z) dz &= 2\pi i \left(n(\Gamma, i)\mathrm{Res}(f, i) + n(\Gamma, -i)\mathrm{Res}(f, -i)\right) \\ &= \pi(n(\Gamma, i) - n(\Gamma, -i)) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{913}$$

Damit ist gezeigt, dass das komplexe Linienintegral von f über jede geschlossene und in $K_{1,\infty}(0)$ verlaufenden Kurve den Wert Null liefert. Laut Vorlesung ist dies auf dem Gebiet $K_{1,\infty}(0)$ äquivalent dazu, dass das konkrete, auf $K_{1,\infty}(0)$ holomorphe f eine komplexe Stammfunktion besitzt. Damit hat f also auf $K_{1,\infty}(0)$ eine komplexe Stammfunktion. □

Aufgabe 47 Seien $r, R \geq 0$ mit $r < R$ vorgegeben und seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus K_{r,R}(0)$. Wir definieren die Funktion $f : K_{r,R}(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto (z-a)/(z-b)$. Sie ist nach Voraussetzung an a, b holomorph. Zu zeigen ist, dass es genau dann einen holomorphen Logarithmus von f gibt, wenn a, b in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K_{r,R}(0)$ liegen. Definitionsgemäß ist die Existenz eines holomorphen Logarithmus von f gleichbedeutend damit, dass es eine holomorphe Funktion $\lambda : K_{r,R}(0) \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $\exp(\lambda(z)) = f(z)$ für alle $z \in K_{r,R}(0)$. Ableiten liefert $\lambda'(z)\exp(\lambda(z)) = f'(z)$ bzw. $\lambda'(z) = f'(z)/f(z)$, da f nullstellenfrei auf $K_{r,R}(0)$ ist. Der holomorphe Logarithmus λ existiert also als Stammfunktion von $f'(z)/f(z)$ auf $K_{r,R}(0)$ genau dann, wenn für jeden geschlossenen Weg Γ, der ganz in $K_{r,R}(0)$ verläuft, gilt

$$\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0. \tag{914}$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass Γ den Ursprung einfach und positiv umläuft. Da f holomorph auf $K_{r,R}(0)$ und letzteres offen ist, existiert f' dort und es gilt

$$f'(z) = \frac{1}{z-b} - \frac{z-a}{(z-b)^2}. \tag{915}$$

Damit finden wir für $z \in K_{r,R}(0)$, dass

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}. \tag{916}$$

Das Kurvenintegral von f'/f entlang Γ ist also

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \oint_\Gamma \frac{dz}{z-a} - \oint_\Gamma \frac{dz}{z-b} \\ &= 2\pi i \left(n(\Gamma, a)\mathrm{Res}((z-a)^{-1}, a) - n(\Gamma, b)\mathrm{Res}((z-b)^{-1}, b)\right) \\ &= 2\pi i(n(\Gamma, a) - n(\Gamma, b)).\end{aligned} \tag{917}$$

Da $\mathrm{Spur}(\Gamma) \subseteq K_{r,R}(0)$, ist der Wert des Kurvenintegrals aus $\{\pm 2\pi\}$ falls a, b in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K_{r,R}(0)$ und der Wert des Kurvenintegrals ist gleich 0 falls a, b in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K_{r,R}(0)$ liegen. Denn im ersten Fall ist $n(\Gamma, a) = 1$, $n(\Gamma, b) = 0$, falls $|a| \leq r$ und $|b| \geq R$ oder $n(\Gamma, a) = 0$, $n(\Gamma, b) = 1$, falls $|a| \geq R$ und $|b| \leq r$. Insbesondere ist bei beiden Möglichkeiten $n(\Gamma, a) - n(\Gamma, b) \neq 0$, sodass das Kurvenintegral nicht verschwindet. Das ist dann äquivalent zur Nichtexistenz des holomorphen Logarithmus. Im zweiten Fall ist $n(\Gamma, a) = 1 = n(\Gamma, b)$ falls $|a|, |b| \leq r$ und $n(\Gamma, a) = 0 = n(\Gamma, b)$ falls $|a|, |b| \geq R$. Dann gilt in jedem Fall $n(\Gamma, a) - n(\Gamma, b) = 0$ und das Konturintegral verschwindet. Letzterer Sachverhalt ist aber gerade äquivalent zur Existenz des holomorphen Logarithmus λ, wie oben ausgeführt. □

Aufgabe 48 Wir berechnen das Integral

$$I = \oint_{\partial B_3(i)} \frac{dz}{\exp(3z) - 1}, \tag{918}$$

wobei $\partial B_3(i)$ einfach und im positiven Sinne durchlaufen wird. Wir stellen fest, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C}, z \mapsto (\exp(3z) - 1)^{-1} \tag{919}$$

für die Wahl $M = \{2\pi ni/3 | n \in \mathbb{Z}\}$ holomorph ist. M ist offensichtlich eine nicht-diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$, denn für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $M \cap B_{\pi/50}(2\pi ik/3) = \{2\pi ik/3\}$. f ist also eine meromorphe Funktion, die an den Stellen $z \in M$ jeweils eine wesentliche Singularität aufweist. Offenbar gilt $M \cap \partial B_3(i) = \emptyset$ und $M \cap B_3(i) = \{0, 2\pi i/3\}$, denn $3 < \pi < 4$ impliziert, dass $-2i < 2\pi ik/3 < 4i$ lediglich für $k \in \{0, 1\}$ gilt. Das gesuchte Inetgral lässt sich einfach mithilfe des Residuensatzes berechnen. Die benötigten Residuen errechnen sich laut einem Vorlesungsresultat im Falle wesentlicher Singularitäten zu

$$\mathrm{Res}(f, z = 0) = \lim_{z \to 0} \left[\frac{z}{\exp(3z) - 1} \right] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{3 \exp(3z)} \right] = \frac{1}{3}, \tag{920}$$

$$\mathrm{Res}(f, z = 2\pi i/3) = \lim_{z \to 2\pi i/3} \left[\frac{z - 2\pi i/3}{\exp(3z) - 1} \right] = \lim_{z \to 2\pi i/3} \left[\frac{1}{3 \exp(z)} \right] = \frac{1}{3}. \tag{921}$$

Dabei haben wir die Regel von L'Hopital für holomorphe Funktionen im jeweils zweiten Schritt verwendet. Zuletzt stellen wir fest, dass $B_3(0)$ als offene Kreisscheibe ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Der Residuensatz liefert nun

$$I = 2\pi i \left(n(\partial B_3(i), 0)\mathrm{Res}(f, 0) + n(\partial B_3(i), 2\pi i/3)\mathrm{Res}(f, 2\pi i/3) \right) = \frac{4\pi i}{3}, \tag{922}$$

wobei wir verwendet haben, dass $n(\partial B_3(i), 0) = 1 = n(\partial B_3(i), 2\pi i/3)$ nach der Spezifikation in der Aufgabenstellung. □

Aufgabe 49 Gegeben sei die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion $f(z) = \exp(z)/(z^2 - 1)$.
(a) Wir bestimmen alle Pole von f und die dazugehörigen Residuen. Da $\exp(z)$ eine ganze Funktion ist, bleiben lediglich die Nullstellen des Nennerpolynoms als Polstellen übrig. Damit sind $z \in \{+1, -1\}$ die einzigen Polstellen von f. Als Polynom vom Grad 2 zerfällt f über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Da die beiden Nullstellen verschieden sind, handelt es sich jeweils um einfache Polstellen. Wir finden für die Residuen $\mathrm{Res}(f, 1) = \exp(1)/2$ und $\mathrm{Res}(f, -1) = -\exp(-1)/2$.
(b) Sei $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2\exp(it)$ gegeben. Dies ist ein einfach geschlossener, glatter Weg, der das einfach zusammenhängende Gebiet $B_2(0) \subseteq \mathbb{C}$ berandet. Es ist $\{-1, 1\} \subseteq B_2(0)$, sodass $f|_{\mathrm{Spur}(\gamma_1)}$ frei von Singularitäten ist. Zudem werden die beiden Pole einfach im positiven Sinne von γ_1 umschlossen. Wir berechnen also mithilfe des Residuensatzes

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i \left(n(\gamma_1, 1)\mathrm{Res}(f, 1) + n(\gamma_1, -1)\mathrm{Res}(f, -1) \right) \tag{923}$$

$$= 2\pi i \sinh(1), \tag{924}$$

wobei wir $n(\gamma_1, 1) = 1 = n(\gamma_2, -1)$.
(c) Sei $\gamma_2 : [-\pi, 3\pi] \to \mathbb{C}$ der Weg definiert durch

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} 1 + \exp(it) & t \in [-\pi, \pi] \\ -1 + \exp(i(\pi - t)) & t \in [\pi, 3\pi] \end{cases} . \tag{925}$$

Wir stellen fest, dass $\gamma_2 = \Gamma_1 * \Gamma_2$, wobei $\Gamma_1 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 1 + \exp(it)$ and $\Gamma_2 : [\pi, 3\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto -1 + \exp(-i(t - \pi))$. Wir sehen, dass deswegen

$$\oint_{\gamma_2} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)dz. \tag{926}$$

Da Γ_1 das einfach zusammenhängende Gebiet $B_1(1)$ und Γ_2 das einfach zusammenhängende Gebiet $B_1(-1)$ jeweils einfach umschließen, können wir die beiden Integrale jeweils separat mit dem Residuensatz ausrechnen. Hierbei beachten wir, dass $n(\Gamma_1, 1) = 1$ und $n(\Gamma_1, -1) = 0$ sowie $n(\Gamma_2, -1) = -1$ und $n(\Gamma_2, 1) = 0$. Dies Residuen hatten wir bereits in Teilaufgabe (a) berechnet. Der Residuensatz liefert also

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)dz = 2\pi i \left(n(\Gamma_1, 1)\mathrm{Res}(f, 1) + n(\Gamma_1, -1)\mathrm{Res}(f, -1)\right) = \pi i \exp(1) \tag{927}$$

$$\oint_{\Gamma_2} f(z)dz = 2\pi i \left(n(\Gamma_2, 1)\mathrm{Res}(f, 1) + n(\Gamma_2, -1)\mathrm{Res}(f, -1)\right) = \pi i \exp(-1). \tag{928}$$

Damit finden wir für das gesuchte Integral schlussendlich

$$\oint_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i \cosh(1). \tag{929}$$

Dabei haben wir $\cosh(z) = 0.5(\exp(z) + \exp(-z))$ für $z \in \mathbb{C}$ verwendet. □

Aufgabe 50 Definiere die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\} \to \mathbb{C}, z \mapsto 4/(z(z^2 - 2))$.
(a) Wir berechnen zuerst auf $K_{0,1}(0) \equiv \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| 1\}$ die Laurent-Entwicklung von f.

$$f(z) = \frac{4}{z(z^2 - 2)} = \frac{-2}{z} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{2}} = \frac{-2}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-z^{2k-1}}{2^{k-1}}. \tag{930}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $z \in K_{0,1}(0) \Rightarrow z^2 < 1 \Rightarrow z^2/2 < 1/2 < 1$ und konnten somit die Formel zur Berechnung der geometrischen Reihe anwenden. Wir berechnen als nächstes die Laurentreihe von f auf $K_{2,4}(0) \equiv \{z \in \mathbb{C} | 2 < |z| < 4\}$.

$$f(z) = \frac{4}{z(z^2 - 2)} = \frac{4}{z^3} \frac{1}{1 - \frac{2}{z^2}} = \frac{4}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{z^{2k+3}}, \tag{931}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $z \in K_{2,4}(0) \Rightarrow 2 < z < 4 \Rightarrow 4 < z^2 < 16 \Rightarrow 1/8 < 2/z^2 < 1/2 < 1$. Das erlaubte uns, die geometrische Reihenformel anzuwenden.
(b) Wir berechnen zunächst das Integral

$$I_1 = \oint_{\partial B_1(0)} f(z)dz. \tag{932}$$

Wir stellen fest, dass f auf $\mathbb{C}$ meromorph ist. In dem von $\partial B_1(0)$ berandeten Elementargebiet $B_1(0)$ liegt lediglich eine Singularität von f, nämlich die einfache Polstelle bei $z=0$. Auf $\partial B_1(0)$ liegen keine Singularitäten von f. f hat bei $z=0$ das Residuum $\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}[zf(z)]=-2$. Wir durchlaufen $\partial B_1(0)$ in der natürlichen Parametrisierung, d.h., spezifizieren eine Parametrisierung, die $z=0$ einfach und im positiven Sinne umschließt. Damit ist $n(\partial B_1(0),0)=1$. Der Residuensatz liefert nun

$$\oint_{\partial B_1(0)} f(z)dz = 2\pi i n(\partial B_1(0),0)\mathrm{Res}(f,0) = -4\pi i. \tag{933}$$

Als letzten Schritt berechnen wir die Differenz

$$D = \oint_{\partial B_2(0)} f(z)dz - \oint_{\partial B_{0.5}} f(z)dz. \tag{934}$$

Analog zu gerade eben stellen wir fest, dass $\partial B_2(0)$ und $\partial B_{0.5}(0)$ jeweils die Elementargebiete $B_2(0)$ und $B_{0.5}(0)$ beranden. Ferner hat f keine Singularitäten, die in $\partial B_{0.5}(0)\cup\partial B_2(0)$ liegen. In $B_{0.5}(0)$ liegt lediglich die Polstelle bei $z=0$, $B_2(0)$ hingegen enthält die volle Polstellenmenge $\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$. Wir spezifizieren eine Parametrisierung von je $\partial B_{0.5}(0)$ und $\partial B_2(0)$, sodass das eingeschlossene Elementargebiet einfach und im positiven Sinne durchlaufen wird. Der Residuensatz liefert nun

$$\begin{aligned} D = 2\pi i &\Big(n(\partial B_2(0),\sqrt{2})\mathrm{Res}(f,\sqrt{2}) + n(\partial B_2(0),0)\mathrm{Res}(f,0) \\ &+n(\partial B_2(0),-\sqrt{2})\mathrm{Res}(f,-\sqrt{2})\Big) - 2\pi i n(\partial B_{0.5}(0),0)\mathrm{Res}(f,0) \\ &= 2\pi i\Big(\mathrm{Res}(f,\sqrt{2})+\mathrm{Res}(f,-\sqrt{2})\Big). \end{aligned} \tag{935}$$

Die beiden gesuchten Residuen berechnen wir, indem wir das bekannte Vorlesungresultat zur Berechnung von Residuen einer meromorphen Funktion im Falle einfacher Polstellen anwenden. Das liefert

$$\mathrm{Res}(f,\sqrt{2}) = \lim_{z\to\sqrt{2}}\Big[(z-\sqrt{2})f(z)\Big] = 1, \tag{936}$$

$$\mathrm{Res}(f,-\sqrt{2}) = \lim_{z\to-\sqrt{2}}\Big[(z+\sqrt{2})f(z)\Big] = 1. \tag{937}$$

Somit finden wir $D=4\pi i$. □

Aufgabe 51 (H07T1A1) Sei $a>1$. Zu zeigen ist, dass die Gleichung $z\exp(a-z)=1$ im Einheitskreis $\mathbb{E}$ genau eine Lösung hat, und diese reell ist, mit $z\in(0,1)$. Wir zeigen zunächst die Existenz genau einer Lösung der obenstehenden Gleichung in $\mathbb{E}$. Zu diesem Zwecke formen wir sie in $z-\exp(z-a)=0$ um und definieren die auf dem Gebiet $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z-\exp(z-a)$. Zudem führen wir die beiden Hilfsfunktionen $p,q:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ein, die jeweils durch $p(z)=z$ und $q(z)=-\exp(z-a)$ definiert sind. Offenbar gilt für alle $z\in\mathbb{C}\supset\mathbb{E}\cup\partial\mathbb{E}$, dass $f(z)=p(z)+q(z)$. Für alle $z\in\partial\mathbb{E}$ gilt zudem $|p(z)|=|z|=1$ und $|q(z)|=|\exp(z-a)|\leq|\exp(1-a)|<1$, da $a>1$ und die (reelle) Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist. Folglich gilt für alle $z\in\partial\mathbb{E}$, dass $|p(z)|>|q(z)|$.

Der Satz von Rouché garantiert nun, dass $p+q$ und p erstens beide nullstellenfrei auf $\partial\mathbb{E}$ sind und zweitens, dass p und q in $\mathbb{E}$ dieselbe Anzahl an Nullstellen haben, gezählt jeweils mit der Vielfachheit der zugehörigen Nullstelle. Da p nur die einfache Nullstelle $z=0$ hat, hat auch $p+q=f$ nur eine, einfache Nullstelle in $\mathbb{E}$. Damit ist nachgewiesen, dass $z\exp(a-z)=1$ tatsächlich genau eine Lösung in $\mathbb{E}$ besitzt. Wir zeigen nun, dass diese reell ist. Angenommen, $\Im[z_0]\neq 0$, wo z_0 die soeben gefundene, einzige Lösung der Gleichung auf $\mathbb{E}$ bezeichnet. Mit $z_0\in\mathbb{E}$ ist auch $\bar{z}_0\in\mathbb{E}$, da die komplexe Konjugation eine isometrische Abbildung ist. Nun gilt

$$1=\overline{1}=\overline{z_0\exp(a-z_0)}=\bar{z}_0\overline{\exp(a-z_0)}=\exp(\overline{a-z_0})=\exp(a-\bar{z}_0), \tag{938}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung von exp allesamt reell sind und $a>1$ insbesondere eine reelle Zahl ist. Die Morphismeneigenschaften der komplexen Konjugation sind ebenfalls in die Rechnung eingegangen. In jedem Fall ist nun $\bar{z}_0$ eine weitere Lösung der Gleichung $1=z\exp(a-z)$, die wegen $\Im[z]_0\neq 0$ von z_0 echt verschieden ist. Da aber $z_0,\bar{z}_0\in\mathbb{E}$ haben wir den Widerspruch zu der oben nachgewiesenen Eindeutigkeit der Lösung der zu untersuchenden Gleichung. Also war die Annahme, $\Im[z_0]\neq 0$ falsch, und es gilt stattdessen $\Im[z_0]=0$. Letzteres ist äquivalent zu $z_0\in(-1,1)\oplus i\cdot 0$, also z_0 reell zusätzlich. Es bleibt zu zeigen, dass z_0 positiv ist. Dazu formen wie die Gleichung in die Darstellung $z=\exp(a-z)$ um. Die rechte Seite ist für alle reellen z echt größer als 0, sodass wegen der Gleichheit gilt $z>0$. Mit den obenstehenden Resultaten finden wir also $z_0\in(0,1)\oplus i\cdot 0$, wie behauptet. $\square$

Aufgabe 52 (F04T1A3) Sei $\alpha\in[-1,1]$. Zu zeigen ist, dass für jedes α das Polynom $p_\alpha(z)=z^6+i\alpha z+1$ genau 3 Nullstellen, gezählt mit Vielfachheiten, in der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H}^+\equiv\{z\in\mathbb{C}|\Im[z]>0\}$ hat. Als Polynomfunktion ist p_α für jede Wahl von $\alpha\in[-1,1]$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Wir definieren nun den Weg γ durch Konkatenation $\gamma=\gamma_2*\gamma_1$, wobei

$$\gamma_1:[-2,2]\to\mathbb{C}, t\mapsto t \tag{939}$$
$$\gamma_2:[0,\pi]\to\mathbb{C}, t\mapsto 2\exp(it). \tag{940}$$

Offenbar ist γ ein einfach geschlossener Weg, der in $\mathbb{C}$ verläuft. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, ist γ nullhomolog. Definiere zusätzlich die beiden auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ durch $f(z)=z^6+1$ und $g(z)=i\alpha z$ für eine beliebige, aber feste Wahl von $\alpha\in[-1,1]$. Wir behaupten, dass $|f(z)|>|g(z)|$ für alle $z\in\mathrm{Spur}(\gamma)$. Für den Fall, dass $z\in\mathrm{Spur}(\gamma_1)$, gilt nämlich $|f(z)|=|t^6+1|=|t|^6+1$, da $t\in[-2,2]\Rightarrow t^2\in[0,4]$, und $|g(z)|=|i\alpha t|\leq|t|$. Ohne Einschränkung können wir uns also auf die Untersuchung von $z=t\in[0,2]$ beschränken, denn $|f(z)|$ und $|g(z)|$ sind auf der reellen Achse symmetrisch. Andererseits gilt für $z=t=0$ mit den Darstellung von soeben, dass $|f(z)|=1>|g(z)|=0$, für $z=t\in(0,1)$, dass $|f(z)|>1>|g(z)|$, für $z=t=1$, dass $|f(z)|=2>1\geq|g(z)|$, für $t\in(1,2)$, dass $|f(z)|>2>|g(z)|$ und für $z=t=2$, dass $|f(z)|=63>2\geq|g(z)|$. Wegen der oben genannten Symmetrie haben wir also $|f(z)|>|g(z)|$ für alle $z\in\mathrm{Spur}(\gamma_1)$. Wir zeigen, dass $|f(z)|>|g(z)|$ auch für alle $z\in\mathrm{Spur}(\gamma_2)$ gilt. Sei $z\in\mathrm{Spur}(\gamma_2)$. Dann gibt es $t\in[0,\pi]$, sodass $z=2\exp(it)$. Wir schätzen ab, $|f(z)|=|64\cdot\exp(6it)+1|\geq$

$||64| - |1|| = 63$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung für die Standardnorm auf $\mathbb{C}$. Zudem ist $|g(z)| \leq |2\exp(it)| = 2$. Da $63 > 2$, ist $|f(z)| > |g(z)|$ für beliebiges, und damit für alle, $z \in \mathrm{Spur}(\gamma_2)$. Insgesamt ist somit $|f(z)| > |g(z)|$ für alle $z \in \mathrm{Spur}(\gamma_1) \cup \mathrm{Spur}(\gamma_2) = \mathrm{Spur}(\gamma)$. Nach dem Satz von Rouché haben also $f + g = p_\alpha$ und f auf $B_2(0) \cap \mathbb{H}^+$ genau gleich viele Nullstellen, jeweils gezählt mit Vielfachheiten. Die Nullstellen von $f(z) = z^6 + 1$ in $\mathbb{C}$ sind schnell gefunden: Diese sind für $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$z_k = \exp\left(\frac{i\pi(1+2k)}{6}\right), \tag{941}$$

woraus wir ablesen, dass lediglich $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{H}^+ \cap B_2(0)$ gilt. Also hat f und, nach dem Argument auf Basis des Satzes von Rouché, auch p_α genau 3 Nullstellen in $\mathbb{H}^+ \cap B_2(0)$. Indem wir das obige Argument für den Weg $\gamma' = (-\gamma_2) * \gamma_1^-$ wiederholen, stellen wir fest, dass p_α und f auch in $B_2(0) \cap \mathbb{H}^-$, wo $\mathbb{H}^- \equiv \{z \in \mathbb{C} | \Im[z] < 0\}$ genau gleich viele Nullstellen haben. Da die Nullstellen von f in $\mathbb{H}^- \cap B_2(0)$ gerade z_3, z_4, z_5 mit obigem z_k sind, haben wir also in $B_2(0) \setminus ((-2, 2) \oplus i0)$ genau 6 Nullstellen von f und p_α gefunden. Der Fundamentalsatz der Algebra liefert nun, dass p_α und f als Polynom vom Grad 6 keine weiteren Nullstellen haben können. Insbesondere sind somit für beliebiges $\alpha \in [-1, 1]$ alle Nullstellen von p_α in $B_2(0)$, und genau drei davon in $B_2(0) \cap \mathbb{H}^+ \subseteq \mathbb{H}^+$. Somit haben wir gezeigt, dass p_α tatsächlich genau drei Nullstellen in $\mathbb{H}^+$ für eine beliebige Wahl von $\alpha \in [-1, 1]$ hat. □

Aufgabe 53 (F07T3A3) Sei $G = \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_+)$ die geschlitzte Ebene. Zu zeigen ist, dass es eine konforme Abbildung $\Phi : G \to \mathbb{E}$ gibt. Bekanntermaßen ist die geschlitzte Ebene G einfach zusammenhängend und wegen $0 \notin G$ wissen wir bereits, dass $G \neq \mathbb{C}$. Somit gibt es laut dem Riemann'schen Abbildungssatz (mindestens) eine biholomorphe, also konforme, Abbildung $\Phi : G \to \mathbb{E}$. Wir geben eine solche explizit an. Zuerst bilden wir $G \to iG = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ durch die Vorschrift $z \mapsto iz$ ab. Das ist eine Rotation um den Winkel $\pi/2$ im positiven Sinne, also eine konforme Abbildung. Da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ebenfalls ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, existiert eine holomorpher Zweig des Logarithmus dort, und damit ein holomorpher Zweig der dritten Wurzel, $\sqrt[3]{.} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < \infty, \mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi/3)\} =: \mathbb{S}_{0,2\pi/3}$ (Punktierter Sektor der Ebene, der durch die Halbstrahlen bei $\phi = 0$ und $\phi = 2\pi/3$ berandet wird.) gibt. Diese Abbildung ist konform, nicht aber biholomorph. Nun rotieren wir die letztgenannte Menge um $\exp(i\pi/6)$ im Gegenuhrzeigersinn, und erhalten $\exp(i\pi/6)\mathbb{S}_{0,2\pi/3}$. Das ist eine Teilmenge der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H}^+ \equiv \{z \in \mathbb{C} | \Im[z] > 0\}$. Die Menge $\mathbb{H}^+$ ist ebenfalls einfach zusammenhängend und wir können sie vermöge der Cayley-Transformation $z \mapsto (i - z)/(i + z)$ auf $\mathbb{E}$ biholomorph, insbesondere also konform, abbilden. Zusammenfassend finden wir, dass (eine) gewünschte konforme Abbildung $\Phi : G \to \mathbb{E}$ gegeben ist durch

$$\Phi(z) = \frac{i - \exp(i\pi/6)\sqrt{3}iz}{i + \exp(i\pi/6)\sqrt[3]{iz}}. \tag{942}$$

Wir bemerken, dass ein holomorpher Zweig der zweiten Wurzel nicht verwendet werden kann, wenn man die Cyley-Abbildung anwenden möchte. Dann würden wir nämlich auch auf einen Teil von $\partial\mathbb{E}$ abbilden. Das Φ, das wir gefunden haben garantiert, $\Phi(z) \in \mathbb{E}$ für alle $z \in G$, und ist nach Konstruktion konform. Allerdings ist die Abbildung wegen der echten Inklusion $\mathbb{S}_{\pi/6,5\pi/6} \hookrightarrow \mathbb{H}^+$ nicht bijektiv, also erst recht nicht biholomorph. $\square$

Aufgabe 54 (H13T3A5) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $z_0 \in G$. Wir definieren die Menge

$$M \equiv \{f'(z_0) | f \in \mathrm{Hol}(G \to G), f(z_0) = z_0\}\,. \tag{943}$$

Falls $G = \mathbb{C}$, behaupten wir, ist M unbeschränkt. Dazu beachten wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto n(z-z_0)+z_0$ holomorph ist und ist zudem $f(z_0) = z_0$ erfüllt. Andererseits gilt $f'(z_0) = n$. Wäre nun M beschränkt, so gäbe es ein $M > 0$, sodass $|f'(z_0)| < M$ für alle $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ mit $f(z_0) = z_0$. Setzen wir aber $N \equiv \lceil M \rceil + 1$, so sehen wir, dass $f'_N(z_0) = N > M$. Da $f'_N(z_0) \in M$ resultiert der Widerspruch zur Annahme der Beschränktheit von M. Im Falle $G \neq \mathbb{C}$ beachten wir zunächst, dass der Riemann'sche Abbildungssatz uns nun die Existenz eines biholomorphen $\Phi : G \to \mathbb{E}$ in eindeutigerweise gewährleistet, falls wir $\Phi(z_0) = 0$ fordern. Da sowohl Φ als auch die Umkehrfunktion Φ^{-1} insbesondere in $z = z_0$ holomorph sind, gilt $(\Phi'(z_0))^{-1} = (\Phi^{-1})'(\Phi(z_0))$ nach der Umkehrregel für holomorphe Funktionen. Insbesondere sind sowohl $\Phi'(z_0)$ und $(\Phi^{-1})'(0)$ von 0 verschieden und endlich. Wir betrachten nun eine beliebige holomorphe Abbildung $f : G \to G$ mit der Eigenschaft, dass $f(z_0) = z_0$ und definiere dazu die Funktion $g \equiv \Phi \circ f \circ \Phi^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, die dann die Eigenschaft $g(0) = 0$ erfüllt. Zudem gilt $g'(0) = f'(z_0)$ nach der Ketten- und Umkehrregel für holomorphe Funktionen, unter Verwendung der Eigenschaft, dass z_0 Fixpunkt unter f ist. Nach dem Lemma von Schwarz gilt aber für die Abbildung g, als Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe in sich selbst, die zudem den Ursprung 0 fixiert, dass $|g'(0)| \leq 1$. Infolge der obigen Rechnung gilt also auch $|f'(z_0)| \leq 1$. Beliebigkeit des f, sodass $f'(z_0) \in M$ gewährleistet wird, impliziert nun, dass für alle $c \in M$ gilt $|c| \leq 1$. Daher ist $M \subseteq \bar{\mathbb{E}}$ und somit bereits absolut durch 1 beschränkt. Zusammenfassend ist die Menge M also im Falle $G = \mathbb{C}$ unbeschränkt, und im Falle $G \neq \mathbb{C}$ bereits durch 1 absolut beschränkt, insbesondere also beschränkt. $\square$

Aufgabe 55 (H11T1A2) Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei nun $a, b \in G$ mit $a \neq b$ und $f(a) = g(a)$ sowie $f(b) = g(b)$ für $f, g : G \to G$ biholomorph. Zu zeigen ist, dass dann bereits $f \equiv g$. Da $G \neq \mathbb{C}$ und G einfach zusammenhängendes Gebiet ist, existiert nach dem Riemann'schen Abbildungssatz eine biholomorphe Abbildung $\Phi : G \to \mathbb{E}$, die eindeutig festgelegt ist, wenn wir $\Phi(a) = 0$ fordern. Da Φ biholomorph ist, ist auch $\Phi^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{G}$ biholomorph. Zusätzlich definieren wir eine biholomorphe Abbildung $\Psi : G \to \mathbb{E}$ auf Basis des Riemann'schen Abbildungssatzes, indem wir $\Psi(f(a)) = 0$ fordern. Wir definieren nun $F \equiv \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ und $G = \Psi \circ g \circ \Phi^{-1}$. Als Komposition biholomorpher Abbildungen, sind auch $F, G : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biholomorph. Wegen $f(a) = g(a)$ ist auch $F(0) = 0 = G(0)$. Wir wenden nun das Lemma von Schwarz zweimal an: Einmal auf die holomorphen Funktion $F, G : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ und einmal auf die holomorphen Funktionen $F^{-1}, G^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Damit stellen wir fest, dass $|F'(0)| \leq 1$ und $|G'(0)| \leq 1$

einerseits und andererseits $|(F^{-1})'(0)| \leq 1$ und $|(G^{-1})'(0)| \leq 1$. Wegen der Umkehrregel können wir die beiden zuletzt genannten Gleichungen auch als $1 \leq |F'(0)|$ und $1 \leq |G'(0)|$ schreiben. Zusammen mit den beiden zuerst gefunden Abschätzungen für $|F'(0)|$ und $|G'(0)|$ erhalten wir also $|F'(0)| = 1 = |G'(0)|$. Nach dem zweiten Teil des Lemmas von Schwarz gilt also $F(z) = \exp(i\lambda_F)z$ und $G(z) = \exp(i\lambda_G)z$ mit Konstanten λ_F, $\lambda_G \in \mathbb{R}$. Sei nun $\mathbb{E} \ni c = \Phi(b)$. Da $f(b) = g(b)$ gilt auch $F(c) = G(c)$ und wir folgern daraus $\lambda_F = \lambda_G \operatorname{mod}(2\pi)$. In jedem Fall gilt dann $F(z) = G(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Rückabwicklung der Kompositionen mit Φ^{-1} bzw. Ψ liefert nun die Gleichung $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$, d.h., $f \equiv g$, wie behauptet. □

Aufgabe 56 (F19T2A4) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{1}{x+t} - 1 \,\&\, x(1) = \xi, \tag{944}$$

wobei $\xi > -1$. Zu zeigen ist, dass das so definierte Anfangswertproblem dann eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ hat. Wir definieren zunächst die Funktion

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \frac{1}{x+t} - 1, \tag{945}$$

wobei $\mathbb{D} \equiv \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | t+x > 0\}$. Dann gilt, dass f für alle $(t, x) \in \mathbb{D}$ stetig ist und in x stetig partiell differenzierbar. Ferner ist $\mathbb{D}$ offen und zusammenhängend, also ein Gebiet. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert nun, dass wegen $(1, \xi) \in \mathbb{D}$, da $\xi + 1 > 0 \Leftrightarrow \xi > -1$, eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ für das oben genannte Anfangswertproblem für alle $\xi > -1$ existiert. Wir setzen nun $u \equiv x+t$ und finden, dass die Differentialgleichung dann übergeht in $u'-1 = 1/u-1$, bzw., äquivalent dazu $u' = 1/u$. Es gilt zudem $\mathbb{D} = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 | u > 0\}$. Wir stellen also fest nach Separation der Variablen, dass $u^2 - (\xi + 1)^2 = 2t - 2$. Auflösen liefert lokal $0 < u(t) = \sqrt{(\xi + 1)^2 + 2(t - 1)}$, was für $t > 1 - (\xi + 1)^2/2$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion definiert, wie gefordert. Da $\limsup_{t\to 1-(\xi+1)^2/2} |u'(t)| = \infty$ in Übereinstimmung mit dem Charakterisierungssatz maximaler Lösung anhand des Randverhaltens, haben wir somit auch einen Kandidaten für die maximale Lösung gefunden: In der Tat gilt $u(1) = \sqrt{(\xi + 1)^2} = |\xi+1| = \xi+1$, wegen $\xi > -1$ laut Voraussetzung. Differentiation liefert sofort $u'(t) = 2/2\sqrt{(\xi + 1)^2 - 2(t - 1)}^{-1} = 1/u(t)$ für alle $t > 1 - (\xi + 1)^2/2$. Rücktransformation liefert nun $x(t) = \sqrt{(\xi + 1)^2 + 2(t - 1)} - t$, wobei die Rückstransformation gemäß $u = x + t \Leftrightarrow x = u - t$ das maximale Existenzintervall $I_\xi = (1 - (\xi + 1)^2/2, \infty)$ unberührt lässt. Wir zeigen nun noch, dass für $\xi = 0$ eine asymptotisch stabile Lösung entsteht. Da die vorgegebene Differentialgleichung skalar ist und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ in t stetig und in x lokal Lipschitz-stetig ist, reicht es nachzuweisen, dass λ_0 attraktiv ist. Sei dazu $\tau > 1/2$ und $\xi \in (-1/2, 1/2)$. Dann existiert die maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda_\xi(t)$ für $x' = f(t, x)$ mit $x(1) = \xi$ für alle $t \geq \tau$ und es gilt $\lim_{t\to\infty} \sup |\lambda_0(t) - \lambda_\xi(t)| = 0$ wie $\sim t^{-1}$ für $t \to \infty$. Also ist λ_0 attraktiv und damit bereits stabil. Also ist λ_0 asymptotisch stabil. □

Aufgabe 57 (F19T2A3) Sei $A \in \mathcal{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{946}$$

Wir berechnen das Matrixexponential $\exp(tA)$. Dazu berechnen wir die Eigenwerte von A. Diese sind gegeben durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_2) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$. Damit sehen wir, dass es nur den Eigenwert $z = -1$ mit der algebraischen Vielfachhheit $\mu_a(-1) = 2$ gibt. Aus $(A-(-1))v = 0_{\mathbb{R}^2}$ sehen wir, dass $\mathrm{Eig}_1(A, z = -1) = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{(1, -1)^T\}$. Wir bestimmen also einen verallgemeinerten Eigenvektor der Stufe 2, indem wir $(A-(-1)E_2)^2 v_2 = 0$ lösen. Das liefert uns wegen

$$(A - (-1)E_2)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{947}$$

dass $\mathrm{Eig}_2(A, -1) = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$. Zudem ist $\hat{e}_1 \notin \mathrm{Eig}_1(A, -1)$. Wir setzen also $v_2 = \hat{e}_1$ und $v_1 = (A - (-1)E_2)v_2 = (-1, 1)^T$. Zusammen mit der Tranformationsmatrix $T = (v_1, v_2)$ können wir das Matrixexponential berechnen. Es gilt zunächst $\det T = -1 \neq 0$. Somit ist T invertierbar und es gilt

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{948}$$

Wir finden also

$$J_A = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{949}$$

und damit für das gesuchte Matrixexponential

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= T \exp(tJ_A) T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} - te^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{950}$$

Ein Fundamentalsystem der gewöhnlichen Differentialgleichung $x' = Ax$ ist nach der Vorlesung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben durch die Spaltenvektoren des soeben berechneten Matrixexponentials

$$\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (e^{-t} - te^{-t}, te^{-t})^T, \tag{951}$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (-te^{-t}, e^{-t} + te^{-t})^T. \tag{952}$$

Als nächstes sollen wir eine Lösung des Differentialgleichungssystems $x' = Ax + g$ bestimmen, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $g(t) = (-t, t)^T$ und wir den Anfangswert $x(1) = (0, 1)^T$ spezifiziert haben. Nach Duhamel gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp((t-1)A)x(1) + \int_1^t d\tau \, \exp((t-\tau)A)g(\tau) \\ &= \exp((t-1)A)x(1) + \exp(tA) \int_1^t d\tau \, \exp(-\tau A)g(\tau) \end{aligned} \tag{953}$$

Wir finden zunächst

$$\exp((t-1)A)x(1) = \begin{pmatrix} -(t-1)e^{-(t-1)} \\ e^{-(t-1)} + (t-1)e^{-(t-1)} \end{pmatrix} \tag{954}$$

$$\exp(-\tau A)g(\tau) = \begin{pmatrix} -\tau e^{\tau} \\ \tau e^{\tau} \end{pmatrix}. \tag{955}$$

In einer Nebenrechnung berechnen wir

$$\int_1^t d\tau\, \tau \exp(\tau) = te^t - e - \int_1^t d\tau\, e^t = (t-1)e^t. \tag{956}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \exp(tA)\int_1^t d\tau\, \exp(-\tau A)g(\tau) &= \begin{pmatrix} e^{-t} - te^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(t-1)e^t \\ (t-1)e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t-1)^2 - t(t-1) \\ -t(t-1) + (t-1)(t+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-t \\ t-1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{957}$$

Somit finden wir schließlich für x

$$x(t) = \begin{pmatrix} -(t-1)(1-\exp(-(t-1))) \\ \exp(-(t-1)) + (t-1)(1+\exp(-(t-1))) \end{pmatrix}. \tag{958}$$

Da es sich bei $x' = Ax+g$ um ein inhomogenes lineares System handelt, dessen Koeffizientenmatrix konstant ist, folgt die asymptotische Stabilität der gefunden Lösung bereits aus der asymptotischen Stabilität der Nulllösung des assoziierten homogenen Systems. Die Nulllösung ist hierbei bereits als asymptotisch stabil bekannt, denn der einzige Eigenwerte der Koeffizientenmatrix A ist echt negativ, sodass die asymptotisch Stabilität der Nulllösung von $x' = Ax$ aus einem Vorlesungsresultat zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt. □

Aufgabe 58 (F19T1A3) (a) Sei $x' = 1 + \cos(x)$ gegeben und $x_0 \in (-\pi, \pi)$ beliebig. Betrachte das Anfangswertproblem $x(0) = x_0$. Zu zeigen ist, dass die maximale Lösung $\lambda : I_{\max} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems erstens $I_{\max} = \mathbb{R}$ und zweitens $\lambda(t) \in (-\pi, \pi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Hierzu beachten wir zunächst, dass die rechte Seite des autonomen Systems eine stetig differenzierbare Funktion, nämlich $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \cos(x)$ definiert. Sie ist bzgl. des Differentiationsparameters t konstant, also in diesem stetig. Als in x stetig (partiell) differenzierbare Funktion genügt f also eine lokalen Lipschitzbedingung in x. Demnach existiert für alle $\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung des Anfangswertproblems $x' = 1 + \cos(x)$ mit $x(0) = \xi$. Konkret wissen wir, dass für $\xi_+ = \pi$ und $\xi_- = -\pi$ gilt $f(\xi_+) = 0$ und $f(\xi_-) = 0$, sodass die Anfangwertprobleme $x' = f(x)$, $x(0) = \xi_\pm$ die maximalen Lösungen $\lambda_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \pm\pi$ besitzen. Für den Anfangswert $x(0) = x_0 \in (-\pi, \pi)$, sieht man durch Einsetzen leicht, dass keine konstante Lösung resultiert, sondern $(0, x_0) \in \Gamma(\lambda_{x_0})$ in dem Streifen $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ liegt. Da sich die

Graphen verschiedener maximaler Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(x)$, laut Vorlesung nicht schneiden dürfen, haben ist bereits für alle $t \in I_{\max}$ $-\pi < x(t) < \pi$. Infolge der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler, eindeutiger Lösungen folgt dann bereits $I_{\max} = \mathbb{R}$. Andernfalls wäre die besagte maximale Lösung an mindestens einem Punkt im maximalen Existenzintervall unstetig, im Widerspruch zum globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, der $\mathcal{C}^1$-Regularität garantiert.
(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Dann ist jede nicht-konstante Lösung der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ streng monoton. Da f lokal-Lipschitz stetig, und als konstante Funktion im Differentiationsparameter t in diesem auch stetig ist, können wir nach Wahl von Anfangswerten den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwenden. Wir spezifizieren die Anfangswerte $(0, \xi) \in \mathbb{R}^2$ und betrachten das Anfangswertproblem $x(0) = \xi$. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert dann die Existenz einer eindeutig bestimmten maximalen Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ für das Anfangswertproblem. Dann gilt entweder $f(\xi) = 0$ oder $f(\xi) \neq 0$. Wir betrachten die Menge $N[f] = \{\xi \in \mathbb{R} | f(\xi) = 0\}$. Dann ist $\lambda_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \xi$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Graphen $\{\Gamma(\lambda_\xi) | \xi \in \mathbb{R}\}$ eine disjunkte Zerlegung in der $x-t$-Ebene, also im, nicht notwendigerweise des $\mathbb{R}^2$, bilden. Lassen wir auch allgemeine Anfangswerte $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ zu und identifizieren $(\tau, \xi) \sim (\tau', \xi')$ genau dann wenn $\Gamma(\lambda_{\tau,\xi}) = \Gamma(\lambda_{\tau',\xi'})$, wo $\lambda_{\kappa,\mu} : I_{\kappa,\mu} \to \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem $x' = f(x)$ mit $x(\kappa) = \mu$ für $(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^2$ löst, so erhalten wegen der aus der Vorlesung bekannten Äquivalenzrelationseigenschaft von $\sim$, dass

$$\mathbb{R}^2 = \biguplus_{[(\tau,\xi)] \in \mathbb{R}^2/\sim} \Gamma(\lambda_{[(\tau,\xi)]}). \tag{959}$$

Insbesondere können also die Gaphen der konstanten Lösungen der Differentialgleichungen, die konstant einen Wert in der Nullstellenmenge von $N[f]$ belegen, nicht von den Graphen anderer, inklusive anderer konstanter, Lösungen geschnitten werden. Falls nun f keine Nullstelle hat, dann gilt $f > 0$ oder $f < 0$ und entsprechend $x' > 0$ oder $x' < 0$ auf dem maximalen Existenzintervall. Damit ist x streng monton. Falls f eine Nullstelle hat, x_0, dann ist $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, x_0)$ und ebenso für $x \in (x_0, \infty)$. Allgemein gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus N[f]$, dass $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$. Gäbe es nun eine, nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz ohne Einschränkung als maximal angenommene, nicht-konstante Lösung λ und eine konstante Lösung μ zu einem geeigneten Anfangswertproblem, sodass $\lambda(t) = \mu$ für ein $t \in I_{\max}(\lambda)$, so hätten wir einen Widerspruch zur Zerlegungseigenschaft der Graphen der Lösungen des Anfangswertproblems, die oben ausgeführt wurde. Folglich ist längs jeder nicht-konstanten Lösung $\lambda : I_{\max}(\lambda) \to \mathbb{R}$ von $x' = f(x)$ $\{\pm 1\} \ni \operatorname{sign}(f) = \operatorname{sign}(\lambda')$, und λ deswegen als $\mathcal{C}^1$-Funktion streng monoton. $\square$

Aufgabe 59 (F19T1A4) Gegeben sei das System $x' = y$ und $y' = \exp(2x)$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y)$. Es ist leicht zu sehen, dass die partiellen Ableitungen der rechten Seite jeweils auf $\mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind. Ferner ist die rechte Seite jeweils konstant bzgl. Variable t, nach der zu differenzieren ist, $x' = d_t x$ und $y = d_t x$. Ferner ist $\mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Damit wissen wir nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass zu einem vorgegebenem Anfangswert $(\xi, \eta) = (x(\tau), y(\tau))$ für $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ genau eine maximale Lösung $(\lambda, \mu) : I_{\max} \to \mathbb{R}^2$ existiert, die das zugehörige Anfangswertproblem löst. Wir zeigen nun die Existenz eines ersten Integrals. Zunächst stellen wir fest, dass $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y^2/2 - 1/2 \cdot \exp(2x)$ eine Hamiltonfunktion des oben angegebenen, autonomen Systems ist. Denn $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ als Verknüpfung glatter Funktionen, und zudem $-\partial_x H(x, y) = \exp(2x)$ sowie $\partial_y H(x, y) = y$. Somit ist das autonome System sogar Hamilton'sch, mit Hamilton-Funktion H. Aus der Vorlesung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass diese Hamilton-Funktion dann eine Erhaltungsgröße ist, d.h., $H(\lambda(t), \mu(t)) = \text{const.}$ entlang der Lösung des zum betrachteten autonomen System assoziierten Anfangswertproblem. Spezifizieren wir nun die Anfangswerte $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$, so finden wir längs der Lösung $(x, y) : I_{\max} \to \mathbb{R}^2$ des dazugehörigen Anfangswertproblems, dass $H(x(t), y(t)) = y(t)^2/2 - \exp(2x(t))/2 = 1^2/2 - \exp(2 \cdot 0)/2 = 0$. Umformen liefert nun $y(t)^2 = \exp(2x(t))$. Da laut $y' = \exp(2x) > 0$ lieferte $y(t) = -\exp(x(t))$ bei $t = 0$ den Widerspruch $y(0) = -1 \neq 1$. Also kann nur $y(t) = \exp(x(t))$ gelten, wie behauptet. Wir betrachten nunmehr das Anfangswertproblem $x'' = \exp(2x)$ mit $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$. Vermöge der Substitution $x' \equiv y$ erhalten wir das äquivalente System erster Ordnung $x' = y$ und $y' = \exp(2x)$ mit den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$. Für diesen haben wir gesehen, dass $y(t) = \exp(x(t))$ gilt, entlang der Lösung $(x, y) : I_{\max} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems. Einsetzen der Darstellung für y in die erste der beiden das System konstituierenden Gleichungen liefert $x' = \exp(x)$. Damit ist bewiesen, dass die maximale, und damit jede, Lösung des Anfangswertproblems $x'' = \exp(2x)$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$ auch das Anfangswertproblem $x' = \exp(x)$, $x(0) = 0$ löst. Wir sehen nunmehr durch Separation der Variablen, dass $x'(t) = \exp(x(t))$ mit $x(0) = 0$ eine formale Lösung erlaubt, die der Gleichung $-\exp(-x(t)) + 1 = t$ genügt. Auflösen liefert $x(t) = -\ln(1 - t)$, denn wir müssen sicherstellen, dass das maximale Existenzintervall $I_{\max} \ni 0$. Die Form der gefundenen Lösung liefert nun infolge der Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten, dass $I_{\max} = (-\infty, 1)$. Indem wir $y(t) = \exp(x(t)) = 1/(1 - t)$ bemühen, stellen wir fest, dass nicht nur $x(0) = 0$, sondern auch $y(0) = 0$. Zuletzt prüfen wir, dass die so gefundene Funktion $(x, y) : I_{\max} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (-\ln(1 - t), (1 - t)^{-1})$ tatsächlich eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Es gilt $y' = (1 - t)^{-2} = \exp(-2 \cdot \ln(1 - t))$ und $x'(t) = 1/(1 - t)$ für alle $t \in I_{\max}$. Damit haben wir die maximale Lösung des o.g. Anfangswertproblems gefunden. $\square$

6 Kurs im Wintersemester 2019/2020

6.1 Aufgaben Übungen

Aufgabe 60 (H13T2A4) Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = t^2\sqrt{1 + 2y}$.
(a) Wir sollen eine Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$ finden. Wir bemerken zunächst, dass $D = \mathbb{R} \times (-0.5, \infty)$ ein Gebiet ist, denn es ist als kartesisches Produkt zweier offener Intervalle selbst offen und zusammenhängend, also ein Gebiet. Ferner ist $(0, 0) \in D$. Zudem ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}, (t, y) \mapsto t^2\sqrt{1 + 2y}$ auf ganz D stetig und in y sogar stetig differenzierbar. Mithin erfüllt f auf D eine lokale Lipschitz-Stetigkeitsbedingung im zweiten Argument. Der globale Existenz- und Eindeutig-

keitssatz liefert uns somit, dass das Anfangswertproblem $y' = t^2\sqrt{1+2y}$, $y(0) = 0$ eine auf D eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt. Diese finden wir durch Trennung der Variablen. Formal können wir die Differential- in die Integralgleichung

$$\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1+2z}} = \int_0^t \tau^2 \, d\tau \tag{960}$$

konvertieren. Diese lässt sich zu $\sqrt{1+2y} - 1 = t^3/3$ vereinfachen. Zusammen mit der Bedingung, dass $y > -0.5$ erhalten wir also $y(t) = 0.5(1 + t^3/3)^2 - 0.5$, wobei $t > -\sqrt[3]{3}$ sicherstellt, dass der Graph von y in D enthalten ist. Da $y' = (1 + t^3/3)t^2 > 0$ für $t > 0$ ist y für alle $t > 0$ streng monoton steigend. Anhand der Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten schließen wir, dass $y : (-\sqrt[3]{3}, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 0.5(1 + t^3/3)^2 - 0.5$ die, nach Picard-Lindelöff eindeutig bestimmte, maximale Lösung des Anfangswertproblems ist. Insbesondere ist die Einschränkung von dem soeben gefundenen y auf das halboffene Intervall $[0, \infty)$ eindeutig.

(b) Wir stellen fest, dass die Funktion $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto -0.5$ das Anfangswertproblem $y' = t^2\sqrt{1+2y}$, $y(0) = -1/2$ löst, denn y_0 erfüllt trivialerweise die Anfangsbedingung und ist als konstante Funktion stetig differenzierbar. Durch Inspektion findet man sofort, dass y_0 auch die Differentialgleichung für alle t löst. Andererseits können wir auch ein $(\tau, \xi) \in D$, mit D wie in (a) definiert, suchen, sodass $\lim_{t\to 0^+} y(t) = -0.5$ oder $\lim_{t\to 0^-} y(t) = -0.5$. Die zum Anfangswertproblem $y' = t^2\sqrt{1+2y}$, $y(\tau) = \xi$ assoziierte Integralgleichung lautet

$$\int_\xi^y \frac{dz}{\sqrt{1+2z}} = \int_0^t \tau^2 \, d\tau, \tag{961}$$

und wir können dieses umformen in $\sqrt{1+2y} = t^3/3 - \tau^3/3 + \sqrt{1+2\xi}$, bzw., $y = 0.5(1+t^3/3-\tau^3/3)^2-0.5$, wobei wir einen Parameter durch die Wahl $\xi = 0$ eliminieren. Indem wir nun $\tau = -\sqrt[3]{3} < 0$ setzen, erreichen wir, dass $\lim_{t\to 0^-} y(t) = -0.5$, denn dann ist $y(t) = t^6/6 - 1/2 > -0.5$ für $t < 0$. Es ist leicht durch Einsetzen verifizierbar, dass das so gefundene y für $t < 0$ eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $y(-\sqrt[3]{3}) = 0$ darstellt. Somit erhalten wir eine weitere Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des in Teil (b) betrachteten Anfangswertproblems durch

$$y(t) = \begin{cases} t^6/6 - 0.5 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \tag{962}$$

Diese ist offenbar von der vorher gefundenen Lösung y_0 verschieden. Im Ergebnis haben wir also die zwei geforderten verschiedenen Lösungen des in Teil (b) zu untersuchenden Anfangswertproblems gefunden □

Aufgabe 61 (F14T2A1) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{xt}{\sqrt{x^2+1}}, \; x(0) = 1. \tag{963}$$

(a) Wir zeigen zunächst, dass dieses eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ hat. Dazu beobachten wir, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto$

$xt/\sqrt{x^2+1}$ stetig und in x auch stetig differenzierbar ist. Daher erfüllt f auf ganz $\mathbb{R}^2$ eine lokale Lipschitz-Bedingung. Der $\mathbb{R}^2$ ist ein Gebiet und enthält $(0,1)$ als Element. Mit dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz erhalten wir nun die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$.
(b) Wir zeigen nun, dass $I = \mathbb{R}$. Hierzu verwenden wir, dass $|xt/\sqrt{1+x^2}| \leq |t|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $|x'| \leq |t|$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite der Differentialgleichung ist also linear beschränkt, und damit gilt laut Vorlesung bereits $I = \mathbb{R}$, weil das zugrundeliegende Existenzgebiet (s. Teil (a)) ganz $\mathbb{R}^2$ ist.
(c) Wir betrachten nun die Lösung aus (a) für $t \geq 0$. Es gilt nach Integration

$$\lambda(t) = 1 + \int_0^t \frac{\lambda(\tau)\tau}{\sqrt{1+\lambda(\tau)^2}} d\tau. \tag{964}$$

Bilden des Absolutbetrags und Anwendung der Dreiecksungleichung und der Dreiecksungleichung für Integrale liefert dann

$$\begin{aligned} 0 \leq |\lambda(t)| &\leq 1 + \int_0^t \left| \frac{\tau\lambda(\tau)}{\sqrt{1+\lambda(\tau)^2}} \right| d\tau \\ &\leq 1 + \int_0^t \tau d\tau \\ &= 1 + t^2/2, \end{aligned}$$

wobei wir $t > 0$ und somit $\tau \geq 0$ verwendet haben und die bereits in (b) gefundene Abschätzung bemüht haben. Da $\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 0$ die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $\lambda_0(0) = 0$ ist, $\lambda(0) = 1 > 0$ und die Graphen zweier Lösungen einer Differentialgleichung sich wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes und des Zwischenwertsatzes nicht schneiden können, gilt $\lambda(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $t \geq 0$. Da für $t \geq 0$ dann zusätzlich $\lambda'(t) > 0$ gilt, folgt

$$1 \leq \lambda(t) \leq |\lambda(t)| \leq 1 + t^2/2. \tag{965}$$

Damit ist $\lambda(t) \in [1, 1+t^2/2]$ für alle $t \geq 0$, wie behauptet. □

Aufgabe 62 (H00T1A2) Seien $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das zweidimensionale Anfangswertproblem

$$x' = f(x) \;\&\; y' = g(x)y \tag{966}$$

mit $x(0) = \xi$ und $y(0) = \eta$. f sei hierbei auf $\mathbb{R}$ als lokal Lipschitz-stetig, g auf $\mathbb{R}$ als stetig vorausgesetzt. Wir zeigen zunächst, dass das vorliegende Problem eine eindeutige Lösung hat. Zunächst stellen wir fest, dass die Gleichungen entkoppeln, d.h., wir können zunächst das Anfangswertproblem $x' = f(x)$ mit $x(0) = \xi$ im Eindimensionalen behandeln. Da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend, also ein Gebiet, ist, f auch auf ganz $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, liefert uns der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöff die Existenz einer eindeutigen und maximalen Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ des zuletzt angeführten Anfangswertproblems. Es gilt insbesondere, dass das (offene) Intervall $I \ni 0$. Damit können wir nun die zweite Randwertaufgabe lösen, denn Einsetzen der Lösung der ersten Differentialgleichung in die rechte Seite der zweiten ergibt $y' = g(\lambda(t))y \equiv F(t,y)$, wobei wir $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,y) \mapsto g(\lambda(t))y$ definiert haben. Die Funktion F ist, wegen der Intervalleigenschaft von I, auf einem Gebiet definiert und dort zumindest stetig, denn sowohl die Produktabbildung als auch die einzelnen Faktoren sind stetige Funktionen von ihren jeweiligen Argumenten. Zudem ist F linear in y, insbesondere also genügt F eine lokalen Lipschitz-Stetigkeitsbedingung im zweiten Argument. Da $(0,\eta) \in I \times \mathbb{R}$, ist der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz wiederum anwendbar: Dieser liefert uns die Existenz einer eindeutig bestimmten, maximalen Lösung $\mu : J \subseteq I \to \mathbb{R}$ für die zweite Differentialgleichung des urspüglichen Anfangswertproblems. Die (eindeutig bestimmte und maximale) Lösung des Differentialgleichungssystems von oben finden wir nun durch $(\lambda|_J, \mu) : J \to \mathbb{R}^2$. Diese Lösung erfüllt nach Konstruktion auch die Anfangsbedingung $(\lambda|_J, \mu)(0) = (\xi, \eta)$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass das Differentialgleichungssystem eindeutig lösbar ist. Jedoch ist der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz initial nicht auf das komplette System anwendbar, denn die Funktion g ist lediglich als stetig vorausgesetzt. Zumindest liefert der Existenzsatz von Peano die Existenz von Lösungen, trifft jedoch keine Aussage über die Eindeutigkeit. Zur Untermauerung der Aussage, dass der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz nicht direkt anwendbar ist setzen wir $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{x}$. Dann ist $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x, \sqrt{x}y)$ auf $\{0\} \times \mathbb{R}$ nicht lokal-Lipschitz-stetig, denn es gilt

$$\frac{\|G(x,y) - G(0,y)\|_2}{\|(x,y) - (x,0)\|_2} = \frac{\sqrt{x^2 + xy^2}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x}} \xrightarrow{x \to 0} \pm\infty, \tag{967}$$

d.h., der Quotient ist in einer Umgebung von $(0,y)$ für beliebiges aber festes $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unbeschränkt. Damit kann keine Lipschitzkonstante $\in \mathbb{R}$ existieren. Damit können wir den globalen Existenz und Eindeutigkeitssatz nicht für den Fall $\xi = 0$ anwenden. Das weiter oben beschriebene Verfahren schafft hier Abhilfe. $\square$

Aufgabe 63 (F12T1A5) Für $\xi \in \mathbb{R}$ betrachten wir das folgende Anfangswertproblem: $x' = \arctan(x)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = \xi$. Hierbei handelt es sich um eine autonome Differentialgleichung
(a) Wir zeigen zunächst, dass das obenstehend definierte Problem für alle $\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ hat. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar, genügt also eine lokalen Lipschitz-Bedingung auf dem gesamten Definitionsbereich. Mittels des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für das oben skizzierte Anfangswertproblem für ein autonomes System erhalten wir die Existenz einer korrespondierenden eindeutigen maximalen Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$.
(b) Wir zeigen nun, dass λ_ξ genau dann eine Nullstelle hat, wenn $\xi = 0$. Für "$\Rightarrow$" beachten wir, dass das Anfangswertproblem $x' = \arctan(x)$, $x(0) = 0$ von der Nullfunktion $\lambda_0 : \mathbb{R} = I_0 \to \mathbb{R}, t \mapsto 0$ gelöst wird. Damit sehen wir, dass das Anfangswertproblem für $\xi = 0$ offenbar eine Nullstelle hat (z.B. bereits bei $t = 0$). Für "$\Leftarrow$" beachten wir, dass die Trajektorien der (nach (a) eindeutigen und maximalen)

Lösungen den Differentialgleichung zu verschiedenen Anfangsbedingungen eine Zerlegung des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bilden. Insofern kann die Gleichung $\lambda_0(t) = 0 = \lambda_\xi(t)$ für kein t für kein $\xi \neq 0$ eine Lösung besitzen. Andernfalls resultiert ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösung $\lambda_0 \equiv 0$ zum Anfangswert $\xi = 0$. Hat nun λ_ξ für ein $\xi \neq 0$ eine Nullstelle, so haben wir den gesuchten Widerspruch. Damit ist auch "$\Leftarrow$" bewiesen.
(c) Wir zeigen nun, dass $\xi - \pi/2|t| \leq \lambda_\xi(t) \leq \xi + \pi/2|t|$ für alle ξ und t, jeweils aus $\mathbb{R}$, gilt. Hierzu integrieren wir die Differentialgleichung nach Fixierung eines beliebigen $\xi \in \mathbb{R}$. Dann ist λ_ξ durch die Integralgleichung

$$\lambda_\xi(t) - \xi = \int_0^t \arctan(\lambda_\xi(t))\, dt \tag{968}$$

gegeben. Da $-\pi/2 < f(x) < \pi/2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, können wir die Monotonie des Integraloperators bemühen und erhalten

$$\begin{aligned} -\left|\int_0^t \arctan(\lambda_\xi(t))dt\right| \leq & \lambda_\xi(t) - \xi \leq \left|\int_0^t \arctan(\lambda_\xi(t))dt\right| \\ -\pi/2\left|\int_0^t dt\right| \leq & \lambda_\xi(t) - \xi \leq \pi/2\left|\int_0^t dt\right| \\ -\pi/2|t| \leq & \lambda_\xi(t) - \xi \leq \pi/2|t|, \end{aligned}$$

woraus wir durch Äquivalenzumformung unmittelbar die zu beweisende Ungleichungskette erhalten,

$$\xi - \pi/2|t| \leq \lambda_\xi(t) \leq \xi + \pi/2|t|. \tag{969}$$

(d) Wir zeigen nun, dass $I_\xi = \mathbb{R}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Angenommen, $I_\xi \subsetneq \mathbb{R}$, dann gäbe es ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $a > t$ oder $a < t$ für alle $t \in I_\xi$ gilt. Da das autonome System auf dem randfreien Gebiet $\mathbb{R}^2$ definiert ist, kann λ_ξ lediglich dann maximal sein, wenn $\limsup_{t\uparrow a} |\lambda_\xi(t)| = \infty$ (im ersten Fall für a) bzw. $\limsup_{t\downarrow a} |\lambda_\xi(t)| = \infty$. Das widerspricht aber dem Ergebnis von (c), welches liefert, dass bereits $|\lambda_\xi(t)| \leq |\xi| + \pi/2|a|$ für alle $t \in I_\xi$ gilt, d.h., auch im Limes $t \uparrow a$ bzw. $t \downarrow a$. Damit verbleibt nur die Möglichkeit, dass $I_\xi = \mathbb{R}$, d.h., beidseitig unbeschränkt, ist. □

Aufgabe 64 (H16T1A3) Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = -\tan(y)e^y$ mit $y(0) = -1$.
(a) Zu zeigen ist, dass dieses eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ besitzt. Zunächst beachten wir, dass es sich bei der Differentialgleichung $y' = -\tan(y)e^y$ um eine autonome Differentialgleichung handelt. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}, y \mapsto -\tan(y)e^y$, wobei $D = (-\pi/2, \pi/2)$ ist stetig differenzierbar, mithin also lokal Lipschitz-stetig in y. Zudem gilt $y(0) = -1 \in D$. Da D ein offenes Intervall ist, ist auch $\mathbb{R} \times D =: G$ offen und zusammenhängend, also ein Gebiet. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f, ist die auf G stetige Funktion $F : G \to \mathbb{R}, (t, y) \mapsto -\tan(y)e^y = f(y)$ bzgl. y lokal Lipschitz-stetig. Zudem ist $(0, -1) \in G$. Damit können wir den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf das in Rede stehende Anfangswertproblem anwenden, und erhalten, dass eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung $\lambda : I \to (-\pi/2, \pi/2)$ für das Anfangswertproblem existiert. Das (maximale) Existenzintervall I ist laut Satz offen und es gilt $0 \in I$. Wir schreiben $I = (a, b)$ mit $a < 0$

und $b > 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Um nun zu zeigen, dass eine Lösung des Anfangswertproblems auf $\mathbb{R}_+$ existiert, müssen wir zeigen, dass $b = +\infty$. Hierzu beachten wir, dass $\mu : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2), t \mapsto 0$ das Anfangswertproblem $y' = -\tan(y)e^y$ mit $y(0) = 0$ löst. Ferner ist μ bereits maximal. Die Eindeutigkeit der Lösung für dieses Problem ist wiederum durch den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz mit einem Argument wie oben sichergestellt. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich die Graphen $\Gamma(\lambda) \subset G$ und $\Gamma(\mu) \subseteq G$ nicht schneiden, da $\lambda(0) = -1 \neq 0 = \mu(0)$. Da λ als Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung insbesondere stetig auf ganz I sein muss, muss $\lambda(t) < 0$ für alle $t \in I$. Andernfalls lieferte uns der Zwischenwertsatz, dass es ein $\tau \in I$ gäbe, sodass $\lambda(\tau) = 0$, was zu dem Widerspruch führte, dass $\emptyset = \Gamma(\lambda) \cap \Gamma(\mu) \supset \{(\tau, 0)\}$. Somit ist $\lambda(t) < 0 < \pi/2$ für alle $t \in I$. Da λ als maximal vorausgesetzt war, liefert uns der Satz über die Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten, dass $\limsup_{t \uparrow b} \lambda(t) \leq 0 < \infty$ für alle $t < b$. Für $b > t > 0$ haben wir ferner

$$\lambda(t) = -1 + \int_0^t (-\tan(\lambda(t))) \exp(\lambda(t))\, dt, \tag{970}$$

und die vorherige Feststellung, dass $\lambda(t) < 0$ für alle $t \in I$, insbesondere $0 < t < b$ liefert uns, dass $\lambda(t) > -1$. Somit $\lambda'(t) = -\tan(\lambda(t)) \exp(\lambda(t)) > 0$ und deswegen ist λ auf $(0, b)$ streng monoton steigend, aber durch 0 nach oben beschränkt. Somit ist $\lim_{t \uparrow b} |\lambda(t) - \pi/2| > \pi/2$ und $\lim_{t \uparrow b} |\lambda(t) - (-\pi/2)| > \pi/2 - 1 > 0$ ($b > 0$!). Damit liefert uns der Satz über die Charakterisierung maximaler Lösungen anhand ihres Randverhaltens, dass $b = \infty$ die einzige verbleibende Möglichkeit ist. Damit ist $I = (a, \infty)$ mit $a < 0$. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $\mathbb{R}_+$ ergibt sich wegen Maximalität der eindeutigen Lösung λ des Anfangswertproblems durch Einschränkung derselben auf $[0, \infty)$.
(b) Wir bestimmen nun $c := \lim_{t \to \infty} \lambda(t)$. Aus (a) wissen wir bereits, dass $c \in (-\pi/2, 0]$. Angenommen $c < 0$. Dann gilt in jedem Fall für die nach (a) maximale Lösung $\lambda(t) < c$. $\lambda'(t) = -\tan(\lambda(t)) \exp(\lambda(t)) > \tan(|c|) \exp(-|c|) > 0$. Damit finden wir aber, dass $\lambda(t) \to \infty$ wenn $t \to \infty$, denn

$$\lambda(t) = -1 + \int_0^t (-\tan(\lambda(t))) \exp(\lambda(t)) dt > -1 + \tan(|c|) \exp(-|c|) t \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty, \tag{971}$$

im Widerspruch dazu, dass nach Teil (a) λ bereits durch 0 nach oben beschränkt ist. $\square$

Aufgabe 65 (F15T1A1) Gesucht ist eine reelle Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ zum Anfangswertproblem

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0 \tag{972}$$

mit $y(-4) = -2$. Wir stellen fest, dass die Differentialgleichung von der Form $p(x, y)y' + q(x, y) = 0$ ist, wobei $p(x, y) = y$ und $q(x, y) = y^2 + 2x + 5$. Wir untersuchen zunächst, ob die Differentialgleichung exakt ist, indem wir beachten, dass p und q auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^2$ definiert und dort $\mathcal{C}^1$-regulär sind. Es gilt $\partial_x p(x, y) = 0$ aber $\partial_y q(x, y) = 2y$, sodass $(\partial_x p)(x, 1) \neq (\partial_y q)(x, 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir suchen nun eine integrierenden Faktor $m : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, sodass $m(x)p(x,y)y' + m(x)q(x,y) = 0$ exakt ist. Indem wir fordern, dass die Integrabilitätsbedingung (s.o.) erfüllt ist, erhalten wir die Gleichung $y(x)m'(x) = 2y(x)m(x)$. Es ist leicht zu sehen, dass diese Gleichung von $m(x) = \exp(2x)$ gelöst wird. Zudem ist $m(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass die ursprüngliche Differentialgleichung äquivalent ist zu,

$$ye^{2x}y' + e^{2x}(y(x)^2 + 2x + 5) = 0. \tag{973}$$

Wir suchen nun eine Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d.h., eine $\mathcal{C}^2$-Funktion, sodass $\partial_y F(x,y) = y\exp(2x)$ und $\partial_x F(x,y) = \exp(2x)(y^2 + 2x + 5)$. Aus der ersten Gleichung finden wir, dass $F(x,y) - F(x,0) = y^2/2\exp(2x)$. Indem wir in der zweiten Gleichung $y = 0$ setzen und integrieren, finden wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} F(x,0) - F(0,0) &= \int_0^x \exp(2z)(2z+5)dz \\ &\overset{\text{p.I.}}{=} x\exp(2x) - \int_0^x \exp(2z)dz + 5/2(\exp(2x) - 1) \\ &= x\exp(2x) - 1/2(\exp(2x) - 1) + 5/2(\exp(2x) - 1) \\ &= x\exp(2x) + 2(\exp(2x) - 1). \end{aligned} \tag{974}$$

Damit können wir bis auf eine additive Konstante die Stammfunktion so schreiben, dass $F(x,y) = y^2/2\exp(2x) + x\exp(2x) + 2(\exp(2x) - 1)$. Da $F(x,y) = F(-2,-4) = 8\exp(-4) - 2$, da die Stammfunktion F längs der Lösung der Differentialgleichung konstant ist, finden wir $y(x)^2 = 2(8\exp(-4) - x\exp(2x) - 2\exp(2x))/(\exp(2x))$. Wir können nach y durch Radizieren und Beachtung des Vorzeichens für die Erfüllung der Anfangsbedingung auflösen. Das liefert

$$y(x) = -\sqrt{2}\sqrt{\frac{8\exp(-4) - x\exp(2x) - 2\exp(2x)}{\exp(2x)}}. \tag{975}$$

Hierbei müssen wir sicherstellen, dass x so gewählt ist, dass $x \in I = (-\infty, \chi)$, wobei $-2 < \chi < 0$ die kleinste Nullstelle größer als -2 der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = 8\exp(-4) - x\exp(2x) - 2\exp(2x)$, ist. □

Aufgabe 66 (F08T1A1) Wir betrachten die Differentialgleichung $x' = 1 + x^2\sin(t - x)$.
(a) Indem wir $u \equiv t - x$ definieren, können wir die Differentialgleichung für x in eine für u umschreiben: $u' = -(u+t)^2\sin(u)$. Sei nun $k \in \mathbb{Z}$. Für die Anfangsbedingungen $x_k(k\pi) = 0$ erhalten wir die Anfangsbedingung $u_k(0) = k\pi$. Da die Sinusfunktion bei $u_k = k\pi$ eine Nullstelle hat, erhalten wir eine globale Lösung des Anfangswertproblems durch $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto k\pi$. Resubstitution der Definition von u in Abhängigkeit von t und x liefert nun $x_k(t) = t - u_k(t) = t - k\pi$, was die gesuchten Lösungen $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{Z}$ definiert.
(b) Wir definieren die Menge

$$T_k \equiv \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | k\pi < t - x < (k+1)\pi\}. \tag{976}$$

Sei nun $x : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung. Gilt $\Gamma(x) \cap T_k \neq \emptyset$, so ist bereits $\Gamma(x) \subseteq T_k$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \to 1 + x^2 \sin(t - x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$ und stetig partiell nach x differenzierbar in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2$. Laut eines Vorlesungsresultats ist f also im zweiten Argument lokal Lipschitz-stetig. Als Anfangswert wählen wir einen Punkt $(\tau, \xi) \in \Gamma(x) \cap T_k \neq \emptyset$, was laut Voraussetzung zumindest für ein k nichtleer ist. Dann liefert uns der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass das Anfangswertproblem $x' = 1 + x^2 \sin(t - x)$ mit $x(\tau) = \xi$ eine maximale, eindeutig-bestimmte Lösung $\lambda : I_{\tau,\xi} \to \mathbb{R}$ hat, sodass $\tau \in I_{\tau,\xi}$ und letzteres insbesondere offen ist. Indem wir das vorherige Argument auf die Anfangsbedingungen $x(k\pi) = 0$ und $x((k + 1)\pi) = 0$ anwenden, finden wir, dass die in (a) gefundenen Lösungen x_k und $x_{(k+1)}$ die eindeutig bestimmten, und nach der Charakterisierung maximaler Lösungen durch ihr Randverhalten, auch die maximalen Lösungen der jeweiligen Anfangswertprobleme sind. Die Eindeutigkeits der betrachteten Lösungen liefert uns nun, dass $\lambda(t) \notin \{t - k\pi, t - (k + 1)\pi\}$ für alle $t \in I_{\tau,\xi}$. Die Lösung λ ist als Lösung der Differentialgleichung insbesondere stetig, sodass es kein $t_0 \in I$ gibt, mit der Eigenschaft, dass $k\pi > t_0 - \lambda(t_0)$ oder $(k + 1)\pi < \lambda(t_0)$. Andernfalls lieferte der Zwischenwertsatz, dass ein t' in dem offenen Intervall mit Endpunkten τ und t_0 existiert, sodass $\lambda(t') = t' - k\pi$ oder $\lambda(t') = t' - (k+1)\pi$. Das widerspräche aber der Eindeutigkeit der zuvor gefundenen Lösungen x_k bzw. x_{k+1}, denn für die Anfangsbedingung $x(t') = t' - k\pi$ oder $x(t') = t' - (k+1)\pi$ können wir nun keine eindeutige Lösung mehr angeben. Also muss für alle $t \in I_{\tau,\xi}$ gelten, dass $(t, \lambda(t)) \in T_k$, d.h., $\Gamma(\lambda) \subseteq T_k$.

(c) Wir können uns auf den Fall beschränken, dass die Anfangswerte $(\tau, \xi) \in T_k$ für ein bestimmtes $k \in \mathbb{Z}$. Das Maximalität der Lösungen x_k haben wir bereits in Teil (a) & (b) überprüft. In der betrachteten Situation gilt nach Teil (b), dass die maximale Lösung des Anfangswertproblems zu $x(\tau) = \xi$ der Abschätzung $k\pi < t - \lambda(t) < (k + 1)\pi$ genügt. Sei nun $I_{\tau,\xi} = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Angenommen, $b < \infty$. Falls $\lim_{t \uparrow b}(t - \lambda(t)) \in \{k\pi, (k+1)\pi\}$, dann haben wir einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der maximalen Lösungen x_k bzw. x_{k+1}. Aus Stetigkeitsgründen scheidet auch die Möglichkeit, dass $\limsup_{t \uparrow b} |\lambda(t)| = \infty$ aus. Damit haben wir alle Möglichkeiten verneint, die es für die obere Grenze des Existenzintervalls der maximalen Lösung λ laut Charakterisierungssatz maximaler Lösungen anhand ihres Randverhaltens gibt. Somit war die Annahme, $b < \infty$ falsch und es gilt $b = +\infty$. Analog erhält man $a = -\infty$. Zusammen mit der Maximalität der Lösungen $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist für beliebige $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ das maximale Existenzintervall gegeben durch $I_{\tau,\xi} = \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 67 (F11T3A2) Sei $\mathbb{R}^2 \supseteq D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | t^2 + x^2 < 1\}$. Wir untersuchen das Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, wobei $f : D \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \sqrt{1 - t^2 - x^2}$ und $x(0) = 0$. D ist als offene Einheitskreisscheibe in der (t, x)-Ebene eine Gebiet. Zudem ist die Funktion f auf ganz D stetig und stetig differenzierbar, insbesondere also auch in x stetig partiell differenzierbar. Damit genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung in x. Da $(0, 0) \in D$ garantiert uns der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems, wobei das maximale Existenzintervall I der Lösung offen ist und gilt $0 \in I$. Wir schreiben $I = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Da bereits für alle $(t, x) \in \bar{D}$ gilt $f(t, x) \leq \sqrt{1 - t^2}$, finden wir, dass $-\infty < -1 \leq a < 0 < b \leq 1 < \infty$.

(b) Wir zeigen nun, dass $\phi(b) \equiv \lim_{t\uparrow b} \phi(t) \in \mathbb{R}$. Für die Trajektorie der maximalen Lösung ϕ aus (a) gilt $(t, \phi(t)) \in D$ für alle $t \in I$. Damit folgt, dass $(b, \phi(b)) \in \bar{D}$, dem Abschluss von D (bzw. hier auch der Vervollständigung von D), liegt. Da bereits dann gilt, dass $-1 \leq \phi(b) \leq 1$, gilt automatisch $\phi(b) \in \mathbb{R}$. Analog sehen wir, dass $(a, \phi(a)) \in \bar{D}$, damit $-1 \leq \phi(a) \leq 1$, also $\phi(a) \in \mathbb{R}$.
(c) Wir zeigen nun, dass $-a = b$, mit anderen Worten, ist das maximale Existenzintervall symmetrisch bzgl. 0, $I = (-b, b)$. Angenommen, I ist nicht symmetrisch um 0. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $b > |a|$. Mit $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist auch $\psi : (-b, -a) \to \mathbb{R}$, definiert durch $\psi(t) = -\phi(-t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems, denn es gilt $\psi(0) = -\phi(-0) = 0$ und $\psi'(t) = -(-d\phi(-t)/d(-t)) = d\phi(-t)/d(-t) = \sqrt{1 - (-t)^2 - \phi(-t)^2} = \sqrt{1 - t^2 - \psi(t)^2}$. Da aber für $b \neq |a|$ wegen unterschiedlicher Definitionsbereiche gilt $\psi \neq \phi$ haben wir zwei verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems gefunden, wobei sich ψ nicht durch Einschränkung von ϕ ergibt. Letzteres widerspricht der Maximalität von ϕ. Also war die Annahme falsch und es gilt $b \leq |a|$. Analog zu eben schließt man den Fall, dass $b < |a|$ aus. Damit kann nur noch $b = -a$ gelten, und das maximale Existenzintervall ist symmetrisch bzgl. 0. Wir zeigen nun, dass $b^2 + \phi(b)^2 = 1$. Da $(b, \phi(b)) \in \bar{D}$, müssen wir nur den Fall $b^2 + \phi(b)^2 < 1$ ausschließen. Angenommen, $b^2 + \phi(b)^2 =: c^2 < 1$ mit $c \in [0, 1)$, dann haben wir einen Widerspruch zur Maximalität der Lösung ϕ. Denn diese ist bereits beschränkt und auch deren Existenzintervall I ist beschränkt (in $\mathbb{R}$). Der Satz über die Charakterisierung maximaler Lösungen anhand ihres Randverhaltens liefert nun, dass die Maximalität von ϕ $\lim_{t\uparrow b} \operatorname{dist}((t, \phi(t)), \partial D) = 0$ erfordert, d.h., dass $b^2 + \phi(b)^2 = 1$. Zuletzt zeigen wir, dass $\sqrt{2}^{-1} < b < 1$. Die obere Abschätzung haben wir bereits in Teil (a) gefunden, sodass nur der Nachweis von $\sqrt{2}^{-1} < b$ aussteht. Hierzu bemerken wir, dass $x' = \sqrt{1 - t^2 - x^2} < 1$ für alle $(t, x) \in D \setminus \{(0, 0)\}$. Damit ist $x(t) < t$ für alle $I \ni t > 0$. Damit haben wir für $t > 0$ die Abschätzung $\phi(t) < t$ für die maximale Lösung des zu untersuchenden Anfangswertproblems. Zusammen mit der vorher bewiesenen Gleichung, dass $b^2 + \phi(b)^2 = 1$ finden wir, dass auch im Limes $t|b$ gilt $1 = b^2 + \phi(b)^2 < 2b^2$, also $b > \sqrt{2}^{-1}$. Wegen $x \neq 0$ ist de Ungleichung strikt. $\square$

Aufgabe 68 (F12T3A5) Wir sollen ein Fundamentalsystem von Lösungen für das lineare System $x' = Ax$ bestimmen, wobei $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \ni A$ gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{977}$$

Laut Vorlesung definieren die Spaltenvektoren der Fundamentalmatrix des linearen Systems ein Fundamentalsystem. Die Fundamentalmatrix ist laut einem Vorlesungsresultat gegeben durch $\Phi(t, 0) = \exp(tA)$, wo $t \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$ von A, um zu überprüfen, ob A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar oder zumindest ähnlich zu einer Matrix in Jordan-

Normalform ist.

$$\begin{aligned}\chi_A(z) &= \det(A - zE_3)\\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-z & -1 & 1\\ 1 & -1-z & 0\\ 1 & 0 & -1-z\end{pmatrix}\right)\\ &= (1-z)(1+z)^2 + (1+z) - (1+z)\\ &= (1-z)(1+z)^2.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, und die Vielfachheiten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte. Explizit hat A also den Eigenwerte $z_+ = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $\mu_a(z_+) = 1$ und den Eigenwert $z_- = -1$ mit der algebraischen Vielfachheit $\mu_a(z_-) = 2$. Wir bestimmen die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert z_-, $\mu_g(z_-) = \dim\ker(A - z_-E_3)$.

- *Eigenvektoren zu $z = z_-$.*

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array} \tag{978}$$

Aus dem linearen Gleichungssystem folgt, dass $\ker(A - z_-E_3) = \mathbb{R}\cdot(0,1,1)^T$, sodass der Lösungsraum insbesondere eindimensional ist. Somit ist $\mu_a(z_-) = 2 > 1 = \mu_g(z_-)$ und A mithin nicht diagonalisierbar. Wir berechnen nun die Eigenvektoren zweiter Stufe, indem wir $\ker((A - z_-)^2)$ bestimmen. Das entsprechende lineare Gleichungssystem lösen wir wiederum mit dem Gausschen Eliminationsverfahren

$$(A - z_-E_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}. \tag{979}$$

Somit lösen wir

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ \hline 2 & -1 & 1 & 0\end{array}. \tag{980}$$

Damit finden wir $v_{1,2} = (1,0,-2)^T$ und $v_{2,2} = (0,1,1)^T$ als zwei lineare unabhängige Vektoren, die den verallgemeinerten Eigenraum der Stufe 2 zu z_- aufspannen. Um nun einen Basis des Eigenraums von z_- zu bestimmen, müssen wir den zu $v_{1,2}$ gehörigen Hauptvektor der ersten Stufe finden, denn nur $v_2 \equiv v_{1,2} \in \mathrm{Eig}_2(A, z_-) \setminus \mathrm{Eig}_1(A, z_-)$. Dieses v_1 ist gegeben durch $(A - z_-E_3)v_2 = v_1$ und wir finden

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}. \tag{981}$$

Damit ist v_1, v_2 die benötigte Jordankette.

- *Eigenvektoren zu $z = z_+$.* Wir berechnen $\ker(A - z_+ E_3)$ mittels Gauss-Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}, \tag{982}$$

woraus wir erkennen, dass $v_3 = (1,2,2)^T \neq 0$ den Lösungsraum aufspannt, $\ker(A - z_+ E_3) = \mathbb{R} \cdot (1,2,2)^T$.

Damit können wir die Transformationsmatrix T aufstellen, die benötigt wird, um A in Jordan'sche Normalform zu überführen. Es gilt

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \;\&\; J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{983}$$

Wir bestimmen die Inverse T^{-1}:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ \hline \end{array}. \tag{984}$$

Die gesuchte inverse Matrix ist also

$$T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{985}$$

Nun gilt

$$\exp(tA) = T \exp(tJ_A) T^{-1} \tag{986}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{987}$$

Somit ist das gesuchten Fundamentalsystem gegeben durch

$$\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{988}$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{989}$$

$$\Phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{990}$$

Aufgabe 69 (H19T1A4) (a) Sei $\beta \in \mathbb{R}$. Gesucht ist ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $y'' - 2\beta y' + \beta^2 y = 0$. Bei der vorliegenden Differentialgleichung handelt es sich um eine skalare lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Beschränken wir uns auf reellwertige Lösungen, so erwarten wir einen zwei-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{L}$ von Lösungen. Um ein Fundamentalsystem, d.h., einen Basis von $\mathcal{L}$ zu finden, bestimmen wir die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $z^2 + 2\beta z + \beta^2 = 0$, die durch Einsetzen von $y = C\exp(zx)$ mit $z \in \mathbb{C}$ in die Differentialgleichung $y''+2\beta y'+\beta^2 y = 0$ entsteht. Wir sehen, dass $z = -\beta$ eine zweifache Nullstelle des assoziierten charakteristischen Polynoms ist. Aus der Vorlesung ist nun bekannt, dass durch $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-\beta x)$ und $\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\exp(-\beta x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung gegeben sind. Denn äquivalent dazu ist das Nicht-Verschwinden der Wronski-Determinante ω bei $x = 0$, was wir für das vorliegende System leicht bestätigen: $\omega(x = 0) = \Phi_1(0)\Phi_2'(0) - \Phi_1'(0)\Phi_2(0) = 1 \cdot 1 - \cdot 1 \cdot 0 = 1 \neq 0$. Somit ist $\mathcal{B} = \{\Phi_1, \Phi_2\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
(b) Gesucht sind nun alle Werte von $\beta \in \mathbb{R}$, sodass $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, wo $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung aus (a) ist. Da $y \in \mathcal{L}$ gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sodass $y(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) = (c_1 + c_2 x)\exp(-\beta x)$. Es soll also gelten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c_1 + c_2 x}{\exp(\beta x)} = 0. \tag{991}$$

Wir sehen bereits, dass $\beta \neq 0$, denn ansonsten wäre der Nenner konstant 1 und für die Lösung definiert durch $y(x) = x$ lässt sich die Anforderung an das Verschwinden des Grenzwerts für $x \to \infty$ nicht realisieren.

- *Fall 1:* $c_2 \neq 0$. Dann wenden wir die Regel von L'Hopital an und erhalten

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{c_1 + c_2 x}{\exp(\beta x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{c_2}{\beta\exp(\beta x)}. \tag{992}$$

  Der rechte Ausdruck ist 0 genau dann, wenn $\beta > 0$.

- *Fall 2:* $c_2 = 0, c_1 \neq 0$. In diesem Fall existiert der Grenzwert genau dann, wenn $\beta < 0$.

- *Fall 3:* $c_2 = 0 = c_1$. In diesem Fall können wir $\beta \in \mathbb{R}$ beliebig wählen, da $y \equiv 0$.

Insgesamt sehen wir, dass $\beta > 0$ erforderlich ist, um das asymptotische Verhalten für alle $y \in \mathcal{L}$ gemäß Anforderung zu gewährleisten. Mithin $\beta \in \mathbb{R}^+$
(c) Wir sollen nun für beliebiges $\beta \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y'' + 2\beta y' + \beta^2 y = \exp(-2x)$ bestimmen. Wir unterscheiden hierbei danach, ob $\beta = 2$ oder nicht. In jedem Fall ist die allgemeine Lösung $y \in y_p + \mathcal{L}$, wo $y_p \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist.

- *Fall 1:* $\beta \neq 2$. Wir bestimmen die partikuläre Lösung in der Form $y_p(x) = C_p \exp(-2x)$. Das liefert uns nach Einsetzen, dass $C_p = 1/(4 - 4\beta + \beta^2)$. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = \frac{\exp(-2x)}{(\beta - 2)^2} + c_1 \exp(-\beta x) + c_2 t \exp(-\beta x), \tag{993}$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- *Fall 2:* $\beta = 2$. In diesem Fall setzen wir $y_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \exp(-2x)$ an und bestimmen $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ durch Koeffizientenvergleich. Da Φ_1, Φ_2 ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden, vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung zu:

$$\begin{aligned} &(a_2 x^2 \exp(-2x))'' - 4(a_2 x^2 \exp(-2x))' + 4a_2 x^2 \exp(-2x) \\ &= \exp(-2x) \\ \Leftrightarrow &4a_2 \exp(-2x) - 8a_2 x \exp(-2x) + a_2 x^2 \exp(-2x) \\ &+ 8a_2 x^2 \exp(-2x) - 8a_2 x \exp(-2x) + 4a_2 x^2 \exp(-2x) \\ &= \exp(-2x) \\ \Leftrightarrow &4a_2 \exp(-2x) = \exp(-2x), \end{aligned}$$

sodass $a = 1/4$. Wenn wir $a_1 = 0 = a_0$ setzen, erhalten wir also eine partikuläre Lösung durch

$$y_p(x) = \frac{x^2 \exp(-2x)}{4}. \tag{994}$$

In diesem Fall ist die allgemeine Lösung also gegeben durch

$$y(x) = c_1 \exp(-2x) + c_2 \exp(-2x) + \frac{x^2 \exp(-2x)}{4}, \tag{995}$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In beiden Fällen sehen wir, dass $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wie gefordert. □

Aufgabe 70 (H07T2A5) Gegeben sei die Matrix $A = A(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ durch

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 \\ -2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}. \tag{996}$$

Zudem betrachten wir das lineare ebene Systeme $x' = A(\alpha)x$.
(a) Gesucht ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem des eben genannten ebenen

linearen Systems. Wir bestimmen dazu die Eigenwerte von $A(\alpha)$ als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_{A(\alpha)}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A(\alpha) - zE_2)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_{A(\alpha)}(z) &= (z-\alpha-2)(z-\alpha+1)+2 \\ &= (z-\alpha)(z-\alpha+1) - 2((z-\alpha+1)-1) \\ &= (z-\alpha)(z-(\alpha+1)).\end{aligned} \tag{997}$$

Für jeden Wahl von $\alpha \in \mathbb{R}$ hat $\chi_{A(\alpha)}$ damit zwei einfache und verschiedene Nullstellen, nämlich $z_< = \alpha$ und $z_> = \alpha + 1$. Insbesondere ist $A(\alpha)$ diagonalisierbar. Wir bestimmen noch die Eigenvektoren, um das Fundamentalsystem angeben zu können

- *Fall 1. $z = z_<$:* Wir benötigen eine Basis von $\ker(A(\alpha) - z_< E_2)$, die wir mittels Gauss-Eliminationsverfahren bestimmen.

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}, \tag{998}$$

woraus wir unmittelbar sehen, dass $\dim\ker(A(\alpha) - z_< E_2) = 1$ und ein Basisvektor durch $v_< = \sqrt{5}^{-1}(1,-2)^T \in \mathbb{R}^2$ als Lösung des linearen Gleichungssystems gegeben ist.

- *Fall 2. $z = z_>$:* Wir benötigen eine Basis von $\ker(A(\alpha) - z_> E_2)$, die wir mittels Gauss-Eliminationsverfahren bestimmen.

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}, \tag{999}$$

woraus wir erkennen, dass $\dim\ker(A(\alpha) - z_> E_2) = 1$ und ein Basisvektor durch $v_> = \sqrt{2}^{-1}(1,-1)^T \in \mathbb{R}^2$ als Lösung des linearen Gleichungssystems gegeben ist.

Laut Vorlesung ist ein Fundamentalsystem nun gegeben durch $\mathcal{B} = \{\Phi_1, \Phi_2\}$, wobei $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \exp(z_< t)v_<$ und $\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \exp(z_> t)v_>$.
(b) Wir suchen die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $(0,0)^T$ stabile bzw. asymptotisch stabile Ruhelage des Systems ist. Wir bezeichnen die gesuchte Menge als M_s für den Fall, dass $(0,0)^T$ stabile Ruhelage ist, und als M_a für den Fall, dass $(0,0)^T$ sogar asymptotisch stabile Ruhelage ist. Da $x' = A(\alpha)x$ für festes α ein lineares System mit konstanten Koeffizienten ist, können wir das Eigenwertkriterium zu Rate ziehen. Diese zufolge ist $(0,0)^T$ stabile Ruhelage genau dann, wenn die Eigenwerte $z_< \leq 0$ und $z_> \leq 0$ erfüllen. Es besagt zudem, dass $(0,0)^T$ asymptotisch stabile Ruhelage genau dann ist, wenn die Eigenwerte $z_< < 0$ und $z_> < 0$ erfüllen. Das liefert uns für den Fall einer stabilen Ruhelage $\alpha \leq 0$ und $\alpha + 1 \leq 0$. Für den Fall einer asymptotisch stabilen Ruhelage finden wir $\alpha < 0$ und $\alpha + 1 < 0$. Somit finden wir für die gesuchten Mengen $M_s = (-\infty, -1] \subseteq \mathbb{R}$ und $M_a = (-\infty, -1) \subseteq \mathbb{R}$. □

Aufgabe 71 (F09T2A2) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}. \tag{1000}$$

(a) Wir zeigen, dass die Ruhelage von $x' = Ax$ asymptotisch stabil ist. Da es sich beim vorliegenden Differentialgleichungssystem um ein lineares System handelt, sind die Ruhelagen gegeben durch alle $x_0 \in \ker(A)$. Wir berechnen die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$, wobei E_3 die 3×3-Einheitsmatrix ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\chi_A(z) &= (-1-z) \cdot (-1)^{2+2} \det\left(\begin{pmatrix} -5-z & 3 \\ 3 & -5-z \end{pmatrix}\right) \\
&= (-1-z)((-5-z)^2 - 3^2) \\
&= -(z+1)(z+5+3)(z+5-3) \\
&= -(z+1)(z+8)(z+2).
\end{aligned} \tag{1001}$$

Die Eigenwerte sind hier also alle einfach und insbesondere A diagonalisierbar. Explizit finden wir die Eigenwerte $z_1 = -1$, $z_2 = -2$, $z_3 = -8$, die alle echt negativ sind. Damit hat $x' = Ax$ insbesondere nur die Ruhelage $(0,0,0)^T \in \mathbb{R}^3$ und diese ist nach dem Eigenwertkriterium zur Stabilitätsuntersuchung von Ruhelagen linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten asymptotisch stabil.
(b) Sei nun $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ stetig. Dann existiert nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen mit linear beschränkter rechter Seite zu jedem vorgegebenen Anfangswert $y(0) = \xi \in \mathbb{R}^3$ eine global definierte und eindeutige bestimmte (maximale) Lösung von $y' = Ay + b(t)$ zur genannten Anfangsbedingung. Wir zeigen nun, dass jede Lösung y asymptotisch stabil ist. Sei $\xi = y(0)$ und sei Y eine Lösung des Anfangswertproblems $Y' = AY + b(t)$ mit $Y(0) = \eta \in \mathbb{R}^3$. Wir zeigen, dass $\lim_{t\to\infty} \|y - Y\|_\infty(t) = 0$. Zunächst gilt nach der Lösungsformel für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten und Inhomogenität

$$\begin{aligned}
y(t) &= \exp(At)\xi + \int_0^t \exp(A(t-\tau))b(\tau)\,d\tau \\
Y(t) &= \exp(At)\eta + \int_0^t \exp(A(t-\tau))b(\tau)\,d\tau \\
\Rightarrow y(t) - Y(t) &= \exp(At)(\xi - \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{3} (\xi_i' - \eta_i') \exp(z_i t) v_i,
\end{aligned}$$

wo ξ_i' und η_i' für $i \in \{1,2,3\}$ die Komponenten von ξ und η ausgedrückt in der (bzgl. $\|.\|_\infty$ normierten) Eigenbasis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ von A sind und die $z_i\,(1 \le i \le 3)$ die in Teil (a) bestimmten Eigenwerte sind. Da $z_i < 0$ für alle $i \in \{1,2,3\}$, sehen wir, dass $y(t) - Y(t) \to 0$ für $t \to 0$. Das ist insbesondere unabhängig von der Wahl von $\xi \in \mathbb{R}^3$! Somit ist $\lim_{t\to\infty} \|y - Y\|_\infty = 0$, mithin eine beliebige Lösung y von $y' = Ax + b$ asymptotisch stabil. □

Aufgabe 72 (H11T1A4) Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = Ax + b(t),\ x(0) = (1,1,1)^T,\ b(t) = (-4,-2,2)^T \exp(t) \tag{1002}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1003}$$

Wir stellen zunächst fest, dass $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für lineare Systeme mit auf $\mathbb{R}$ stetiger rechter Seite, d.h., stetigem $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto b(t)$. Wir sehen, dass die dritte Komponente der Differentialgleichung bereits elementar integrierbar ist, denn sie reduziert sich auf eine skalare lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und von der Ordnung 1. Genauer ist

$$x_3'(t) = -x_3(t) + 2\exp(t)\,,\ x_3(0) = 1 \tag{1004}$$

Damit finden wir

$$x_3(t) = \exp(-t) + 2\int_0^t \exp(2\tau - t)d\tau = \exp(-t) + \exp(t) - \exp(-t) = \exp(t). \tag{1005}$$

Indem wir das so erhaltene $x_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in die erste und zweite Komponente des Differentialgleichungssystems einsetzen, erhalten wir das reduzierte System

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3(t) - 4\exp(t) \\ -3x_3(t) - 2\exp(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}\exp(t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad - 6\int_0^t \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(t-\tau)\right)\exp(\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen also das Matrix-Exponential

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(t) - \sin(t) - 6\int_0^t \cos(t-\tau)\exp(\tau)\,d\tau + 6\int_0^t \sin(t-\tau)\exp(\tau)\,d\tau \\ x_2(t) &= \sin(t) + \cos(t) - 6\int_0^t \sin(t-\tau)\exp(\tau)\,d\tau - 6\int_0^t \cos(t-\tau)\exp(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Wir berechnen das Hilfsintegral

$$J(t) \equiv \exp(it) \int_0^t \exp((1-i)\tau) d\tau, \tag{1006}$$

aus dem wir durch Real- bzw. Imaginärteilbildung die Integrale über den Produktfunktionen aus Sinus- bzw. Kosinusfunktion und Exponentialfunktion erhalten. Es ist

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{\exp(it)(\exp((1-i)t)) - 1}{2} + i\frac{\exp(it)(\exp((1-i)t) - 1)}{2} &(1007)\\ &= \frac{\exp(t) - \cos(t)}{2} - i\frac{\sin(t)}{2} + i\frac{\exp(t)}{2} - \frac{i\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}, &(1008)\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos(t-\tau)\exp(\tau)\, d\tau &= \Re[J(t)] = \frac{\exp(t) + \sin(t) - \cos(t)}{2}, &(1009)\\ \int_0^t \sin(t-\tau)\exp(\tau)\, d\tau &= \Im[J(t)] = \frac{\exp(t) - \sin(t) - \cos(t)}{2}. &(1010)\end{aligned}$$

Damit können wir auch $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angeben:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(t) - \sin(t) - 6\sin(t) = \cos(t) - 7\sin(t), &(1011)\\ x_2(t) &= \sin(t) + \cos(t) + 6\cos(t) - 6\exp(t) = \sin(t) + 7\cos(t) - 6\exp(t). &(1012)\end{aligned}$$

Damit haben wir die Lösung $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ gefunden. □

Aufgabe 73 (H19T2A4) Gegeben sei ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ sowie Matrizen $A, B, M \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Die affine Differentialgleichung $x' = Mx + c$ ist zu untersuchen.
(a) Wir zeigen: Ist y eine Lösung der obenstehenden Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 0$, dann ist $x(t) = \exp(tM)x_0 + y(t)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $x(0) = x_0$. Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt $x'(t) = M\exp(tM)x_0 + y'(t) = M\exp(tM)x_0 + My(t) + c = M(\exp(tM)x_0 + y(t)) + c = Mx(t) + c$. Zudem gilt $x(0) = \exp(0 \cdot M)x_0 + y(0) = E_n \cdot x_0 + 0 = x_0$, sodass $x(t) = \exp(tM)x_0 + y(t)$ die angegebene Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ erfüllt. Die Eindeutigkeit ist aufgrund des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für lineare Systeme klar.
(b) Wir zeigen: Es existiert genau dann eine Lösung des Randwertproblems $x' = Mx + c$ mit $Ax(0) + Bx(1) = d$ für alle $d \in \mathbb{R}^n$, wenn die Matrix $C = A + B\exp(M)$ invertierbar ist. Wir suchen zunächst eine Lösung x_h für den Fall, dass $c = 0$. Dann ist $x_h(t) = \exp(tM)x_h(0)$. Somit $x_h(1) = \exp(M)x_h(0)$. Damit sehen wir, dass eine Lösung des homogenen Problems mit $d' \in \mathbb{R}^n$ von der obenstehenden Form genau dann existiert, wenn $Ax_h(0) + Bx_h(1) = d' = (A + B\exp(M))x_h(0)$ lösbar ist. Mit anderen Worten, genau dann, wenn $C \equiv A + B\exp(M)$ invertierbar ist. Wir wählen nun y als Lösung von $y' = My + c$ mit $y(0) = 0$ und suchen eine Lösung x in der Form $x = x_h + y$. Es ist dann $x_h(t) = \exp(tM)x_0$ mit noch zu bestimmenden x_0 und

die Randbedingung geht über in

$$
\begin{aligned}
Ax_h(0) + Ay(0) + Bx_h(1) + By(1) &= d \\
\Leftrightarrow Ax_h(0) + Bx_h(1) &= d' := d - By(1) \\
\Leftrightarrow (A + B\exp(M))x_0 &= d'.
\end{aligned}
\tag{1013}
$$

Damit sehen wir, dass

$$
x(t) = \exp(tM)(A + B\exp(M))^{-1}(d - By(1)) + y(t) \tag{1014}
$$

mit y wie in (a).
(c) Sei $F(X) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} X^{k-1}/k!$. Dann ist $y(t) = tF(tM)c$, wo y wie in (a) ist. Es gilt zunächst $y(0) = 0 \cdot F(0 \cdot M)c = 0$ und, für $t \in \mathbb{R}$ beliebig,

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k M^{k-1}}{k!} \right) c \right)' \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} M^{k-1} \left(\frac{t^k}{k!} \right)' \right) c \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} M^{k-1}}{(k-1)!} c \\
&= c + M \cdot t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(tM)^{k-2}}{(k-1)!} c \\
&= c + M \cdot (tF(tM)c) \\
&= c + My(t).
\end{aligned}
\tag{1015}
$$

Somit $y'(t) = My(t) + c$. Damit erfüllt $y = tF(tM)c$ die Anforderungen der Voraussetzung von (a). $\square$

Aufgabe 74 (F18T3A4) (a) Sei $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine beliebige aber fixierte schiefsymmetrische Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist $x^T Bx \in \mathbb{R}$ und es gilt daher $x^T Bx = (x^T Bx)^T$. Zudem $(x^T Bx)^T = x^T B^T (x^T)^T = x^T B^T x = -x^T Bx$. Somit haben wir $x^T Bx = -x^T Bx$, sodass $x^T Bx = 0$.
(b) Seien $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und so, dass $A(x)$ positiv semidefinit für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $B(x)$ schiefsymmetrisch für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x^T x$ eine Lyapunov-Funktion für $\dot{x} = -(A(x) + B(x))x$ ist. Die betrachtete Differentialgleichung hat nach dem Satz von Peano für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ eine, nicht notwendigerweise eindeutige Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall I mit $0 \in I$ und mit $x(0) = \xi$. Wir bezeichnen eine solche Lösung im folgenden mit λ. Es gilt $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), \dot{x} \rangle = -2\langle x, (A(x) + B(x))x \rangle = -2x^T A(x)x - 2x^T B(x)x = -2x^T A(x)x$, denn $B(x)$ ist eine schiefsymmetrische Matrix für beliebiges x, sodass $x^T B(x)x = 0$ nach Teil (a). Da A punktweise positiv semi-definit nach Voraussetzung ist, gilt zudem $x^T A(x)x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $\dot{V}(x) = -2x^T A(x)x \leq 0$.
(c) Wir betrachten das ebene autonome System $\dot{x} = -x^3 + xy^2$ und $\dot{y} = -x^2 y - 2y$.

Wir setzen $z = (x, y)^T$ und schreiben das System in der Form, die wir in Teil (b) untersucht haben:

$$\dot{z} = -A(z)z - B(z)z, \tag{1016}$$

mit

$$A(z) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \& \ B(z) = \begin{pmatrix} 0 & xy \\ -xy & 0 \end{pmatrix}. \tag{1017}$$

Sei $z \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir sehen, dass für $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ beliebig gilt $u^T A(z) u = x^2 u_1^2 + 2u_2^2 \geq 0$, sodass durch $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}, z \mapsto A(z)$ eine matrixwertige Funktion definiert ist, wie in den Voraussetzungen von Teil (b) benötigt. Ferner ist $B(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ offensichtlich $B(z) = -B(z)^T$, wie man direkt aus $B(z)$ abliest. Somit ist $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}, z \mapsto B(z)$ an jedem Punkt schiefsymmetrisch. Nach Aufgabenteil (b) ist nun durch $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, z \mapsto z^T z$ eine Lyapunov-Funktion für das betrachtet System definiert. Da $V(0) = 0$ und $V(z) = x^2 + y^2 > 0$ für alle $z = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist $z_0 = (0, 0)^T$ ein globales, insbesondere also lokales Minimum von V. Nach dem ersten Stabilitätskrietrium von Lyapunov handelt es sich bei z_0 also um eine stabile Ruhelage, wobei für die Ruhelageeigenschaft $0 = -A(z_0)z_0 - B(z_0)z_0$ unmittelbar aus dem Differentialgleichungssystem abgelesen wurde. $\square$

Aufgabe 75 (F18T2A5) Zu $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Anfangswertproblem $u''(x) - u(x) + 4u(x)^3 = 0$, $u(0) = 0$ und $u'(0) = u_1$.
(a) Wir behaupten, dass für $G(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto -u^2/2 + u^4$ die Funktion $L(x) = 1/2u'(x)^2 + G(u(x))$ konstant in x ist, wobei u eine Lösung des obigen Anfangswertproblems ist. Es gilt $d_x L(x) = u''(x)u'(x) - u(x)u'(x) + 4u(x)^3 u'(x) = (u''(x) - u(x) + 4u(x)^3)u'(x) = 0$, wobei wir verwendet haben, dass $u(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Die oben angesprochene Lösung existiert nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, wobei wir für diese Aufgabe offenbar aus Ausführungen dazu verzichten sollen.
(b) Wir zeigen nun, dass das obenstehenden Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung für alle $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_{u_0,u_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ hat. Zunächst definieren wir $v(x) = u'(x)$ und schreiben die homogene nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von Differentialgleichungen der Ordnung 1 um.

$$u'(x) = v(x) \quad v'(x) = u(x) - 4u(x)^3. \tag{1018}$$

Da die rechte Seite ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (v, u - 4u^3)$ definiert, genügt die rechte Seite eine lokalen Lipschitz-Stetigkeitsbedingung in den Variablen (u, v). Zusammen mit der Gebietseigenschaft von $\mathbb{R}^2$ liefert der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz nun die Existenz einer eindeutig bestimmten, maximalen Lösung $\lambda_{u_0,u_1} = (\mu, \nu) : I(u_0, u_1) \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (u(x), v(x))$ für das Anfangswertproblem, das durch das Differentialgleichungssystem zusammen mit $u(0) = u_0, v(0) = u'(0) = u_1$ für $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ definiert wird. Hierbei ist das Existenzintervall der maximalen Lösung $I(u_0, u_1)$ offen, maximal und mit der Eigenschaft, dass $0 \in I(u_0, u_1)$. Wegen $u'(x) = v(x)$ auf $I(u_0, u_1)$ ist μ insbesondere zweimal

stetig differenzierbar, denn auch ν ist als Komponente der Lösung λ des Anfangswertproblems stetig differenzierbar. Wir zeigen nun, dass $I(u_0, u_1) = \mathbb{R}$. Die Inklusion "$\subseteq$" ist trivial. Für "$\supseteq$" bemerken wir, dass L längs λ_{u_0,u_1} konstant ist, d.h., es gilt $\nu(x)^2 - \mu(x)^2 + 4\mu(x)^4 = u_1^2 - u_0^2 + 4u_1^2 =: c$. Angenommen, λ_{u_0,u_1} wäre nicht mit maximalem Existenzintervall $\mathbb{R}$, aber maximale Lösung, dann gäbe es ein $a \in \mathbb{R}^+$, sodass $I(u_0, u_1) \supseteq (0, a)$, und das rechte Intervall nicht weiter nach rechts ausgedehnt werden könnte. Laut Charakterisierungssatz maximaler Lösungen anhand des Randverhaltens, wäre dann aber $\limsup_{t\uparrow a} |\lambda_{u_0,u_1}(x)\|_2^2 = \infty$. Wähle nun $\epsilon > 0$ dergestalt, dass $\mu(x)^2 < -\mu(x)^2 + 4\mu(x)^4$ für $x > a - \epsilon$. Dann gilt $\nu(x)^2 + \mu(x)^2 < \nu(x)^2 - \mu(x)^2 + 4\mu(x)^4 = c < \infty$, was bei Betrachtung des Limes Superior $t \uparrow a$ einen Widerspruch erzeugt. Also war die Annahme, $a < \infty$ falsch, und es gilt $\mathbb{R}_+ \subseteq I(u_0, u_1)$. Ebenso verfährt man für die untere Grenze von $I(u_0, u_1)$, wobei hier die Endlichkeit der unteren Schranke $b \in \mathbb{R}^-$ zum Widerspruch geführt wird. Laut Charakterisierungssatz maximaler Lösungen bleibt dann nur noch $I(u_0, u_1) = \mathbb{R}$ übrig, denn $\partial\mathbb{R}^2 = \emptyset$ schließt bereits a priori die dritte Option für das Randverhalten der maximalen Lösung aus.
(c) Wir bestimmen nun die Ruhelagen der Differentialgleichung. In der (u, v)-Notation genügt u der Bedingung $u - 4u^3 = 0$, sodass $u \in \{-1/2, 0, 1/2\}$ nur möglich ist. Zudem gilt $v = 0$. Für das in (b) betrachtete System bezeichnen wir die rechte Seite mit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (v, u - 4u^3)$, und berechnen die Jacobi-Matrix

$$\mathrm{Jac}(f)(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 12u^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1019}$$

Somit stellen wir fest, dass

$$A_0 := \mathrm{Jac}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1020}$$

$$A_+ := \mathrm{Jac}(f)(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1021}$$

$$A_- := \mathrm{Jac}(f)(-2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1022}$$

Da $\det(A_0 - zE_2) = 0$ zu den beiden Lösungen $z \in \{\pm 1\}$ führt, schließen wir, dass $u = 0$ eine instabile Ruhelage ist, da A_0 einen Eigenwert mit positivem Realteil hat. Für A_+, A_- liefert $0 = \det(A_\pm - zE_2)$ jeweils die Lösungen $z_\pm \in \{\pm i\sqrt{2}\}$. Somit haben wir jeweils zwei einfache, rein imaginäre Nullstellen von $\mathrm{Jac}(f)$ bei $(u, v) = (\pm 2, 0)$. Die entsprechenden Eigenwerte haben Realteil 0, sodass linearisierte Stabilität keine Aussage erlaubt.

Aufgabe 76 (F01T3A5) (a) Wir folgen dem Hinweis und multiplizieren die Differentialgleichung mit $\dot{x}$. Anwendung der Kettenregl liefert

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) = 0. \tag{1023}$$

Integration von 0 bis t liefert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^4}{4}\right) = 0, \tag{1024}$$

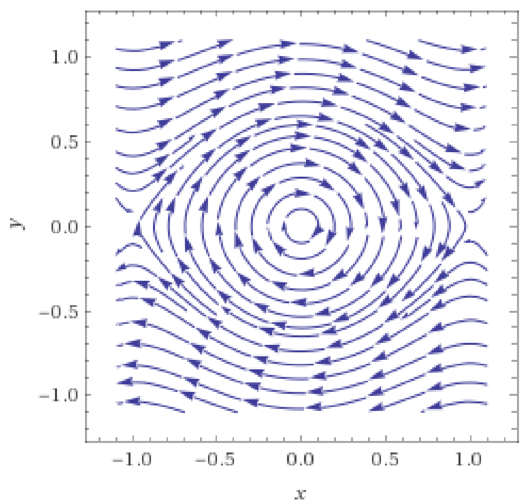
wobei wir $\dot{x}(0) =: x_1 \in \mathbb{R}, x(0) =: x_0 \in \mathbb{R}$ gesetzt haben. Somit ist die Funktion $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto v^2/2 + u^2/2 - u^4/4$ dergestalt, dass $L(x(t), \dot{x}(t)) = L(x_0, x_1)$, d.h., konstant längs jeder Lösung $x(t)$ der angegebenen Differentialgleichung mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = x_1$. In der Tat gilt für jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ der angegebenen Differentialgleichung, dass $d_t L(x(t), \dot{x}(t)) = (\ddot{x}(t) + x(t) - x(t)^3)\dot{x}(t) = 0$ für alle $t \in I$, sodass die im Spezialfall konstruierte Funktion L tatsächlich ein erstes Integral der Differentialgleichung ist.
(b) Wir bestimmen die kritischen Punkte der Differentialgleichung. Da $\dot{x}(t) = 0$ für alle $t \in I$, wo I das Existenzintervall der Lösung x ist, liefert der Zwischenwertsatz der Differentialrechnung, dass auch $\ddot{x}(t) = 0$ für alle $t \in I^\circ$. Da nach Überführung der Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung mit stetig differenzierbarer rechter Seite die Voraussetzungen des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz unproblematisch erfüllt sind, können wir I als maximal und offen annehmen. Damit ist die Bedingung für Gleichgewichtslagen $0 = -x + x^3$, d.h., $x \in \{-1, 0, 1\}$. Zudem gilt $L(0, 0) = L(0, 1) = L(0, -1) = 0$ und da L erstes Integral der Differentialgleichung ist, gilt $d_t L(x, \dot{x}) = 0$, sodass wir L auch als Lyapunov-Funktion des zur Differentialgleichung äquivalenten Systems erster Ordnung auffassen können (für $(0, 0)$, denn $L(0, 0) = 0$). Für die Hesse-Matrix von $L = L(u, v)$ gilt

$$\mathrm{Hess}(L)(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1025}$$

sodass $\mathrm{Hess}(L)(u = 0, v = 0) = E_2$, also positiv definit ist. Damit ist $(0, 0)$ ein lokales Minimum von L. Das erste Stabilitätskriterium nach Lyapunov liefert nun, dass $(0, 0)$ stabile Ruhelage des System erster Ordnung ist. Indem wir $H(u, v) := L(u, v) - L(1, 0)$ definieren, erhalten wir wegen $d_t H(x(t), \dot{x}(t)) = d_t L(x(t), \dot{x}(t)) = 0$ und $H(\pm 1, 0) = 0$ eine Lyapunov-Funktion für $(+1, 0)$ und $(-1, 0)$. Für die Hesse-Matrix von H gilt,

$$\mathrm{Hess}(H)(u, v) = \mathrm{Hess}(L)(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1026}$$

sodass $\mathrm{Hess}(H)(\pm 1, 0) = \mathrm{diag}(-2, 1)$ und diese damit bei $(\pm 1, 0)$ indefinit ist. Der Stabilitätssatz von Lyapunov liefert nun, dass $(\pm 1, 0)$ instabile Ruhelagen sind. Das Phasenportrait mit $\dot{x} =: y$ findet man in der nachstehenden Abbildung.



(c) Sei $(x, \dot{x})$ eine Lösung des zur Differentialgleichung äquivalenten Systems erster Ordnung mit $\dot{x}(0) = x_1, x(0) = x_0$. Setze $c = L(x_0, x_1) \in \mathbb{R}$. Es gilt, da L erstes Integral ist,

$$L(x, y) = c \Leftrightarrow y^2 - (x^2 - 1)^2 = 2c - 1. \tag{1027}$$

Falls $c > 1/2$, dann ist $0 < 2c - 1 = y^2 - (x^2 - 1)^2 \leq y^2$, also $|y(t)| \geq \sqrt{2c-1} > 0$, sodass $|x(t)| \geq \sqrt{2c-1}t$ und damit auf jeden Fall unbeschränkt ist, denn die Abschätzung liefert $\limsup_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$. Falls $c \leq 1/2$, dann ist $y^2 - (x^2 - 1)^2 \leq 0$ und es gilt $-(x^2 - 1)^2 \leq -(x^2 - 1)^2 + y^2 \leq 0$, sodass $|x| \leq 1$, also insbesondere x beschränkt ist. Da L konstant längs jeder Lösung ist, ist für $x_0 \in [-1, 1]$ und $y_0 \in [-\sqrt{1/2 - 1/2(x_0^2 - 1/2x_0^4)}, \sqrt{1/2 - 1/2(x_0^2 - 1/2x_0^4)}]$ jeweils $L(x_0, x_1) = c \leq 1/2$ zu erreichen. Infolge der vorangegangen Untersuchung ist dann die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems jeweils beschränkt. □

Aufgabe 77 (F04T2A5) Gegeben ist das ebene autonome System

$$\dot{x} = y \ \& \ \dot{y} = x + 2x^3 \tag{1028}$$

(a) Wir bestimmen alle Gleichgewichtslagen des Systems. Ein Punkt (x_0, y_0) ist definitionsgemäß eine Gleichgewichtslage des betrachteten Systems, wenn er eine Nullstelle der rechte Seite des obenstehenden Systems ist. Einsetzen liefert die beiden Gleichungen $y_0 = 0$ und $x_0 + 2x_0^3 = 0$, sodass $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ die einzige Gleichgewichtslagen sind. Wir klassifizieren diese über das Kriterium zur linearisierten Stabilität. Die Jacobi-Matrix des durch die rechte Seite definierten, offensichtlicherweise stetig differenzierbaren Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y = f_x(x, y), x + x^2 = f_y(x, y))$ ist

$$\mathrm{Jac}(F)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_x(x, y) & \partial_y f_x(x, y) \\ \partial_x f_y(x, y) & \partial_y f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + 6x^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1029}$$

Damit ist die Jacobi-Matrix von F ist in diesem Fall

$$\mathrm{Jac}(F)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A \tag{1030}$$

und für deren charakteristisches Polynom gilt $\chi_A(z) = \det(A - zE_2)$, und aus Null-Setzen des charakteristischen Polynoms erhalten wir die Eigenwerte: $0 = z^2 - 1$, also $z \in \{+1, -1\} =: \sigma(A)$. Da $\sigma(A)$ einen Eigenwert mit echt positivem Realteil, nämlich $z = +1$, enthält, liefert das Kriterium für linearisierte Stabilität, dass $(0, 0)$ eine instabile Gleichgewichtslage des Systems ist.
(b) Wir betrachten das zugeordnete lineare System und definieren $\delta_x := x - x_0 = x$ sowie $\delta_y := y - y_0 = y$. Das nun linear genäherte Differentialgleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_x \\ \dot{\delta}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix}. \tag{1031}$$

Die Eigenvektoren zu A sind

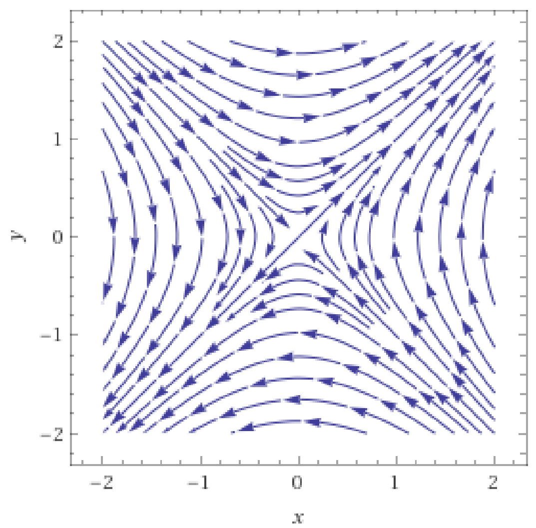
$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } z = 1 \tag{1032}$$

$$v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } z = -1, \tag{1033}$$

denn es ist $v_+ \neq 0$, $v_- \neq 0$ und $Av_+ = 1 \cdot v_+$ sowie $Av_- = (-1) \cdot v_-$, wie man unmittelbar sieht. Damit sind die Trajektorien des Systems gerade die Graphen von

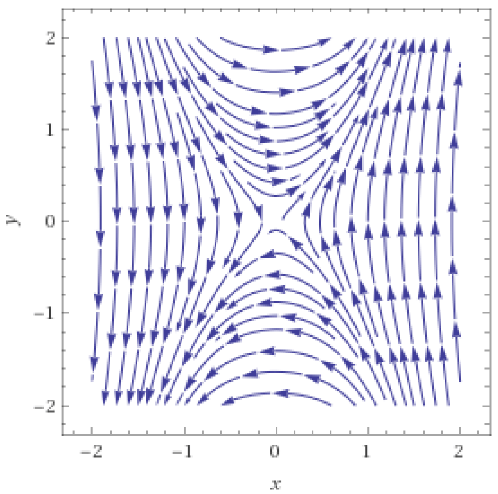
$$\begin{pmatrix} \nu_x(t) \\ \nu_y(t) \end{pmatrix} = c_+ \exp(t) v_+ + c_- \exp(-t) v_-, \tag{1034}$$

wo $c_\pm \in \mathbb{R}$ die jeweilige Lösung des linearisierten Systems festlegen. Das Phasenportrait hat also die Form eines Sattels, s. die nachfolgende Abbildung für eine Skizze des Phasenportraits.



(c) Da $\lim_{\to\infty} \exp(t) = \infty$, kann der erste Summand nicht in den Trajektorien zum Tragen kommen, die für $t \to \infty$ nach $(0, 0)$ streben. Also gilt für die in der Aufgabe betrachteten Trajektorien stets $c_+ = 0$ in der in (b) angegebenen Lösungsformel. Da $v_- = (1, -1)^T$ gilt $\nu_x(t) + \nu_y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h., die Behauptung. Umgekehrt liefert $\nu_x(t) = -\nu_y(t)$ das Gleichungssystem $c_+ \exp(t) + c_- \exp(-t) =$

$-c_+ \exp(t) + c_- \exp(-t)$, sodass $c_+ \exp(t) = 0$, also $c_+ = 0$ wegen $\exp(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist tatsächlich jede Trajektorie aus (b) mit $\lim_{t\to\infty}(\nu_x(t), \nu_y(t)) = (0,0)$ von der Form $(\nu_x(t), \nu_y(t))^T = c_- \exp(-t) v_-$ für ein $c_- \in \mathbb{R}$, erfüllt demnach $\nu_x(t) = -\nu_y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
(d) Gefragt ist wiederum nach dem Phasenportait, d.h., der Gesamtheit der Trajektorien. Praktisch wird man hier einfach das aus Teil (b) nehmen, und, da $f_y(x,y) > x$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dieses einfach ein wenig in y-Richtung strecken. Dargestellt ist das alles in der untenstehenden Abbildung.



Ende dieser Aufgabe. $\square$

Aufgabe 78 (F09T2A1) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = -y + x\sin(x^2 + y^2) \ \&\ \dot{y} = x + y\sin(x^2 + y^2). \tag{1035}$$

(a) Wir suchen alle periodischen Orbits. Offenbar ist die Nulllösung, $(x_0, y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (0,0)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Da die rechte Seite stetig differenzierbar ist und $\mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist, folgt aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass jede, ohne Einschränkung maximale, Lösung $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$, die an einem $\tau \in I$ von $(0,0)$ verschieden ist, dies auch für alle $t \in I$ ist. Insbesondere ist dann $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \neq 0$ für solche Lösungen. Da (x_0, y_0) konstant ist, ist $(x_0, y_0)(\mathbb{R})$ periodischer Orbit mit Periode 0. Sei also im folgenden $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine maximale Lösung des Differentialgleichungssystem. Wir bemerken, dass $r = \sqrt{x^2+y^2} (> 0)$ die Differentialgleichung

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\sin(r^2) \tag{1036}$$

erfüllt. Für $r_k \in \{\sqrt{\pi k} | k \in \mathbb{N}\}$ ist jeweils eine Ruhelage der Differentialgleichung für r gegeben, für einen Startwert $r(0) \in]r_k, r_{k+1}[$ bleibt die Lösung $r(t)$ auch stets $> r_k$ und $< r_{k+1}$, wie eine erneute Anwendung des globalen Existenz und Eindeutigkeitssatzes zeigt. Zudem ist $\operatorname{sign}(r(t)\sin(r(t)^2)) = \text{const.}$, d.h., r ist auf dem gesamten Existenzintervall streng monotone Funktion von t. Da r in jedem Fall beschränkt ist, ist r auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, wie man leicht anhand des Satzes über die Charakterisierung maximaler Lösungen anhand des Randverhaltens sieht. Infolge der strengen Monotonie der soeben betrachteten, nicht-konstanten Lösungen r, können wir diese für die Angabe der periodischen Orbits außer Acht lassen. Nun gilt in Polarkoordinaten für die ursprüngliche Lösung $(x, y) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$, dass

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\phi) - r\dot{\phi}\sin(\phi) \ \& \ \dot{y} = \dot{r}\sin(\phi) + r\dot{\phi}\cos(\phi) \tag{1037}$$

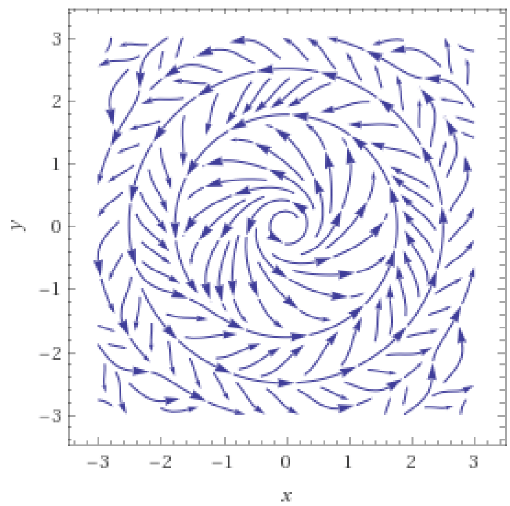
und andererseits, indem wir die Polarkoordinatentransformation auf die rechte Seite der ursprünglichen Differentialgleichungen anwenden, haben wir, dass

$$\dot{x} = -r\sin(\phi) + r\cos(\phi)\sin(r^2) \ \& \ \dot{y} = r\cos(\phi) + r\sin(\phi)\sin(r^2). \tag{1038}$$

Wir verwenden nun $\dot{r} = r\sin(r^2)$ in den ersten beiden Gleichungen und erhalten

$$r\cos(\phi)\sin(r^2) - r\dot{\phi}\sin(\phi) = \dot{x} = -r\sin(\phi) + r\cos(\phi)\sin(r^2) \tag{1039}$$
$$r\sin(\phi)\sin(r^2) + r\dot{\phi}\cos(\phi) = \dot{y} = r\cos(\phi) + r\sin(\phi)\sin(r^2), \tag{1040}$$

sodass wir letztlich $\dot{\phi} = 1$ bekommen. Also ist $\phi(t) = t + \phi_0$ für ein $\phi_0 \in \mathbb{R}$. Insgesamt sind somit nur diejenigen Orbits mit $(x, y) = (r_k\cos(t+\phi_0), r_k\sin(t+\phi_0))$ für $k \in \mathbb{N}$ von der Nulllösung verschiedene, periodische Orbits.
(b) Das Phasenportrait sieht im Wesentlichen so aus, dass es im Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis (und die Nulllösung) gibt, und die anderen Trajektorien dazwischen von r_k nach r_{k+1} für $k \in 2\mathbb{N}_0$ und von r_{k+2} nach r_{k+1} laufen, falls $k \in 2\mathbb{N}_0$. Das findet sich unten geplottet.



Ende dieser Aufgabe. $\square$

Aufgabe 79 (H04T2A4) Zunächst gilt $d_t\|\lambda(t)\|_2^2 = 2\langle\lambda(t), d_t\lambda(t)\rangle = -2\|\lambda(t)\|_2^2 + 2\langle\lambda(t), w(\lambda(t))\rangle \le -2\|\lambda(t)\|_2^2 + 2\|\lambda(t)\|_2\|w(\lambda(t))\|_2 \le -2\|\lambda(t)\|_2^2 - \|\lambda(t)\|_2^2 = -\|\lambda(t)\|^2$, wobei die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für das erste $\le$ verwendet wurde und die Voraussetzung, dass $\|w(x)\|_2 \le 0.5\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ für das zweite $\le$. Bezeichne mit $\rho(t) := \|\lambda(t)\|_2^2$, dann haben wir insgesamt die Differential-Ungleichung

$\dot{\rho}(t) \leq -\rho(t)$ gefunden, mit der zusätzlichen Einschränkung, dass $\rho(t) \geq 0$ unmittelbar aus der Definition. Damit ist $0 \leq \rho(t) \leq \rho(0)\exp(-t)$, denn $r(t) := \rho(0)\exp(-t)$ erfüllt gerade $\dot{r} = -r$ und es gilt $r(0) = \rho(0)$, sodass $d_t(\rho(t) - r(t)) \leq 0$, sodass $r(t) - \rho(t) \geq 0$. Nun gilt zusammen wegen $\|\lambda(0)\|_2 < \epsilon$, dass $\|\lambda(0)\|_2^2 < \epsilon^2$, also $0 \leq \|\lambda(t)\|_2^2 < \epsilon^2 \exp(-t)$, sodass Radizieren für die Nicht-Negative Wurzel liefert $\|\lambda(t)\|_2 < \epsilon \exp(-t/2)$. Da $\exp(-t/2)$ eine durch 1 nach oben beschränkte, positive und streng monoton fallende Funktion auf $\mathbb{R}^+$ definiert, gilt nun auch $\|\lambda(t)\|_2 < \epsilon$, wie behauptet. Zusätzliche sehen wir, dass $0 \leq \lim_{t\to\infty} \|\lambda(t)\|_2 \leq \epsilon \lim_{t\to\infty} \exp(-t/2) = 0$, also $\lim_{t\to\infty} \|\lambda(t)\|_2 = 0$. Infolge der Stetigkeit der Normfunktion und der Tatsache, dass $\|a\|_2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ für $a \in \mathbb{R}^n$ bereits nach Definition gilt, erhalten wir $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$, wie ebenfalls behauptet. $\square$

Aufgabe 80 (H19T3A2) Gegeben ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x(1-y), xy)$.
(a) Wir zeigen, dass f ein Diffeomorphismus zwischen $(0,\infty) \times (0,1) =: S$ und $Q = (0,\infty)^2$ ist. Wir zeigen zunächst, dass $f(S) = Q$. Sei dazu $(x, y) \in S$. Dann gilt $f(x, y) = (x(1-y), xy)$. Da $0 < y < 1$ und $x > 0$, ist $0 < xy < x < \infty$ und $0 < (1-y)x < x < \infty$. Somit ist $f(x, y) \in Q$. Wir zeigen nun, dass f bijektiv ist. Für die Injektivität seien $(u, v), (x, y) \in S$, sodass $f(x, y) = f(u, v)$. Dann gilt $u(1-v) = x(1-y)$ und $uv = xy$. Addition der letztgenannten zur erstgenannten Gleichung liefert $u = x$. Wegen $u, x > 0$ liefert Division der zweiten Gleichung durch x dann $v = y$, insgesamt also $(x, y) = (u, v)$. Sei nun $(u, v) \in Q$ beliebig. Wir zeigen, dass es ein $(x, y) \in S$ mit $f(x, y) = (u, v)$ gibt. Es ist $(x(1-y), xy) = (u, v)$, sodass $x = x(1-y) + xy = u + v$ und, da $x > 0$, $y = v/(u+v)$. Damit haben wir gezeigt, dass für $(u, v) \in Q$ die Wahl $(x, y) = (u+v, v/(u+v)) \in S$ die Gleichung $f(x, y) = (u, v)$ erfüllt wird. Somit ist $f|_S$ eine Bijketion zwischen S und Q, also existiert $(f|_S)^{-1} : Q \to S$. Da f als Komponenten bivariate Polynomfunktionen in den Variablen x, y hat, ist f komponentenweise stetig partiell differenzierbar, also (stetig) differenzierbar. Da Q offen ist und mit f auch $f|_Q$ (stetig) differenzierbar ist, liefert der Satz von der lokalen Umkehrfunktion, dass $f|_Q^{-1}$ ebenfalls (stetig) differenzierbar ist. Somit ist $f|_S : S \to Q$ in der Tat ein Diffeomorphismus.
(b) Wir behaupten, dass f, aufgefasst als Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$, keine biholomorphe Abbildung $S := \{z \in \mathbb{C} : \Re[z] > 0, 0 < \Im[z] < 1\}$ nach $Q := \{z \in \mathbb{C} : \Re[z] > 0, \Im[z] > 0\}$ definiert. Denn in der Interpretation als komplexe Funktion ist $U(x, y) = \Re[f](x, y) = x(1-y)$ und $V(x, y) = \Im[f](x, y) = xy$ und es müssten die Cauchy-Riemannschen partiellen Differentialgleichungen gelten. Es ist aber $\partial_x U(x, y) = 1-y$ und $\partial_y V(x, y) = x$, sodass $\partial_x U(1, 0.5) = 0.5 \neq 1 = \partial_y V(1, 0.5)$. Damit ist bereits eine der Cauchy-Riemannschen partiellen Differentialgleichungen nicht erfüllt. Somit ist f, als Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$, an einem Punkt aus S bereits nichts holomorph, kann also erst recht nicht biholomorphe Abbildung $S \to Q$ sein. $\square$

Aufgabe 81 (F02T2A1) Gegeben sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-y}(x\cos(x) - y\sin(x))$ und $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-y}(y\cos(x) + x\sin(x))$.
(a) Wir zeigen, dass diese Funktionen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Offenbar sind u, v als Verknüpfung stetig differenzierbarer Funk-

tionen selbst stetig differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) &= e^{-y}((1-y)\cos(x) - x\sin(x)) \\
\partial_y u(x,y) &= -e^{-y}(y\cos(x) + x\sin(x)) + e^{-y}(\cos(x)) \\
&= e^{-y}((1-y)\cos(x) - x\sin(x)) \\
\partial_y u(x,y) &= -e^{-y}(x\cos(x) - y\sin(x)) - e^{-y}\sin(x) \\
\partial_x v(x,y) &= e^{-y}(-y\sin(x) + \sin(x) + x\cos(x)) \\
&= e^{-y}(x\cos(x) - y\sin(x)) + e^{-y}\sin(x).
\end{aligned} \tag{1041}$$

Damit stellen wir fest, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y)$ und $\partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)$. Somit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung erfüllt. Laut Vorlesung ist damit durch $f = u + iv$ auf dem $\mathbb{R}^2$, aufgefasst als $\mathbb{C}$, eine holomorphe Funktion erklärt.
(b) Wir setzen nun $z = 0 + iy$ für $y \in \mathbb{R}$ und haben $f(z) = u(0,y) + iv(0,y) = 0 + ie^{-y}y = ze^{iz}$. Da $U := \{0\} \oplus i\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ eine nicht-diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, denn $(i/n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ und $0 \in U$, liefert der Identitätssatz, angewendet auf das Gebiet $\mathbb{C}$, die nichts-diskrete Teilmenge U und f sowie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto ze^{iz}$, dass $f(z) = ze^{iz}$ auf ganz $\mathbb{C}$. $\square$

Aufgabe 82 (F01T3A1) Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = f(z^2)$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wir zeigen, dass f konstant ist. Wir zeigen, dass für $z \in \mathbb{E}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(z) = f(z^{2^n})$. Für $n = 1$ ist die Aussage nach Voraussetzung offenbar wahr. Wir nehmen nun an, dass $f(z) = f(z^{2^n})$ und zeigen, dass dann $f(z) = f(z^{2^{n+1}})$. Denn $f(z^{2^n}) = f((z^{2^n})^2) = f(z^{2^{n+1}})$ wegen $z^{2^n} \in \mathbb{E}$, weil $0 \leq |z^{2^n}| \leq |z|$. Für $z \neq 0$ ist $(z^{2^n})_n$ eine Nullfolge und für $z = 0$ ist $(z^{2^n})_n$ die konstante Nullfolge. Wir setzen nun $f(0) = w \in \mathbb{C}$, wählen $z \in \mathbb{E}$ beliebig und betrachten $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $w_n = f(z^{2^n})$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es ist mit dem vorher Bewiesenen $(w_n)_n$ eine konstante Folge in $\mathbb{C}$. Da f als holomorphe Funktion stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} f(z^{2^n}) = f(\lim_{n\to\infty} z^{2^n}) = f(0) = w$. Da $(w_n)_{n\geq 0}$ eine konstante Folge ist, ist $w = w_0 = f(z)$. Beliebigkeit von $z \in \mathbb{E}$ impliziert, dass $f(z) = w = f(0)$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Somit ist f konstant. $\square$

Aufgabe 83 (F17T2A4) Sei $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.
(a) Definiere die Funktion $h : D \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/(1-z)$. Dann ist h auf D holomorph und es gilt $h'(z) = 1/(1-z)^2 = h(z)^2$ für $z \in D$. Wir betrachten die Einschränkung von f auf $U := D \cap \mathbb{R} = (-1,1)$. Dann gilt $f'(x) = f(x)^2$ für alle $x \in U$. Da die rechte Seite der Differentialgleichung stetig partiell differenzierbar nach $y = f(x)$ für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ (!) ist und ferner stetig in x ist, ist die rechte Seite der Differentialgleichung lokal Lipschitzstetig in $y = f(x)$. Zudem gilt $(x = 0, 1 = f(y = 0)) \in U \times \mathbb{R}$. Mit dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz erhalten wir also eine eindeutig bestimmte maximal definierte Lösung f des soeben definierten Anfangswertproblems. Da $h|_U = 1/(1-x)$ nach den eingangs gemachten Rechnungen die Differentialgleichung auch auf U löst, haben wir $h|_U = f|_U$. Da $U \subseteq D$ beispielsweise den Häufungspunkt $0 \in U$ hat, ist U nicht-diskret in D. Als offene Einheitskreisscheibe ist D ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Der Identitätssatz liefert uns nun, dass $f = h$ bereits auf ganz D. Somit ist durch $f(z) = 1/(1-z)^2$ die einzige

holomorphe Funktion $D \to \mathbb{C}$ mit den gewünschten Eigenschaften erklärt.
(b) Wir suchen nun alle holomorphen Funktionen $g = u + iv$ mit u, v reellwertig und $u(0) = 0 = v(0)$. Es gelte zudem für $z \in D$, dass $\sin(u(z)) + iv(z)\cos(v(z)) = 0$. Umformen der letzten Gleichung liefert zunächst $\sin(u(z)) = -iv(z)\cos(v(z))$. Bildung von Real- und Imaginärteil liefert wegen der Reellwertigkeit von $\sin(u(z))$ und $v(z)\cos(v(z))$, dass $\sin(u(z)) = 0$ und $v(z)\cos(v(z)) = 0$ für alle $z \in D$. Da u und v wegen Holomorphie von g insbesondere differenzierbar, also stetig sind, ist dann bereits $u(z) = u(0) = 0$ und $v(z) = v(0) = 0$ für alle $z \in D$, denn der Sinus wird nur auf $\pi\mathbb{Z} \oplus \{i0\}$ 0 und die Funktion $X\cos(X)$ nimmt den Wert 0 nur bei $X \in \{0\} \cup (\pi/2 + \pi\mathbb{Z}) \oplus \{i0\}$ an. Somit ist $g = 0$ die einzige holomorphe Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. □

Aufgabe 84 (F14T2A3) Gegeben sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{2it}$ und $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto i + e^{-it}$.
(a) Wir definieren zunächst die – holomorphe! – Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(iz^2) - 1$. Es gilt mit der Cauchyschen Integralformel auf $\mathbb{C}$ und der Windungszahl $n(\gamma, 0) = 2$, dass

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \frac{\exp(iz^2) - 1}{z^2} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right)_{w=0} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1! \cdot f'(0)}{n(\gamma, 0)} \right) \\ &= 2\pi i \left(iz \exp(iz^2) \right)_{z=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Die komplexe Exponentialfunktion ist eine ganze Funktion. Wiederum sehen wir mit der Cauchyschen Integralformel sowie $n(\eta, i) = -1$, dass

$$J = \int_\eta \frac{\exp(z)}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i(3-1)!}{n(\eta, i)} f''(i) = -4\pi i e^i.$$

(c) Die Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(1/z)$ hat eine auf ganz $\mathbb{C}^\times$ gleichmäßig konvergente Laurententwicklung mit nicht-abbrechenden Hauptteil,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}. \tag{1042}$$

Damit ist $z = 0$ eine wesentliche Singularität von f. Zudem ist f auf $\mathbb{C}^\times$ holomorph, sodass der Residuensatz liefert

$$K := \int_\gamma f(z) dz = 2\pi i n(\gamma, 0) \mathrm{Res}(f, z = 0). \tag{1043}$$

Mit $n(\gamma, 0) = 2$ und $\mathrm{Res}(f, z = 0) = a_{-1} = 1$, wo a_{-1} den Koeffizienten der höchsten Potenz von z im Hauptteil der Laurententwicklung von f bezeichnet, finden wir also $K = 4\pi i$. □

Aufgabe 85 (F14T1A5) Zu berechnen ist das Integral ($\lambda > 0$)

$$I(\lambda) := \int_0^\infty \exp(-x^2)\cos(\lambda x)dx. \tag{1044}$$

Dieses ist zusammen mit dem angegebenen Integral wegen des Lebesgue'schen Integrierbarkeitskriterium (majorisierte Konvergenz) existent. Wir definieren den Rechtecksweg $\gamma_R := \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$, wo

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t, \\
\gamma_2 &: [0, \lambda/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto R + it, \\
\gamma_3 &: [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto (-t) + i\lambda/2, \\
\gamma_4 &: [0, \lambda/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto -R + i(\lambda/2 - t).
\end{aligned}$$

Dieser durchläuft das Rechteck, das in der Angabe beschrieben wurde im mathematisch positiven Sinne. Zudem beachten wir, dass

$$I(\lambda) = 0.5\Re\left[\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2 + i\lambda x)dx\right]. \tag{1045}$$

Für dieses Integral finden wir mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz wegen der Existenz des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil des Integrals $I(\lambda)$ existieren. Für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(-z^2+iz)$ gilt nun, dass sie holomorph ist, d.h., mit dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f(z)dz. \tag{1046}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_{-R}^R \exp(-t^2 + i\lambda t)dt \\
\int_{\gamma_3} f(z)dz &= \int_{-R}^R \exp(-((-t) + i\lambda/2)^2 + i\lambda((-t) + i\lambda/2))dt \\
&= -\int_{-R}^R \exp(-(-t)^2 - \lambda^2/4)dt \\
&= -\exp(-\lambda^2/4)\int_{-R}^R \exp(-t^2)dt \\
\int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_0^{\lambda/2} \exp(-(R+it)^2 + i\lambda(R+it))dt \\
\int_{\gamma_4} f(z)dz &= -\int_0^{\lambda/2} \exp(-(-R+i(\lambda/2-t))^2 + i\lambda(-R+i(\lambda/2-t)))dt
\end{aligned}$$

Im Limes $R \to \infty$ verschwinden die beiden Integrale über γ_2 und γ_4 wie $\sim \exp(-R^2)$, da der Integrationsbereich beschränkt ist. Somit liefert uns der Ansatz über den Integralsatz von Cauchy, dass im Limes $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2 + i\lambda x) = \exp(-\lambda^2/4)\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)dx = \exp(-\lambda^2/4)\sqrt{\pi}. \tag{1047}$$

Einsetzen in den zuletzt angegebenen Ausdruck für $I(\lambda)$ liefert dann

$$I(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\exp(\lambda^2/4)}. \tag{1048}$$

□

Aufgabe 86 (H06T3A3) Gegeben ist die Funktion $f(z) = (z-1)^{-1}(z-2)^{-1}$ und $A_1 := \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-1| < 1\}$ sowie $A_2 := \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-2| < 1\}$.
(a) Wir suchen die Laurent-Entwicklung von f in den angegebenen Kreisring-Gebieten.

- *Auf A_1:* Indem wir den Faktor $1/(z-2) = -1/(1-(z-1))$ für $0 < |z-1| < 1$ mittels geometrischer Reihe entwickeln,

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k. \tag{1049}$$

  Wir sehen somit, dass $z = 1$ eine einfache Polstelle von f ist.

- *Auf A_2:* Indem wir den Faktor $1/(z-1) = 1/(1+(z-2))$ für $0 < |z-2| < 1$ mittels geometrischer Reihe entwickeln,

$$f(z) = \frac{1}{z-2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^k. \tag{1050}$$

  Wir sehen somit, dass $z = 2$ eine einfache Polstelle von f ist.

(b) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto 3\exp(2\pi i t)$. Bis auf die beiden einfachen Polstellen bei 1 und 2 ist f holomorph in dem von γ berandeten Gebiet $B_3(0)$, insgesamt also in $B_3(0)$ meromorph. Wir berechnen mittels Residuensatz

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(n(\gamma,1)\mathrm{Res}(f,1) + n(\gamma,2)\mathrm{Res}(f,2) \right) = 2\pi i\,(-1+1) = 0, \tag{1051}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Residuen jeweils die Koeffizienten der Summanden $\sim (z-1)^{-1}$ bzw. $\sim (z-2)^{-1}$ in der Potenzreihenentwicklung von f sind. Die Windungszahl $n(\gamma, z=1) = 1 = n(\gamma, z=2)$ da $\{1,2\} \subseteq B_3(0)$ und γ den Rand des Gebiets $B_3(0)$ einfach und im positiven Sinne durchläuft. □

Aufgabe 87 (H19T2A3) Gegeben sei das Gebiet $\Omega = \{z = x + iy | x \in \mathbb{R}, -\pi < y < 2\pi\}$. Wir betrachten die meromorphe Funktion $f(z) = 1/(z\sinh(z))$.
(a) Wir bestimmen alle Singularitäten von f und deren Typ in Ω. Der Sinus Hyperbolicus hat Nullstellen der Ordnung 1 genau bei $z \in i\pi\mathbb{Z}$ und sonst keine weiteren Nullstellen. Damit sehen wir, dass $\{0, i\pi\} \subseteq \Omega$ die Polstellenmenge von f ist. Da die Nennerfunktion einen zusätzlichen Faktor z zum Sinus Hyperbolicus enthält, ist die Ordnung der Polstelle bei $z = 0$ gleich 2 und die Ordnung der Polstelle bei $z = i\pi$ ist gleich 1.

(b) Wir bestimmen nun die Residuen von f. Bei $z = i\pi$ hat f eine einfache Polstelle, sodass

$$\mathrm{Res}(f, i\pi) = \lim_{z \to i\pi}((z - i\pi)f(z)) = \frac{-1}{i\pi}, \tag{1052}$$

denn mittels L'Hopital sieht man leicht, dass $\lim_{z\to i\pi}((z-i\pi)/(\sinh(z))) = \lim_{z\to i\pi} 1/\cosh(z) = -1$. Zudem ist

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0}(z^2 f(z)/1!)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sinh(z)}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{\sinh(z) - z\cosh(z)}{\cosh(z)^2} = 0. \tag{1053}$$

(c) Die Funktion f hat in Ω keine Stammfunktion. Angenommen, f hätte eine holomorphe Stammfunktion in Ω, dann würde daraus

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \tag{1054}$$

für den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega, t \mapsto i\pi + \exp(it)$ folgen. Andererseits hat $f|_{B_2(i\pi)\cap\Omega}$ nur die (einfache) Polstelle $z = i\pi$, die in dem von γ einfach und im positiven Sinne umschlossenen Gebiet $B_1(i\pi)$ liegt. Der Residuensatz liefert uns nun, dass

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i n(\gamma, i\pi)\mathrm{Res}(f, i\pi) = -2 \neq 0. \tag{1055}$$

Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme, f hätte eine holomorphe Stammfunktion auf Ω.

(d) Wir sollen nun $c \in \mathbb{C}$ dergestalt bestimmen, dass $h(z) := f(z) - c/(z - i\pi)$ eine holomorphe Stammfunktion auf Ω hat. Laut Vorlesung hat h genau dann in Ω eine holomorphe Stammfunktion wenn für jeden in Ω verlaufenden, geschlossenen Weg γ das Kurvenintegral $\int_\gamma h(z)dz$ verschwindet. Indem wir $c = \mathrm{Res}(f, i\pi) = -1/i\pi$ setzen erreichen wir, dass $\mathrm{Res}(h, z = i\pi) = 0$. Da das Residuum von f bei $z = 0$ nach Teil (b) verschwindet und $z \mapsto -c/(z - i\pi)$ bei $z = 0$ holomorph ist, also dessen Residuum bei $z = 0$ ebenfalls verschwindet, finden wir mittels Residuensatz für jeden in Ω verlaufenden, geschlossenen Weg, dass

$$\int_\gamma h(z) = 0, \tag{1056}$$

für $c = -1/\pi i$. Dieses ist auch das einzige c, denn andernfalls hätte mit einem zweiten $c' \neq c$ auch $h(z) - f(z) - c'/(z - i\pi)$ in Ω eine Stammfunktion. Das bedeutete aber, dass $z \mapsto (c - c')/(z - i\pi)$ in Ω eine Stammfunktion hätte. Analog zu (c) führt man die Annahme, dass die zuletzt genannte Funktion auf Ω eine Stammfunktion hat, mit $\mathrm{Res}(z \mapsto (c - c')/(z - i\pi), i\pi) = c - c' \neq 0$ auf einen Widerspruch. □

Aufgabe 88 (H19T2A5) (a) Der Riemannsche Abbildungssatz lautet: Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ ist konform äquivalent zur offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{C}$. Dabei dürfen wir einen Punkt vorgeben aus Ω, der auf $0 \in \mathbb{E}$

abgebildet wird.
(b) Das Lemma von Schwarz besagt, dass für jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ der offenen Einheitskreisscheibe in sich selbst mit $f(0) = 0$ gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und $|f'(0)| \leq 1$. Falls es ein $z_0 \neq 0$ in $\mathbb{E}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ gibt und $|f'(0)| = 1$ gilt, so ist f eine Drehung, d.h., es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $f(z) = \exp(i\lambda)z$.
(c) Sei nun $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f, g : \Omega \to \Omega$ konform und so, dass ein $z_0 \in \Omega$ existiert, für das $f(z_0) = g(z_0)$ und $f'(z_0) = g'(z_0)$ gilt. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es konforme Abbildungen $\phi, \psi : \Omega \to \mathbb{C}$, sodass $\phi(z_0) = 0$ und $\psi(f(z_0)) = 0$. Wir definieren nun $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ und $G = \psi \circ g \circ \phi^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Als Komposition biholomorpher Funktionen sind F, G selbst wiederum biholomorph und es gilt $F(0) = 0 = G(0)$. Wir definieren nun $H = F \circ G^{-1}$. Es ist $H(0) = 0$ und zudem $H'(0) = \frac{F'(0)}{G'(0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = 1$, da $f'(z_0) = g'(z_0)$ laut Voraussetzung $g'(z_0)$ ungleich 0 ist, weil g konform ist. Das Lemma von Schwarz sagt nun aus, dass H eine Drehung ist, also $H(z) = \exp(i\lambda)z$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit finden wir $H'(z) = \exp(i\lambda)$, also konstant, wegen $H'(0) = 1$ gilt sogar $H'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Damit haben wir nun $H(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Nach Definition von H bedeutet das $F(z) = G(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und nach Definition von F, G über die jeweils konformen Abbildungen f, g und die konformen Hilfsabbildungen ϕ, ψ aus dem Riemannschen Abbildungssatz erhalten wir mithin $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \Omega$. Damit haben wir $f = g$ auf Ω gezeigt. □

Aufgabe 89 (F11T1A5) Gegeben ist die Funktion $g : D \to \mathbb{C}, z \mapsto z/\sin(z^2 - 4z)$ mit dem maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{C}$.
(a) Die Funktion g hat Polstellen genau an denjenigen Punkten $z \in \mathbb{C}$, an denen $0 = \sin(z^2 - 4z)$ gilt. Der Sinus hat die (einfachen) Nullstellen bei $w_k = k\pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$, denn $0 \neq (-1)^k = \cos(k\pi) = (\sin'(k\pi))$. Somit finden wir $z^2 - 4z - k\pi = 0$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, finden wir durch Lösung der quadratischen Gleichung,

$$z_k = \frac{4 + \sqrt{16 + 4k\pi}}{2} = 2 + \sqrt{4 + k\pi}\,,\ z_k' = 2 - \sqrt{4 - k\pi}. \tag{1057}$$

Für $k, k \in \mathbb{Z}$ verschieden gilt auch $z_k \neq z_{k'}$ bzw. $z_k \neq z_{k'}'$, denn aus $z_k = z_{k'}$ bzw. $z_k = z_{k'}'$ erhalten wir in jedem Fall $k = k'$ durch eine elementare Rechnung. Damit sehen wir, dass z_k und z_k' für jedes k jeweils eine einfache Nullstelle des Nenners ist. Zudem ist $z_0' = 0$ und da der Zähler von g ebenfalls die einfache Nullstelle $z = 0$ hat, ist die Singularität bei $z = 0$ hebbar. Ansonsten sind alle Polstellen einfach und sind gerade z_k für $k \in \mathbb{Z}$ bzw. z_k' für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
(b) Da g bei $z = 0$ eine hebbare Singularität hat, ist g in einer Umgebung von $z = 0$ als dort gleichmäßig konvergente Potenzreihe darstellbar. Bezeichne die Menge der Polstellen erster Ordnung aus Teil (a) mit M. Der gesuchte Konvergenzradius ist dann laut Vorlesung gegeben durch $\rho = \operatorname{dist}(0, M) = \min\{\min_{k\in\mathbb{Z}}\{|z_k - 0|\}, \min_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\{|z_k' - 0|\}\} = 2 - \sqrt{4 - \pi}$. □

Aufgabe 90 (F08T2A4) (a) Wir sollen das Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos(3\theta)}{2 + \cos(\theta)} d\theta \tag{1058}$$

berechnen. Zunächst beachten wir, dass $\cos(\theta) = 1/2(\exp(i\theta)+\exp(-i\theta))$ und finden

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{4+\exp(-3i\theta)+\exp(3i\theta)}{4+\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{4\exp(3i\theta)+1+\exp(6i\theta)}{4\exp(4i\theta)+\exp(3i\theta)+\exp(5i\theta)} e^{i\theta} d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{4z^3+1+z^6}{z^3(z^2+4z+1)} dz \right). \end{aligned} \tag{1059}$$

Da $z^2+4z+1=0$ impliziert $z=-2\pm 2\sqrt{3}$, was nicht in $\bar{B}_1(0)$ liegt für jedes der beiden Vorzeichen, ist die Funktion $f : U \to \mathbb{C}, z \mapsto (z^6+4z^3+1)/(z^2+4z+1)$ holomorph in einer hinreichend kleinen, offenen Umgebung U von $\bar{B}_1(0)$. Die Integralformel von Cauchy liefert uns nunmehr, dass

$$I = \frac{f''(0)}{2!} = 15, . \tag{1060}$$

wobei die doppelte Ableitung mittels Mathematica evaluiert wurde.
(b) Wir sollen das Integral

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \tag{1061}$$

berechnen. Der Integrand ist eine rationale Funktion, dessen Zählerpolynom der Grad 0 und dessen Nennerpolynom den Grad 4 hat. Damit existiert das doppelt uneigentliche Riemann-Integral. Da der Integrand insbesondere symmetrisch ist, gilt ferner

$$J = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx. \tag{1062}$$

Das Nennerpolynom wird 0 an den Stellen $x_{k+1} = \exp(i\pi/4)\exp(2\pi i k/4)$, wo $k \in \{0,1,2,3\}$, Null. Die Funktion $z \mapsto 1/(1+z^4)$ hat also die vier o.g. einfachen Polstellen, von denen nur x_1 im ersten Quadranten liegt. Sei R hinreichend groß. Wir definieren nun den Weg $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$ durch $\gamma_1 : [0,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ und $\gamma_2 : [0,\pi/2], t \mapsto R\exp(it)$ und $\gamma_3 : [0,R], t \mapsto i(R-t)$. Das Residuum bei x_1 berechnet sich zu

$$\operatorname{Res}(f,x_1) = \lim_{z\to x_1}((z-x_1)f(z)) = \frac{1}{d_z(1+z^4)|_{z=x_1}} = \frac{1}{4x_1^3}. \tag{1063}$$

Mittels Residuensatz finden wir

$$\frac{\pi i}{2x_1^3} = 2\pi i \cdot 1 \cdot \operatorname{Res}(f,x_1) = \int_\gamma f(z)dz. \tag{1064}$$

Im Limes $R \to \infty$ gilt

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+R^4\exp(4it)} \right| \le \frac{\pi/2}{R^4-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1065}$$

Zudem ist

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -i\int_0^R \frac{1}{1+(R-t)^4}dt = -i\int_0^R \frac{d\tau}{1+\tau^4} = -i\int_{\gamma_1} f(z)dz. \tag{1066}$$

Damit finden wir im Limes $R \to \infty$, da das Integral über den Viertelkreisbogen verschwindet, dass

$$(1-i)\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi i}{2x_1^3}, \tag{1067}$$

und mit $x_1 = \sqrt{2}^{-1}(1+i)$, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^4} = 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi i}{i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{1068}$$

Mittels Mathematica verifiziert man dieses Ergebnis. □

Aufgabe 91 (F11T1A5) Gegeben ist die Funktion $g : D \to \mathbb{C}, z \mapsto z/\sin(z^2 - 4z)$ mit dem maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{C}$.
(a) Die Funktion g hat Polstellen genau an denjenigen Punkten $z \in \mathbb{C}$, an denen $0 = \sin(z^2-4z)$ gilt. Der Sinus hat die (einfachen) Nullstellen bei $w_k = k\pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$, denn $0 \neq (-1)^k = \cos(k\pi) = (\sin'(k\pi))$. Somit finden wir $z^2 - 4z - k\pi = 0$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, finden wir durch Lösung der quadratischen Gleichung,

$$z_k = \frac{4+\sqrt{16+4k\pi}}{2} = 2+\sqrt{4+k\pi}\,,\ z_k' = 2-\sqrt{4-k\pi}. \tag{1069}$$

Für $k, k \in \mathbb{Z}$ verschieden gilt auch $z_k \neq z_{k'}$ bzw. $z_k \neq z_{k'}'$, denn aus $z_k = z_{k'}$ bzw. $z_k = z_{k'}'$ erhalten wir in jedem Fall $k = k'$ durch eine elementare Rechnung. Damit sehen wir, dass z_k und z_k' für jedes k jeweils eine einfache Nullstelle des Nenners ist. Zudem ist $z_0' = 0$ und da der Zähler von g ebenfalls die einfache Nullstelle $z = 0$ hat, ist die Singularität bei $z = 0$ hebbar. Ansonsten sind alle Polstellen einfach und sind gerade z_k für $k \in \mathbb{Z}$ bzw. z_k' für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
(b) Da g bei $z = 0$ eine hebbare Singularität hat, ist g in einer Umgebung von $z = 0$ als dort gleichmäßig konvergente Potenzreihe darstellbar. Bezeichne die Menge der Polstellen erster Ordnung aus Teil (a) mit M. Der gesuchte Konvergenzradius ist dann laut Vorlesung gegeben durch $\rho = \operatorname{dist}(0, M) = \min\{\min_{k\in\mathbb{Z}}\{|z_k - 0|\}, \min_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\{|z_k' - 0|\}\} = 2 - \sqrt{4-\pi}$. □

Aufgabe 92 (F18T3A1) (a) Gegeben sei das Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx. \tag{1070}$$

Der Integrand lässt sich in der Form

$$\frac{\cos(x)}{1+x^2} = \frac{\cos(x)p(x)}{q(x)} \tag{1071}$$

schreiben, wobei $q(x) \neq 0$ für alle $x \geq 0$ und $p, q \in \mathbb{R}[x]$ Polynome mit $\deg(p) < \deg(q)$ sind. Genauer setzen wir $p = 1$ und $q = 1 + x^2$. Laut Vorlesung existiert dann bereits das uneigentliche Integral I im (uneigentlichen) Riemannschen Sinne.
(b) Wir berechnen nun I. Mit den Bezeichnungen p, q wie in (a) stellen wir fest, dass

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x) + i\sin(x)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{1+x^2} dx. \tag{1072}$$

Wir betrachten nun $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}, \exp(iz)/(2(1+z^2))$. Dies ist offenbar eine holomorphe Funktion und $z_\pm = \pm i$ sind jeweils einfache Nullstellen des Nennerpolynoms und wegen $\exp(iz) \neq 0$ sogar auf $\mathbb{C}$, handelt es sich bei $z_\pm$ um einfache Polstellen der Integrandenfunktion. Wir definieren nun den (einfach geschlossenen und stückweise regulären) Weg $\Gamma := \gamma_1 * \gamma_2$, wo $\gamma_2 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ und $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto R\exp(it)$. Dieser umschließt die Polstelle z_+ einfach und im positiven Sinne für hinreichend großes $R > 0$, sodass $n(\Gamma, i) = 1$. Nun gilt laut Residuensatz

$$\int_\Gamma \frac{\exp(iz)}{2(1+z^2)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) n(\Gamma, i) = \frac{2\pi i}{4ie} = \frac{\pi}{2e}. \tag{1073}$$

Andererseits können wir Additivität des Integraloperators bzgl. Konkatenation von Kurven ausnutzen und erhalten

$$\frac{\pi}{2e} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{iR\exp(it)\exp(-R\sin(t) + iR\cos(t))}{1 + R^2\exp(2it)} dt + \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\exp(it)}{1+t^2} dt. \tag{1074}$$

Wir schätzen den ersten Summanden (mal 2) ab, wenn wir $R \to \infty$ lassen:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\pi \frac{iR\exp(it)\exp(-R\sin(t) + iR\cos(t))}{1 + R^2\exp(2it)} dt\right| \\
&\leq \int_0^\pi \left|\frac{iR\exp(it)\exp(-R\sin(t) + iR\cos(t))}{1 + R^2\exp(2it)}\right| dt \\
&\leq \int_0^\pi \left|\frac{R}{1+R^2}\right| dt \\
&= \frac{\pi R}{1+R^2} \\
&\xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\frac{\pi}{2e} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\exp(it)}{1+t^2} dt\right] = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx, \tag{1075}$$

wobei wir die Existenz des uneigentlichen Integrals rechts vom zweiten Gleichheitszeichen gemäß Teilaufgabe (a) verwendet haben. Wir erhalten mithin $I = \pi/(2e)$. □

Aufgabe 93 (F16T3A1) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin(1/z)$.
(a) Wir bestimmen den Typ der isolierten Singularität von f bei $z = 0$, indem wir f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in eine Laurentreihe entwickeln. Bekannt ist die Potenzreihe der komplexen Sinusfunktion, sodass wir unmittelbar

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}} \tag{1076}$$

erhalten (auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Aus der obigen Darstellung ist ersichtlich, dass der Hauptteil der Laurententwicklung von f nicht abbricht. Daher handelt es sich bei der isolierten Singularität $z = 0$ laut Vorlesung um eine wesentliche Singularität von f.
(b) Sei nun $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, t \mapsto \exp(2it)$. γ ist offenbar eine reguläre Kurve in der komplexen Ebene, für die $n(\gamma, 0) = 2$ gilt, wobei $n(\gamma, z)$ die Windungszahl von γ um z bezeichnet. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma f(z)dz \\ &= \int_\gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_\gamma \frac{dz}{z^{2k+1}} \\ &= 2 \cdot 2\pi i \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 2\pi i \cdot 0 \\ &= 4\pi i. \end{aligned} \tag{1077}$$

Hierbei haben wir im ersten Schritt die Laurententwicklung von f eingesetzt und sodann im zweiten Schritt verwendet, dass wir Summation und Integral vertauschen dürfen, da die Laurententwicklung von f auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathrm{Spur}(\gamma) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gleichmäßig konvergiert. Im dritten Schritt haben wir den Term, der zum Summationsindex $k = 0$ gehört, isoliert und ausgewertet, wobei wir beachtet haben, dass $n(\gamma, 0) = 2$. Die anderen Terme in der verbleibenden Summe ab $k = 1$ evaluieren jeweils zu 0. Im Ergebnis finden wir also $I = 4\pi i$.
(c) Sei nun $U = \{z \in \mathbb{C} | 1/2 < |z| < 2\}$. Zu zeigen ist, dass es keine Folge $(p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen gibt, sodass $(p_n|_U)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert. Der Weg γ aus Aufgabenteil (b) verläuft ganz in U. Angenommen, es gäbe eine Folge von Polynomen $(p_n)_n$ wie beschrieben. Mit

$$I_n := \int_\gamma p_n(z)dz \tag{1078}$$

folgt dann aus der gleichmäßigen Konvergenz der $(p_n|_U)_n$ gegen $f|_U$, dass auch $I_n \to I$ wenn $n \to \infty$. Andererseits sind die p_n auf $\mathbb{C}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ holomorph, also auch auf der offenen und zusammenhängenden Teilmenge U von $\mathbb{C}$. Zusammen mit dem Integralsatz von Cauchy folgt nun, dass $I_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Nullfolge und es gilt $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$ im Widerspruch dazu, dass $\lim_{n \to \infty} I_n = 4\pi i$. Die Annahme, dass $(p_n|_U)_n$ gleichmäßig auf U gegen $f|_U$ konvergiert, war also falsch. Eine Folge von Polynomen mit den beschriebenen Eigenschaften kann es also nicht geben. □

Aufgabe 94 (H19T2A5) (a) Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist Ω konform äquivalent zur offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} \subsetneq \mathbb{C}$.
(b) Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe in sich selbst, sodass $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und zusätzlich $|f'(0)| \leq 1$. Gilt für f zusätzlich, dass ein $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $|f(z_0)| = |z_0|$, so ist f eine Drehung, d.h., es gibt ein $\phi \in \mathbb{R}$, sodass $f(z) = \exp(i\phi)z$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Die letzte Folgerung gilt auch unter der alternativen Voraussetzung, dass $|f'(0)| = 1$.
(c) Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $z_0 \in \Omega$. Ferner seien $f, g : \Omega \to \Omega$ biholomorph mit $f(z_0) = g(z_0)$ und $f'(z_0) = g'(z_0)$. Wir zeigen, dass $f = g$. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert eine biholomorphe Abbildung $\Phi : \Omega \to \mathbb{E}$. Diese ist laut einem Zusatz zum Riemannschen Abbildungssatz eindeutig durch $f(z_0) = 0$ festgelegt, wo $z_0 \in \Omega$ der in der Aufgabenstellung ausgezeichnete Punkt aus Ω ist. Mit dem gleichen Argument existiert eine eindeutige biholomorphe Abbildung $\Psi : \Omega \to \mathbb{E}$ mit $\Psi(f(z_0) =: w_0) = 0$. Es gilt dann auch $\Psi(g(z_0)) = 0$, denn $f(z_0) = g(z_0)$ nach Voraussetzung an f, g. Wir definieren nun $F := \Psi^{-1} \circ f \circ \Phi$ und $G := \Psi^{-1} \circ g \circ \Phi$. Dann sind $F, G : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biholomorphe Abbildungen den offenen Einheitskreisscheibe in sich selbst und es gilt $F(0) = \Psi^{-1}(f(\Phi(0))) = \Psi^{-1}(f(z_0)) = \Psi^{-1}(w_0) = 0$ und analog $G(0) = 0$. Zudem ist laut Kettenregel auch $F'(0) = G'(0)$. Setze nun $H := G^{-1} \circ F$. Dann ist auch H eine biholomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{E}$ und es gilt $H(0) = 0$ sowie, nach Kettenregel $H'(0) = F'(0)/(G'(0)) = 1$, denn $F'(0), G'(0) \neq 0$ wegen der Biholomorphie von F, G und $F(0) = G(0)$ laut dem weiter oben Bewiesenen. Insbesondere ist $|H'(0)| = 1$. Nach dem zweiten Teil des Lemmas von Schwarz (s. Aufgabenteil (b)) gilt $H(z) = \exp(i\lambda)z$ für alle $z \in \mathbb{E}$ mit einer reellen Konstante λ. Aus $H'(z) = \exp(i\lambda)$ erhalten wir $H'(0) = \exp(i\lambda) = 1$, sodass $H(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Wegen $H = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ erhalten wir durch Einsetzen der Definition von H zunächst $F = G$ auf $\mathbb{E}$ und somit $f = \Psi \circ F \circ \Phi^{-1} = \Psi \circ G \circ \Phi^{-1} = g$ auf Ω, wobei die Biholomorphie von Φ, Ψ im letzten Schritt verwendet wurde. $\square$

Aufgabe 95 (H13T2A1) Gegeben ist $G = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1, |z - 0.5| > 0.5\}$ und $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$. Zudem sei $S = \{z \in \mathbb{C} | 0 < \Im[z] < \pi\}$. Gesucht ist eine biholomorphe Abbildung $G \to \mathbb{E}$.

- *Schritt 1.* Zunächst bilden wir G auf S ab. Da Möbiustransformationen gerade die auf $\hat{\mathbb{C}}$ biholomorphen Abbildungen sind, liegt es nahe, eine geeignete Möbiustransformation festzulegen. Die geschieht nach Vorlesung bereits auf eindeutige Weise, indem wir drei Punkte aus G und deren Bilder in S angeben. Da Möbiustransformationen treu bzgl. ihres Abbildungsverhaltens von verallgemeinerten Kreislinien sind, erfordert die Angabe eine Möbiustransformation, dass bspw. $1, 0, -1 \in \partial S$ auf $\infty, i\pi, 0 \in \partial S$ geschickt wird. Die funktionale Form der so spezifizierten Möbiustransformation folgt nun aus der Invarianz der Doppelpunktverhältnisses

$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{z-z_1}{z-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \tag{1079}$$

unter Möbiustransformationen, d.h., es gilt (in $\hat{\mathbb{C}}$)

$$\frac{z-1}{z-0}\frac{0+1}{1+1} = \mathrm{DV}(z,1,0,-1) = \mathrm{DV}(w,\infty,i\pi,0) = \frac{w-\infty}{w-i\pi}\frac{i\pi-0}{\infty-0}. \quad (1080)$$

Das vereinfacht sich zu

$$\frac{1-z}{2z} = \frac{i\pi}{w-i\pi} \Rightarrow i\pi\frac{2z}{1-z} = w-i\pi \Rightarrow w = i\pi\frac{1+z}{1-z}. \quad (1081)$$

Um zu zeigen, dass durch $\Phi(z) = i\pi\frac{1+z}{1-z}$ tatsächlich eine Möbiustransformation mit dem gewünschten Abbildungsverhalten erklärt ist, reicht es aus, zu zeigen, dass $\Phi(i/2) \in S$. In der Tat gilt $\Phi(i/2) = 4i\pi(1+i/2)^2/5 = 4i\pi(1-1/4)/5 + 4i\pi\cdot i/5 = -4\pi/5 + 12/20 i\pi$. Somit ist $0 < \Im[\Phi(i/2)] = 12/20\pi < \pi$, also $\Phi(i/2) \in S$. Wegen des Satzes über verallgemeinerte Kreistreue von Möbiustransformationen ist daher $\Phi(G) = S$.

- *Schritt 2.* Mittels der Exponentialfunktion erreichen wir, dass S auf die obere komplexe Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im[z] > 0\}$ abgebildet wird. Denn für alle $z \in S$ gilt $\exp(z) = \exp(\Re[z])(\cos(\Im[z]) + i\sin(\Im[z]))$ und wegen $\exp(\Re[z]) \in \mathbb{R}^+$ sowie $\sin(\Im[z]) \in]0,1[$ wegen $\Im[z] \in]0,\pi[$ folgt $\Im[\exp(z)] > 0$, also $\exp(S) \subseteq \mathbb{H}$. Umgekehrt ist ein $w \in \mathbb{H}$ in Polarkoordinaten durch $w = r\exp(i\phi)$ mit $r > 0$ und $\phi \in]0,\pi[$ gegeben, sodass wir mittels des auf $\mathbb{H}$ existenten Hautzweigs des Logarithmus $z := \log(r) + i\pi \in S$ erhalten. Damit ist $\exp(S) = \mathbb{H}$ und exp ist insbesondere auf $\mathbb{H}$ biholomorph.

- *Schritt 3.* Aus der Vorlesung ist die sogenannte Cayley-Transformation $\Psi : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ definiert durch

$$\Psi(z) = \frac{z-i}{z+i} \quad (1082)$$

als Möbiustransformation mit dem angegebenen Abbildungsverhalten bekannt.

- *Schritt 4.* Die gesuchte Abbildung $\chi : G \to \mathbb{E}$ ist nun gegeben durch $\chi(z) = (\Psi \circ \exp \circ \Phi)(z)$.

Damit ist die Aufgabe beendet. □

6.2 Aufgaben Ernstfalltests

Aufgabe 73 (H14T1A4) Gefragt ist nach denjenigen $x_0 \in \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem $x' = \sqrt[3]{x^2}$ mit $x(0) = x_0$ lokal bzw. global eindeutig lösbar ist. Wir definieren zunächst $D_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Menge D_1 ist offen in $\mathbb{R}^2$. Zudem ist die Funktion $f : D_1 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ auf D_1 stetig und in x überdies stetig partiell differenzierbar, solange $(t,x) \in D_1$. Daher genügt f einer lokalen Lipschitz-Stetigkeitsbedingung im zweiten Argument. Daher können wir bereits für beliebiges $(0,x_0) \in D_1$, d.h., für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mithilfe des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöff folgern, dass das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(0) = x_0$ eine lokal eindeutige Lösung besitzt. Wir sehen aber, dass D_1 kein Gebiet ist, denn D_1 ist nicht zusammenhängend: $D_1 = D_- \uplus D_+$ disjunkt, wobei $D_- \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ und $D_+ \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ jeweils offen und zusammenhängend (also Gebiete) sind. Wir können aber $F_\pm \equiv f|_{D_\pm}$ definieren und stellen fest, dass $F_\pm$ infolge der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von f im zweiten Argument auf dem respektiven $D_\pm$ lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument sind. Für $x_0 > 0$ betrachten wir also $x' = F_+(t,x)$ mit $x(0) = x_0$ auf D_+ und für $x_0 < 0$ betrachten wir $x' = F_-(t,x)$ auf D_- mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert uns nun, dass in beiden Fällen jeweils eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung des Anfangswertproblems existiert. Mit anderen Worten ausgedrückt hat die zu untersuchende Anfangswertaufgabe also für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung. Für $x_0 = 0$ hingegen ist das eingangs definierte f lediglich stetig für alle $t \in \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}^2$ besitzt daher das Anfangswertproblem $x' = \sqrt[3]{x^2}$ mit $x(0) = 0$ lediglich eine lokale Lösung, die nicht unbedingt eindeutig ist. Insbesondere stellen wir fest, dass für jedes abgeschlossene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ die Funktion $X_0 : I \to \mathbb{R}, t \mapsto 0$ das Anfangswertproblem löst. Um zu untersuchen, ob dies die einzige Lösung ist, versuchen wir durch Ankleben eine weitere Lösung zu finden und lösen das allgemeinere Anfangswertproblem $x' = \sqrt[3]{x^2}, x(\tau) = \xi$ mit $\xi > 0$. Separation der Variable liefert die Integralgleichung

$$\int_\xi^x \frac{d\chi}{\sqrt[3]{\chi^2}} = \int_0^t d\tau, \tag{1083}$$

die wir nach x lösen müssen. Das liefert uns $3\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{\xi} = t - \tau$, also $x = (\sqrt[3]{\xi} + (t - \tau))^3$. Durch Einsetzen verifiziert man leicht, dass sowohl die Differentialgleichung als auch die Anfangsbedingung befriedigt sind. Infolge der obenstehenden Ausführungen zur Lösbarkeit Wenn wir nun $\lim_{t \downarrow 0} x(t) = 0$ haben möchten, benötigen wir $\tau = \sqrt[3]{\xi}(> 0)$. Somit ist für $x_0 = 0$ eine weitere Lösung des zu untersuchenden Anfangswertproblems durch

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ x(t) & t > 0 \end{cases} \tag{1084}$$

gegeben. Damit haben wir bereits gezeigt, dass für $x_0 = 0$ keine lokal eindeutige Lösung des Anfangswertproblems, das im Rahmen der Aufgabe zu untersuchen ist, existiert. Damit kann auch keine global eindeutige Lösung des Anfangswertproblems aus der Angabe für den Fall $x_0 = 0$ existieren. □

Aufgabe 74 (F05T1A1) (a) Gesucht sind alle Lösungen der Differentialgleichung $u'' = -4u + 4u'$. Bei dieser Differentialgleichung handelt es sich um eine homogene lineare Differentiagleichung mit konstanten Koeffizienten. Der dazugehörige Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert uns, vorbehaltlich einer Spezifikation von Anfangswerten $u(\tau)) = u_0$ und $u'(\tau) = v_0$, die Existenz einer eindeutigen Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Insgesamt erwarten wir also einen zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum von Lösungen der in Rede stehenden Differentialgleichung. Wir setzen diese also über einen Exponentialfunktionsansatz $u_{\text{test}}(t) = C \exp(\lambda t)$ $(C \in \mathbb{R})$ und finden mittels Einsetzen die quadratische Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Daraus sehen wir, dass $\lambda = 2$ eine zweifache Nullstelle der quadratischen Gleichung ist. Somit erhalten wir zumindest eine Lösung der Differentialgleichung durch $u_{\text{test}}(t) = C \exp(2t)$.

Laut Vorlesung ist in dem Fall, dass der Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf eine Gleichung mit einer mehrfachen Nullstelle führt, eine weitere Lösung durch $U_{\text{test}}(t) = Dt^1/1! \cdot \exp(2t) = Dt\exp(2t)$ gegeben, wobei $D \in \mathbb{R}$. In der Tat ist $U'_{\text{test}}(t) = D\exp(2t) + 2tD\exp(2t)$ und $U''_{\text{test}}(t) = 4D\exp(2t) + 4tD\exp(2t) = -4tD\exp(2t) + (4D\exp(2t) + 8Dt\exp(2t)) = -4U_{\text{test}}(t) + 4U'_{\text{test}}(t)$. Mithin haben wir also zwei Lösungen der Differentialgleichung gefunden. Für $C = D = 1$ sind diese auch linear unabhängig, denn die Wronskische Determinante $W[u_{\text{test}}, U_{\text{test}}](t = 0) = u_{\text{test}}(0)U'_{\text{test}}(0) - U_{\text{test}}(0)u'_{\text{test}}(0) = 1 \neq 0$. Mithin finden wir, dass

$$\{\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto \exp(2t) \quad , \quad \Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto t\exp(2t)\} \tag{1085}$$

ein Fundamentalsatz von Lösungen der zu untersuchenden Differentalgleichung angibt, sodass jede Lösung eben dieser in der Form

$$u(t) = C\exp(2t) + Dt\exp(2t) \tag{1086}$$

vorliegt, wobei $C, D \in \mathbb{R}$.
(b) Für $x > 0$ betrachten wir die Differentialgleichung $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Wir setzen $x = x(t) = \exp(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ als mindestens zweimal stetig differenzierbare Variablentransformation und berechnen zunächst, dass

$$\begin{aligned}\frac{dy(x)}{dx} &= \frac{dt(x = x(t))}{dx}\frac{dy(x(t))}{dt} = \left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x(t)}\right)^{-1}\frac{dy(x(t))}{dt} \\ &\overset{u\equiv y\circ x}{=} \left.\frac{1}{\exp(t)}\right|_{x=\exp(t)}\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{x}\frac{du(t)}{dt}.\end{aligned}$$

Ebenso finden wir die Identität

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{du(t)}{dt}\right) = \frac{-1}{x^2}\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{du(t)}{dt}\right) = \frac{-1}{x^2}\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2u(t)}{dt^2}.$$

Damit können wir die Differentialgleichung für y in eine Differentialgleichung für u umformen, das von der Variablen $t (\in \mathbb{R})$ abhängt. Wir finden

$$\ddot{u}(t) - 4\dot{u}(t) + 4u(t) = 0, \tag{1087}$$

wobei der Punkt die Anleitung von u nach t kennzeichnet. Diese Differentialgleichung haben wir bereits in Teil (a) gelöst und finden, dass nun das allgemeine u gegeben ist durch

$$u(t) = C\exp(2t) + Dt\exp(2t), \tag{1088}$$

mit den reellen Konstanten C und D. Die Lösung y erhalten wir, indem wir $x = \exp(t) \Leftrightarrow t = \ln(x)$ für $(t, x) \in \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ | \xi = \exp(\tau)\}$ bemühen. Damit ist $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von den Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$ durch $y(x) = u(t(x)) = Cx^2 + Dx^2\ln(x)$ gegeben. □

Aufgabe 75 (F11T1A1) Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = 2\sqrt{|y-1|}$. Wir sollen jeweils untersuchen, ob es eine Lösung mit den folgenden Werten gibt und im Falle der Existenz alle Lösungen angeben. Wir definieren zunächst die Funktion $f(x, y) = \sqrt{|y-1|}$ auf $D \equiv D_+ \uplus D_-$, wobei $D_+ = \mathbb{R} \cup (1, \infty)$ und $D_- = \mathbb{R} \cup (-\infty, 1)$ jeweils offensichtlicherweise Gebiete im $\mathbb{R}^2$ sind. Auf $D_\pm$ ist die Einschränkung $f|_{D_\pm}$ stetig und stetig partiell differenzierbar im zweiten Argument, d.h., in y, genügt somit einer lokalen Lipschitz-Bedingung auf D_+ bzw. auf D_-. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert nun zu jeder Anfangsbedingung $y(\tau) = \xi$ für $\xi \neq 1$ und $\tau \in \mathbb{R}$ die eindeutige Existenz einer maximalen Lösung der Anfangswertaufgabe $x' = f(x, y)$ mit $y(\tau) = \xi$ auf D_+ falls $\xi > 1$ und auf D_- falls $\xi < 1$. Ferner stellen wir fest, dass f sogar auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist, sodass uns, unter Beachtung der Offenheit von $\mathbb{R}^2$, der Existenzsatz von Peano für jeden Anfangswert $y(\tau) = \xi$ mit (τ, ξ) zumindest die (nicht notwendigerweise eindeutige) Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $y = f(x, y)$ mit der vorher genannten Anfangsbedingung liefert. Wir stellen zunächst fest, dass $\lambda_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ für alle $\tau \in [a, b]$ mit beliebig gewählten $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a < b$ die Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$ mit $y(\tau) = 1$ löst. Für den Fall, dass der Anfangswert $\xi \neq 1$, wenden wir Separation der Variablen an und fordern zunächst $y, \xi > 1$. Dann lösen wir die Integralgleichung

$$\int_\xi^y \frac{dz}{2\sqrt{z-1}} = \int_\tau^t dt' \tag{1089}$$

nach y auf und erhalten $\sqrt{y-1} - \sqrt{\xi - 1} = t - \tau$, was wir zu $y = 1 + (\sqrt{\xi - 1} + (x - \tau))^2$ umformen können. Da $y' > 0$ für eine eindeutige Lösung, erhalten wir so auf $(\tau - \sqrt{\xi - 1}, \infty)$ eine maximale Lösung des Anfangfswertproblems, wie wir leicht anhand der Anfangsbedingung und Differentialgleichung durch Einsetzen überprüfen. Falls $\xi < 1$, ist $y(< 1)$ aus der Integralgleichung

$$\int_\xi^y \frac{dz}{2\sqrt{1-z}} = \int_\tau^t dt' \tag{1090}$$

bestimmbar und wir finden, dass $-\sqrt{1-y} + \sqrt{1-\xi} = t - \tau$. Umformen liefert $y = 1 - (x - \tau - \sqrt{1-\xi})^2$. Da für eine eindeutige Lösung $y' > 0$, muss $x < \tau + \sqrt{1-\xi}$. Wiederum können wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung überprüfen, dass wir so eine Lösung des Anfangswertproblems gefunden haben.

(a) $y(0) = 0$ *und* $y(1) = 1$*:* Diese Forderungen lieferte uns in D_- die Lösung $y_- : (-\infty, 1)$. Wir erhalten somit alle Lösungen durch

$$y(x) = \begin{cases} y_-(x) & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq a \\ 1 + (x-a)^2 & x > a \end{cases}, \tag{1091}$$

wobei $a > 1$.

(b) $y(0) = 0$ *und* $y(2) = 2$. Mithilfe dieser Forderungen erhalten wir sogar eine eindeutige Lösung, nämlich

$$y(x) = \begin{cases} y_-(x) & x < 1 \\ 1 & 1 = x \\ 1 + (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}, \tag{1092}$$

wobei y_- wie in (a) gegeben ist.
(c) $y(0) = 0$ *und* $y(2) = 3$. In diesem Fall erfodert der in D_- laufende Zweig der Lösung, dass $x < 1$, denn erst $\lim_{x \uparrow 1} y(x) = 1$. Der in D_+ verlaufende Zweig der Lösung, der die zweite Bedingung $y(2) = 3 > 1$ befriedigte, ist für $x > 2 - \sqrt{2}$ definiert und ist auf $(2 - \sqrt{3}, \infty)$ streng monoton steigend. Es gilt in der Tat erst $\lim_{x \downarrow 2-\sqrt{2}}[1 + (x - (2 - \sqrt{2}))^2] = 1$. Da aber $2 - \sqrt{2} < 1$, können wir die beiden eindeutig bestimmten Zweige einer vorgeblichen Lösung mit den geforderten Eigenschaften nicht zusammenstückeln. Daher kann es keine Lösung der in der Angabe genannten Differentialgleichung geben, die die Anforderungen von Teil (c) erfüllt.$\square$

Aufgabe 76 (F05T2A1) Sei $p \in (0, \infty)$. Wir bestimmen die eindeutige maximale Lösung von $x' = x^p$ mit $x(0) = 1$.

- *Fall 1:* $p > 1$. Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf dem ganzen Definitionsbereich stetig differenzierbare Funktion, somit lokal Lipschitz-stetig. Das angegebene Anfangswertproblem für das autonome System besitzt somit eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$. Diese konstruieren wir. Integration liefert formal $(1 - p)^{-1}(\lambda(t)^{-p+1} - 1) = t$, was wir zu $\lambda(t) = (1 - (p - 1)t)^{-1/(p-1)}$ umformen können, solange $t \leq 1/(p - 1)$. Wir sehen, dass die so auf $(-\infty, (p-1)^{-1})$ definierte Funktion λ stetig differenzierbar ist, $\lambda(0) = 1$ befriedigt und ferner die Differentialgleichung für alle angegebenen $t \in (-\infty, (p - 1)^{-1})$ löst. Wir sehen, dass $\limsup_{t \uparrow (p-1)^{-1}} |\lambda(t)| = \infty$, sodass wir die gefundene Lösung nicht in positive t-Richtung fortgesetzt werden kann laut Charakterisierungssatz über das Randverhalten maximaler Lösungen. Zudem ist die untere Grenze der Existenzintervalls von λ bereits $-\infty$, sodass wir insgesamt mithilfe des Satzes über die Charakterisierung maximaler Lösungen anhand des Randverhaltens sehen, dass für $p > 1$
$$\lambda : \left(-\infty, \frac{1}{p-1}\right) \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\sqrt[p-1]{1 - (p-1)t}} \tag{1093}$$
die nach den eingangs gemachten Bemerkungen die eindeutig bestimmte, maximale Lösung des Anfangtswertproblems ist. Im Falle $p > 1$ ist also $(-\infty, 0)$ ein Teilintervall des Existenzintervalls, nicht aber $(0, \infty)$.

- *Fall 2:* $p = 1$. Dann ist $x' = x$ und wir finden die Lösung der (linearen, homogenen) Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu $x(t) = \exp(t)$. Diese ist wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für lineare Differentialgleichungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, also maximal, und ferner eindeutig. Damit enthält das Existenzintervall der maximalen Lösung im Fall $p = 1$ sowohl $(-\infty, 0)$ als auch $(0, \infty)$ als Teilintervall.

- *Fall 3:* $0 < p < 1$. Dann ist $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^p$ stetig differenzierbar, f also lokal Lipschitz-stetig dort. Wählen wir als Definitionsbereich von f stattdessen $\mathbb{R}_+$, dann ist f nur noch stetig. Wir lösen nun das Anfangswertproblem zunächst formal. Integration der Differentialgleichung liefert $x^{1-p} = (1-p)t+1$ solange $x > 0$. Potenzieren liefert $x(t) = ((1-p)t+1)^{1/(1-p)}$. Damit sehen wir, dass $x > 0$ erfüllt wird, solange $t > -1/(1-p)$. Für $t \uparrow \infty$ gilt auch $|x(t)| \uparrow \infty$, sodass wir bereits etabliert haben, dass $(0, \infty)$ Teilintervall des Existenzintervalls der maximalen Lösung ist. Da $\lim_{t \downarrow -1/(p-1)} \lambda(t) = 0 \in \partial\mathbb{R}^+$, stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die gefundene Lösung für gewisse $p \in (0,1)$ auf $\mathbb{R}$ auszudehnen. Insbesondere ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, t \mapsto 0$ eine Lösung von $x' = x^p, x(0) = 0$. Da $x'(t) = x(t)^p \to 0$ für $t \downarrow -(1-p)^{-1}$, erhalten wir also durch Fortsetzung eine eindeutig bestimmte, globale Lösung,

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\, t \mapsto \begin{cases} ((1-p)t+1)^{1/(1-p)} & t > -1/(1-p) \\ 0 & t \leq -1/(1-p) \end{cases}. \tag{1094}$$

Damit ist die maximale Lösung der Differentialgleichung für $0 < p < 1$ ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und wir haben gezeigt, dass in diesem Fall auch $(-\infty, 0)$ Teilintervall des Existenzintervalls der maximalen Lösung ist.

Aufgabe 77 (H06T2A3) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ zwei glatte Funktionen. Betrachte das Anfangswertproblem $x' = f(t)g(x)$ mit $x(0) = x_0$, wobei $x_0 \in (a,b)$ eine Zahl dergestalt ist, dass es zwei Nullstellen $x_1, x_2 \in (a,b)$ von g gibt, sodass $x_1 < x_0 < x_2$. Die Voraussetzungen des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz sind erfüllt, denn die rechte Seite der Differentialgleichung ist auf dem Gebiet $\mathbb{R} \times (a,b)$ glatt und somit insbesondere Lipschitz-stetig in x.

- *Fall 1:* $g(x_0) = 0$. Dann ist $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x_0$ die eindeutig bestimmte globale Lösung des Anfangswertproblems.

- *Fall 2:* $g(x_0) \neq 0$. Ohne Einschränkungen sind x_1 bzw. x_2 die minimale bzw. maximale Nullstelle von g, sodass $x_1 < x_0 < x_2$. Mit anderen Worten gibt es keine x_1' oder x_2' in (a,b), sodass $x_1' > x_1$ und $g(x_1') = 0$ bzw. $x_2' < x_2$ und $g(x_2') = 0$ sowie $x_1' < x_0 < x_2$ bzw. $x_1 < x_0 < x_2'$. Dann finden wir durch Trennung der Variablen
$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\chi}{g(\chi)} = \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{1095}$$
Da $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x_k$ für $k \in \{1,2\}$ die globale Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t)g(x)$ mit $x(0) = x_k$ für das jeweilige k ist, gilt aus Stetigkeitsgründen, dass $x_1 < x(t) < x_2$ für alle t im maximalen Existenzintervall der Lösung des zu betrachtenden Anfangswertproblems. Andernfalls resultiert ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösung $x(t)$. Da $\operatorname{sgn}(g)(x) = \text{const.}$ für $x \in (x_1, x_2)$ können wir den obenstehenden Integralausdruck für alle $t \in \mathbb{R}$ nach x auflösen. Damit haben wir eine und damit die Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems von oben gefunden.

Insgesamt hat die Differentialgleichung $x' = f(t)g(x)$ für die beschriebene Anfangsbedingung damit eine eindeutige, globale Lösung. □

Aufgabe 78 (F09T1A4) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und sei $M \equiv \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}}$ kompakt in $\mathbb{R}^n$.
(a) Zu zeigen ist, dass die Lösung x der Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0 \in M$ vollständig in M liegt. Da f stetig differenzierbar ist, ist

die rechte Seite des autonomen Systems auf ganz $\mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Daher existiert eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung des betrachteten Anfangswertproblems nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Falls $x_0 \notin M$, dann ist $f(x_0) = 0$. Damit ist $x : \mathbb{R} \to M, t \mapsto x_0$ die eindeutig bestimmte, ganz in M verlaufende maximale Lösung des Anfangswertproblems. Falls $x_0 \in M$, dann ist $f(x) \neq 0$. Infolge des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes ist dann für alle $t \in I$, wobei I das Existenzintervall der maximalen Lösung x des Anfangswertproblems bezeichnet, $f(x(t)) \neq 0$. Andernfalls erhalten wir einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der vorher gefundenen, konstanten und global definierten Lösungen. Damit ist auch in diesem Fall $x(t) \in M$ für alle $t \in I$.
(b) Wir haben bereits in (a) gesehen, dass die konstanten Lösungen global definiert sind. Sei nun $x_0 \in M$. Dann ist $f(x_0) \neq 0$. Da M kompakt ist, und die zu x_0 gehörige Lösung für alle Zeiten, zu denen sie existiert, ganz in M liegt, ist $\|x(t)\| \leq C < \infty$ für alle $t \in I$, wobei $C > 0$ wegen Kompaktheit, also Beschränktheit von M, endlich ist. Falls $I \neq (-\infty, \infty)$, dann müsste $x(t)$ gegen einen Punkt streben, der nicht in M liegt, d.h., einen Punkt, der gerade eine Ruhelage des Systems ist. Das liefert aber, wie auch in (a) festgestellt, nach "Anstückelung" einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Ruhelagen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Damit sehen wir, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ das o.g. Anfangswertproblem global lösbar ist. $\square$

Aufgabe 79 (H11T3A3) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto e^{x^2t^2} + t^2$.
(a) Die Funktion F ist offenbar in x und t als Komposition von Polynomfunktionen und der Exponentiafunktion zweimal stetig partiell differenzierbar. Es gilt $\partial_x F(t, x) = 2xt^2 e^{x^2t^2}$ und $\partial_t F(t, x) = 2tx^2 e^{x^2t^2} + 2t$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.
(b & c) Wir betrachten nun auf $\mathbb{R}^2$ das Anfangswertproblem

$$xt^2x' + (tx^2 + te^{-x^2t^2}) = 0 \ \& \ x(1) = x_0. \tag{1096}$$

Indem wir $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) = xt^2$ und $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto tx^2 + te^{-x^2t^2}$ definieren, können wir die Differentialgleichung in der Form $p(t, x)x' + q(t, x) = 0$ schreiben. Da p, q aus Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion in stetig differenzierbarer Weise zusammengesetzt sind, sind p und q jeweils stetig differenzierbar. Zudem ist $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet. Daher können wir die Exaktheit der Differentialgleichung durch die Irrotionalitätsbedingung nachprüfen. Diese lautet hier: $\partial_t p(t, x) = \partial_x q(t, x)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$ Die obenstehende Differentialgleichung ist exakt. Es gilt aber $\partial_t p(t, x) = 2tx$ und $\partial_x q(t, x) = 2tx - 2xt^2 e^{-x^2t^2}$. Indem wir die beiden Ausdrücke an $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ auswerten, sehen wir, dass diese nicht gleich sind. Damit ist die Differentialgleichung nicht exakt. Andererseits können wir die Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto 2e^{x^2t^2}$ multiplizieren, der keine Nullstelle in $\mathbb{R}^2$ hat. Damit ist die obenstehende Differentialgleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} &2xt^2 e^{x^2t^2} x' + 2tx^2 e^{x^2t^2} + 2t = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial_x F(t, x)x' + \partial_t F(t, x) = 0, \end{aligned} \tag{1097}$$

wobei wir die partiellen Ableitungen von F aus (a) verwendet haben. Damit ist F eine Stammfunktion der Differentialgleichung. Längs jeder Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda(t)$

des Anfangswertproblems gilt also $d_t F(t, \lambda(t)) = 0$, bzw., hier praktischer $F(0, x_0) = F(t, \lambda(t))$ für alle $t \in I$. Hierbei ist I das Existenzintervall der Lösung λ. Wir können die Gleichung weiter auflösen

$$e^{x_0^2} + 1 - t^2 = \exp(t^2 \lambda(t)^2). \tag{1098}$$

Wenn wir $t \in (-\sqrt{1 + \exp(x_0^2/2)}, \sqrt{1 + \exp(x_0^2/2)})$ fordern, können wir die Gleichung durch logarithmieren zunächst weiter vereinfachen

$$\ln(1 + \exp(x_0^2) - t^2) = t^2 \lambda(t)^2. \tag{1099}$$

Indem wir uns auf $\mathbb{R}^+ \ni I = (0, \sqrt{1 + \exp(x_0^2/2)}) \ni t$ beschränken, können wir zumindest $\lambda(t)^2 = \ln(1 + \exp(x_0^2) - t^2)/t^2$ erreichen und sicherstellen, dass der Anfangszeitpunkt $t = 1$ in I enthalten ist, denn $\sqrt{1 + \exp(x_0^2/2)} > 1$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Um nach λ auflösen zu können, müssen wir noch sicherstellen, dass der Logarithmus im obenstehenden Ausdruck ein nicht-negatives Ergebnis liefert. Das ist genau dann der Fall, wenn $1 + \exp(x_0^2) - t^2 \geq 1$, also $\exp(x_0^2) \geq t^2$.

- *Fall 1:* $x_0 \neq 0$. Dann ist $\exp(x_0^2/2) \geq 1$ und es gilt

$$\lambda(t) = \operatorname{sgn}(x_0) \frac{\sqrt{\ln(1 - \exp(x_0^2) - t^2)}}{t} \tag{1100}$$

  für $t \in (0, \exp(x_0^2/2)] \supset (0, 1]$ erfüllt $\lambda(1) = x_0$. Das definiert uns eine Lösung des Anfangswertproblems.

- *Fall 2:* $x_0 \neq 0$. Dann hat die Differentialgleichung die Lösungen $\lambda_\pm : (0, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda_\pm(t) = \pm\sqrt{\ln(2 - t^2)}/t$.

In jedem Fall existiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung nur auf einem beschränkten Intervall. Für $t \downarrow 0$ gilt für alle x_0, dass die Lösung $\lambda_{x_0}(t)$ zum Anfangswert x_0 absolut unbeschränkt ist, denn $\lim_{t \downarrow 0} |\lambda_{x_0}(t)| \to \infty$. Für die obere Grenze, die wir mit $b(x_0)$ abkürzen, gilt jeweils $\lim_{t \uparrow b(x_0)} |\lambda_{x_0}(t)| = 0$. $\square$

Aufgabe 80 (H11T2A4) (a) Wir sollen das Anfangswertproblem $y' = e^y t^3$ mit $y(0) = y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}$ lösen. Zunächst beachten wir, dass die rechte Seite der Differentialgleichung eine auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbare Funktion definiert, d.h., die rechte Seite der Differentialgleichung genügt der lokalen Lipschitzstetigkeitsbedingung in der Variablen y. Da der $\mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist, garantiert uns der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Existenz genau einer maximalen Lösung für jeden Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$. Da die reelle Exponentialfunktion strikt positiv ist, können wir die Differentalgleichung separieren und in die Integragleichung

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dx}{\exp(x)} = \int_0^t \tau^3 \, d\tau \tag{1101}$$

konvertieren. Durch Integration finden wir $\exp(-y_0) - \exp(-y(t)) = t^4/4$, was wir zu $y(t) = -\ln(\exp(-y_0) - t^4/4)$ umformen können. Dafür benötigen wir $|t| < \sqrt[4]{4\exp(-y_0)}$. Letzteres ist strikt größer als 0. Wir setzen als Existenzintervall also

$(-\sqrt[4]{4\exp(-y_0)}, \sqrt[4]{4\exp(-y_0)}) =: I$. Dieses ist auch maximal: Offenbar ist $y(t) = y(-t)$ für alle $t \in I$, sodass wir uns darauf beschränken, zu zeigen, dass y nicht nach rechts fortgesetzt werden kann. Es ist $\lim_{t\uparrow \sqrt[4]{4\exp(-y_0)}} |y(t)| = \infty$, da der Logarithmus gegen $-\infty$ geht. Laut Charakterisierungssatz zur Maximalität von Lösungen aufgrund des Randverhaltens ist damit $\sqrt[4]{4\exp(-y_0)}$ die obere Grenze des maximalen Existenzintervalls. Mit der Symmetrie erhalten wir die links- und rechtsseitige Maximalität des Existenzintervalls I. Insbesondere gibt es kein $y_0 \in \mathbb{R}$, sodass y auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.
(b) Wir sollen die Lösung des Anfangswertproblems $y' - 3y = te^{4t}$ mit $y(1) = 2$ bestimmen. Hierbei handelt es sich um eine lineare skalare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und stetiger, auf ganz $\mathbb{R}$ definierter Inhomogenität. Aus der Vorlesung ist die Duhamel'sche Lösungsformel bekannt,

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\exp(3(t-1)) + \int_1^t e^{3(t-\tau)}\tau e^{4\tau}\,d\tau \\ &= 2\exp(3(t-1)) + e^{3t}\int_1^t \tau e^{-t}\,d\tau \\ &\overset{\text{p.I.}}{=} 2\exp(3(t-1)) + e^{3t}\left[\tau(-\exp(-\tau))\right]_{\tau=1}^{\tau=t} - e^{3t}\int_1^t (-\exp(-\tau))d\tau \\ &= 2\exp(3(t-1)) + e^{3t}(e^{-1} - te^{-t}) - e^{3t}(e^{-t} - e^{-1}) \\ &= 2\exp(3(t-1)) + 2e^{3t-1} - (1+t)e^{2t}. \end{aligned} \tag{1102}$$

□

Aufgabe 81 (H09T1A1) Gegeben sei die Differentialgleichung $u'(x) = \sqrt{1-u(x)^2}$. Wir sollen zu $u(0) = -1$ bzw. $u(0) = 1$ alle Lösungen des Anfangswertproblems bestimmen. Die angegebene Differentialgleichung ist autonom und stetig auf $[-1, 1]$. Wir sehen, dass $u_- \equiv -1$ und $u_+ \equiv -1$ jeweils Nullstellen der rechten Seite sind und konstante Lösungen $u_\pm : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \pm 1$ definieren. Auf $(-1, 1)$ ist die rechte Seite der Differentialgleichung sogar Lipschitz-stetig in u. Damit finden wir zu jedem $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$ (Gebiet!), eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung des Hilfsproblems $u' = \sqrt{1-u^2}$, $u(\tau) = \xi$. Diese bestimmen wir explizit zu $\arcsin(u) - \arcsin(\xi) = x - \tau$. Hierbei haben wir die Differentialgleichung in eine Integralgleichung umgewandelt und verwendet, dass $d_u \arcsin(u) = \sqrt{1-u^2}^{-1}$ Damit ist $u(x) = \sin(x - \tau + \arcsin(\xi))$. Diese Funktion ist insbesondere auch stetig differenzierbar, wenn wir für sie Werte auf $[-1, 1]$ statt $(-1, 1)$ zulassen. Indem wir fordern, dass $u(\tau') = 0$ für $\tau' = \tau + \pi/2 \geq \pi/2$, erhalten wir Lösungen $u_\tau = \sin(x - \tau - \pi/2)$ für $x \in \tau + (0, \pi)$. Hiermit erhalten wir Lösungen

$$\lambda_\tau^-(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq \tau \\ \sin(x - \tau - \pi/2) & \tau < x < x + \pi \\ +1 & x > \tau + \pi \end{cases}. \tag{1103}$$

zum Anfangswert $u(0) = -1$. Anhand des Hilfsproblems sehen wir, dass für $u(\tau'') = 0$ mit $\tau'' \in \mathbb{R}$ die Vereinigung aller Bahnen der maximalen Lösung des Anfangswertproblems zum Hilfsproblem bereits $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ zerlegen. Die (stetig differenzierbare)

Anstückelung an die konstante Lösung u_- gelingt aber nur wie in der Konstruktion der λ_τ^- beschrieben. Da die Bahnen der Lösungen des Hilfsproblem das zwischen den konstanten Lösungen eingeschlossene Gebiet $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ zerlegen und wir aufgrund des Eindeutigkeitssatzes somit alle Lösungen des Hilfsproblems gefunden haben, ist für $u(0) = +1$ nur die konstante Lösung u_+ eine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems auf $[0, \infty)$. $\square$

Aufgabe 82 (H09T1A3) Sei $E \in \mathbb{C}$. H sei analytisch und erfülle die Differentialgleichung

$$H'' + 2zH' + (E-1)H = 0. \tag{1104}$$

Da H analytisch ist, besitzt H auf einer maximalen offenen Kreisscheibe $B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ eine gleichmäßig konvergente Potenzreihenentwicklung mit Entwicklungspunkt 0,

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \tag{1105}$$

wo $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. $r > 0$ ist hierbei der Konvergenzradius der Reihe. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der obigen Reihendarstellung auf $B_r(0)$ gegen H können wir die Summation mit dem Differentiationsoperator vertauschen und erhalten somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2ka_k + (E-1)a_k\right] z^k = 0. \tag{1106}$$

Indem wir beachten, dass $\{z^k | k \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig auf $B_r(0)$. Damit finden wir für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Rekursionsrelation für die Koeffizienten a_k:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2ka_k + (E-1)a_k = 0. \tag{1107}$$

Es gilt $H(0) = a_0$ und $H'(0) = a_1$, sodass wir durch die Angabe von Anfangsbedingungen die Koeffizienten aus der Rekursionsrelation bestimmen können.
(b) Für $a_0 = 0$ sind jeweils alle a_k mit geradem Index $k \in 2\mathbb{N}_0$ gleich 0, für $a_1 = 0$ sind jeweils alle a_k mit ungeradem Index $k \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ gleich 0. Falls $a_0 = 0 = a_1$, dann ist $r = \infty$, denn $H(z) = 0$ in diesem Fall auf ganz $\mathbb{C}$. Sei nun $E = 1$, $a_0 \neq 0$. Dann gilt $a_{2l} = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Die Rekursionsrelation vereinfacht sich nämlich zu $2a_2 + 2 \cdot 0 \cdot a_0 + 0 \cdot a_0 = 0$, d.h., $a_2 = 0$. Induktiv finden wir nun $a_{2l} = 0$ aus der Rekursionsrelation. Sei in diesem Fall, $E = 1$, $a_1 = 0$. Dann ist $H(z) = a_0$, was wiederum auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, also $r = \infty$ impliziert. Falls $a_1 \neq 0$ für $E = 1$, dann formen wir die Rekursionsrelation um zu

$$a_{k+2} = \frac{2k}{(k+2)(k+1)} a_k \Rightarrow \frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{2k}{(k+2)(k+1)}. \tag{1108}$$

Insbesondere ist auch $a_{2l+1} \neq 0$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Damit können wir den Konvergenzradius der Potenzreihe bestimmen zu $r = \infty$, indem wir die Gleichung zur Bestimmung des Konvergenzradius für die Reihe, bestehend aus den ungeraden Potenzen von z

mit jeweiligen Koeffizienten a_k, mittels Quotientenkriterium bemühen. Insgesamt ist also auch in diesem Fall $r = \infty$. Falls $a_0 = 0$ und $E \neq 1$ und $a_1 \neq 0$ finden wir ebenfalls $r = \infty$, da sich die Reihenentwicklung hier sogar auf eine Reihe beschränkt, die nur ungerade Potenzen von z involviert. Zuletzt untersuchen wir den Fall $a_0 \neq 0$, $E \neq 1$ und $a_1 \neq 0$. Dann betrachten wir die beiden Reihen

$$R_g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \tag{1109}$$

$$R_u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}, \tag{1110}$$

bestehend aus den Summanden von $H(z)$ in Potenzreihenentwicklung, die zu den geraden bzw. ungeraden Potenzen von z gehören. Es gilt dann $R_g(z)+R_u(z) = H(z)$ auf $B_r(0)$, wo $r = \min\{r_u, r_g\}$, wobei r_u bzw r_g den Konvergenzradius von R_u bzw R_g bezeichnet. Da $a_0 \neq 0$ und $a_1 \neq 0$, können wir die Rekursionsrelation jeweils zu

$$\frac{a_{2l+2}}{a_{2l}} = \frac{4l + (E-1)}{(2l+2)(2l+1)} \text{ bzw. } \frac{a_{2l+3}}{a_{2l+1}} = \frac{4l + 2 + (E-1)}{(2l+3)(2l+2)} \tag{1111}$$

umformen ($l \in \mathbb{N}_0$). Die erste Gleichung ist für a_k's mit geradem Index, die zweite für a_k's mit ungeradem Index. Mittels Quotientenkriterium stellen wir fest, dass $r_g = \infty = r_u$. Damit ist auch in diesem Fall $r = \infty$.
(c) Wir sollen nun die geraden Lösungen angeben, d.h., diejenigen $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, mit der Eigenschaft, dass $H(-z) = H(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. In der Wahl des Definitionsbereichs von H haben wir unsere Ergebnisse aus (b) bemüht, nach denen wir H durch eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe ausdrücken können. Da H gerade und als analytische Funktion holomorph ist, gilt $H'(0) = 0$. Für $H(0) = 0$ finden wir $H(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Sei also im Folgenden $a_0 \neq 0$. Dann ist

$$a_{2l} = a_0 \frac{2\prod_{j=0}^{l-1}(4j + (E-1))}{(2l)!}, \tag{1112}$$

sowie $a_{2l+1} = 0$ jeweils für $l \in \mathbb{N}_0$, wie man jeweils leicht durch Induktion sieht. In diesem Fall ist also $H(z) = a_0$ gegeben durch die konstante Funktion. Falls $E > 1$ oder $E \leq 1$ und $E \not\equiv 1 \bmod (4)$, dann ist $a_{2l} \neq 0$ für alle $l \neq 0$ und

$$H(z) = a_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\prod_{j=0}^{l-1}(4j + (E-1))}{(2l)!} z^{2l}. \tag{1113}$$

(d) Falls $E \leq 1$ mit $E \equiv 1 \bmod (4)$, dann ist $E = 4L + 1$ mit $L \in (-\mathbb{N}_0)$. Für $l = L + 1$ wird dann zum ersten Mal einer der Faktoren in Produktdarstellung der a_{2l} gleich 0 und die Lösung reduziert sich auf ein Polynom. □

Aufgabe 83 (F14T3A4) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2 \;\&\; \dot{x}_2 = e^{x_1}(1 - x_2^2) \tag{1114}$$

mit $x(0) = (1, 0)$.
(a) Wir schreiben das autonome System von Differentialgleichungen erster Ordnung als $\dot{x} = F(t, x)$, wobei $x = (x_1, x_2)$ und $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto (-x_1 x_2, \exp(x_1)(1 - x_2^2))$. Offenbar ist F stetig differenzierbar auf dem kompletten Definitionsbereich, damit also lokal lipschitzstetig. Da $(1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Gebiet ist, liefert uns der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Existenz einer eindeutig bestimmten maximalen Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}^2$, sodass $0 \in I$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und maximal in dem Sinne ist, dass es kein Intervall $J \supsetneq I$ gibt, sodass eine Lösung des obenstehenden Anfangswertproblems $\mu : J \to \mathbb{R}^2$ mit $\mu|_J = \lambda$ existiert.
(b) Wir stellen zunächst fest, dass $\mu_2^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 1$ und $\mu_2^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils eine Lösung der zweiten Gleichung des Anfangswertproblems für $x(0) = (\xi, 1)$ bzw. $x(0) = (\xi, -1)$ sind, wobei $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Da die Lösung λ_2 der zweiten Komponente Differentialgleichung stetig differenzierbar ist, gilt $-1 < \lambda_2(t) < +1$: Ohne Einschränkung betrachte wir den Fall, dass λ_2 den Wert $+1$ annimmt. Der Fall, dass λ_2 den Wert -1 annimmt, verläuft analog. Angenommen, es gäbe ein $\tau \in I$, sodass $\lambda_2(\tau) = +1$. Dann setze $\xi = \lambda_1(\tau)$. Wegen $\lambda_2(0) = 0 \neq 1$ ist $\lambda_2 \neq \mu_2^+$. Damit haben wir aber einen Widerspruch dazu, dass das Anfangswertproblem zur Anfangsbedingung $x(0) = (\xi, 1)$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung hat, deren zweite Komponente gerade durch die konstante Funktion μ_2^+ gegeben ist. Also war die Annahme falsch, und es gibt kein $\tau \in I$, sodass $\lambda_2(\tau) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen (Zwischenwertsatz) ist dann $\lambda_2 < 1$ auf ganz I. Analog schließt man aus, dass ein $\tau \in I$ mit $\lambda_2(\tau) = -1$ existiert und bemüht das Stetigkeitsargument (Zwischenwertsatz), dass $\lambda_2 > -1$. Somit ist $-1 < \lambda_2(t) < 1$ für alle $t \in I$, wie behauptet.
(c) Wegen $|\lambda_2(t)| \leq 1$ für alle $t \in I$ ist die rechte Seite der ersten Gleichung linear durch $|x_1 x_2| \leq |x_1|$ linear beschränkt auf I. Es gilt

$$x_1(t) = \exp\left(-\int_0^t x_2(\tau)\, d\tau\right) \geq 0. \tag{1115}$$

Da x_2 nach Teil (b) stets absolut durch 1 beschränkt ist, ist x_1 auf jedem beschränkten Intervall beschränkt. Laut Charakterisierungssatz maximaler Lösungen bleibt wegen $\partial\mathbb{R}^2 = \emptyset$ daher nur übrig, dass die maximale Lösung λ des Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, d.h., $I = \mathbb{R}$.
(d) Es gilt $\dot{x}_2 = \exp(x_1)(1 - x_2^2) > 0$ wegen Positivität der Exponentialfunktion und $x_2 \in (-1, 1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit ist x_2 streng monoton steigend für $t \in \mathbb{R}$ und wegen $x_2(0) = 0$ gilt somit $x_2(t > 0) > 0$. Es ist also

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left(-\int_0^t x_2(\tau)\, d\tau\right) = 0. \tag{1116}$$

Analog ist $x_2(t < 0) < 0$ und es gilt weiter

$$\lim_{t\to-\infty} \exp\left(-\int_0^t x_2(\tau)\, d\tau\right) = \lim_{t\to-\infty} \exp\left(\int_t^0 x_2(\tau)\, d\tau\right) = 0. \tag{1117}$$

Angenommen, es wäre $c = \lim_{t\to\infty} x_2(t)$ mit $c \in (-1, 1)$. Wegen der strengen Monotonie von x_2 wäre das dann auch eine obere Schranke für x_2. Aus der zweiten Komponente der Differentialgleichung erhalten wir aber $\dot{x}_2 = \exp(x_2)(1-x_1^2) \geq 1\cdot(1-c^2) > 0$, im Widerspruch dazu, dass c x_2 nach oben beschränken kann. Analog schließen wir für $t \to -\infty$. Somit gilt $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = (0, 1)$ und $\lim_{t\to-\infty} \lambda(t) = (0, -1)$. $\square$

Aufgabe 84 (H04T1A2) Seien $p, q \in C^0(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
(a) Wir betrachten die nichtlineare Differentialgleichung $y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$ für positives y. Wir definieren $z = z(y) = y^\beta$ für $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, was uns eine bijektive Funktion $\phi_\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, y \mapsto z = y^\beta$ liefert. Es gilt dann $y = z^{1/\beta}$. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\beta^{-1} z^{\beta^{-1}-1} z' + p(x) z^{\beta^{-1}} + q(x) z^{\alpha/\beta} = 0. \tag{1118}$$

Da mit y auch z positiv ist können wir die obenstehende Gleichung umformen zu

$$z' + \beta p(x) z + \beta q(x) z^{\frac{\alpha-1}{\beta}+1} = 0. \tag{1119}$$

Indem wir nun $\beta \equiv 1 - \alpha$ setzen, stellen wir fest, dass $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, wie bereits initial gefordert, und dass die zuletzt aufgeführte Differentialgleichung linear in z wird:

$$z' + (1 - \alpha) p(x) z + (1 - \alpha) q(x) = 0. \tag{1120}$$

Damit erfüllt die Transformation ϕ die gewünschten Eigenschaften.
(b) Wir betrachten nun das Anfangswertproblem $y' + y - x\sqrt{y} = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Durch Einsetzen sieht man, dass $\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Andererseits können wir die Differentialgleichung in der Form $y' = f(x, y)$ mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -y + x\sqrt{y}$ schreiben. Auf dem Gebiet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ist f stetig und stetig partiell nach y differenzierbar. Mithin genügt f einer lokalen Lipschitzstetigkeitsbedingung in y. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert uns nun die Eindeutigkeit und Existenz einer maximalen Lösung der Differentialgleichung vorbehaltlich der Spezifikation der Anfangsbedingung $y(\tau) = \xi$, wo $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Diese maximale Lösung ist insbesondere positiv, sodass wir Teil (a) anwenden können. Demzufolge geht die Differentialgleichung in

$$z' + 0.5z - 0.5x = 0 \tag{1121}$$

über. Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich aus der homogenen Lösung zusammen, die wir über den Exponentialansatz zu $z(x) = z_0 \exp(-0.5x)$, und aus einer partikulären Lösung, die wir durch Raten zu $z(x) = (x - 2)$ spezifizeren. Zusammengenommen haben wir also die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu $z(x) = z_0 \exp(-0.5x) - (x - 2)$ gefunden. Wegen $z = y^{1/2}$ haben wir $y = z^2$, d.h., $y(x) = (z_0 \exp(-0.5x) + (x - 2))^2$. Für $x = 0$ wollen wir erreichen, dass $\lim_{x \downarrow 0} y(x) = 0$. Das können wir für die Wahl $z_0 = 2$ erreichen. Dann ist $y(x) = (2 \exp(-0.5x) + (x - 2))^2$ und wir haben eine Lösung des Anfangswertproblems $y' + y - x\sqrt{y} = 0$ mit Anfangswert $y(1) = (2\sqrt{e}^{-1} + 1) > 0$ gefunden. Der obenstehende Ausdruck $y(x)$ definiert die maximale Lösung $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto y(x)$, denn für $x \downarrow 0$ und $x \uparrow \infty$ ist jeweils $\lim_{x \downarrow 0} \lambda(x) = 0$ und $\lim_{x \uparrow \infty} \lambda(x) = 0$ aber ansonsten ist $\lambda > 0$ auf $\mathbb{R}^+$ als Quadrat. Zudem ist $\lim_{x \downarrow} \lambda'(x) = 0$, da $x = 0$ eine doppelte Nullstelle von λ ist. Damit können wir die stetig differenzierbare Funktion $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definieren

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ (2 \exp(-0.5x) + (x - 2))^2 & x > 0 \end{cases}. \tag{1122}$$

Diese löst die Differentialgleichung $y' + y - x\sqrt{y} = 0$ nach Konstruktion auf ganz $\mathbb{R}$, erfüllt $\Lambda(0) = 0$ aber es gilt $\Lambda \neq \lambda_0$, denn $\Lambda > 0$ nach Konstruktion auf $\mathbb{R}^+$, wohingegen $\lambda_0 \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{R}$. Somit ist das angegebene Anfangswertproblem nicht eindeutig lösbar. □

Aufgabe 85 (H17T3A3) Für $u_0 \in \mathbb{R}$ untersuchen wir die Differentialgleichung $u' = u + 1/(1+t)$ auf $\mathbb{R}_+ \ni t$ zusammen mit $u(0) = u_0$ als Anfangsbedingung.
(a) Wir zeigen, dass die obenstehende Differentialgleichung eine Lösung auf $\mathbb{R}^+$ zu jedem Anfangswert $u_0 \in \mathbb{R}$ besitzt. Dazu schreiben wir sie in der Form $u'(t) = 1 \cdot u(t) + g(t)$, wobei $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, t \mapsto 1/(1+t)$, wobei $I \equiv (-1, \infty)$ die maximale Zusammenhangskomponente derjenigen Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, auf der $t \mapsto 1/(1+t)$ eine stetige Funktion erklärt und in der 0 enthalten ist. Ferner ist die Differentialgleichung für u linear und mit konstanten Koeffizienten. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für (Systeme von) lineare(n) Differentialgleichungen liefert uns nun, dass für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\lambda_{u_0} : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung existiert, die auf ganz $I = (-, \infty)$ existiert und die $\lambda_{u_0}(0) = u_0$ erfüllt. Die gesuchten Lösungen $\mu_{u_0} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ergeben sich nun durch Einschränkung der maximalen Lösung, $\mu_{u_0} \equiv \lambda_{u_0}|_{\mathbb{R}^+}$.
(b) Wir zeigen, dass $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für alle $u_0 \geq 0$.

- *Fall 1:* $u_0 = 0$. Aus der Vorlesung ist die Lösungsformel für das eigentlich zu untersuchende Anfangswertproblem bekannt,

$$u(t) = u_0 \exp(t) + \int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau = \int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau. \tag{1123}$$

 Da der Integrand strikt positiv für $\tau \in (0, t)$ ist und ferner $\exp(t - \tau) > 1$ für alle $\tau \in (0, t)$ zu einem beliebigen aber festen $t > 0$, können wir die Monotonie des Integrals bemühen um

$$u(t) = \int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau \geq \int_0^t \frac{1}{1+\tau} d\tau = \ln|1+t| - \ln|1| = \ln(1+t) \tag{1124}$$

 abzuschätzen. Da $\lim_{t\to\infty} \ln(1+t) = \infty$ gilt somit auch $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$.

- *Fall 2:* $u_0 > 0$. Mit der Lösungsformel für lineare skalare Differentialgleichungen mit Inhomogentität folgt

$$u(t) = u_0 e^t + \int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau. \tag{1125}$$

 Der Integrand im zweiten Summanden ist strikt positiv für alle $\tau \in (0, t)$ zu jedem fest vorgegeben $t > 0$, sodass wir $u(t) \geq u_0 \exp(t)$ für alle $t > 0$ erhalten, indem wir den Integralausdruck durch 0 nach unten abschätzen. Da $\lim_{t\to\infty}(u_0 \exp(t)) = \infty$ für $u_0 > 0$, gilt also auch $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ im Falle $u_0 > 0$.

Insgesamt ist damit die Behauptung verifiziert.
(c) Wir sollen zeigen, dass ein $u_0 < 0$ existiert, sodass $\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty$. Wir

schreiben zunächst die Lösungsformel um

$$u(t) = u_0 + (u_0 e^t - u_0) + \int_0^t \frac{\exp(t-\tau)}{1+\tau} d\tau \tag{1126}$$

$$= u_0 + \int_0^t u_0 e^{t-\tau} d\tau + \int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau \tag{1127}$$

$$= u_0 + \int_0^t \frac{u_0 \tau e^{t-\tau} + (u_0+1) e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau. \tag{1128}$$

Wir setzen nun $u_0 = -1$ und finden zunächst

$$u(t) = -1 - \int_0^t \frac{\tau e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau. \tag{1129}$$

Wir schätzen das Integral wiederum ab

$$\int_0^t \frac{\tau e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau \geq \int_1^t \frac{\tau e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau \geq \frac{1}{2} \int_1^t e^{t-\tau} d\tau = \frac{e^{t-1}-1}{2}. \tag{1130}$$

In der Abschätzung haben wir im ersten Schritt verwendet, dass für $t > 0$ die Integrandenfunktion strikt positiv ist und dass das Integral monoton fällt, wenn wir das Integrationsintervall auf ein (echtes) Teilintervall einschränken. Im zweiten Schritt haben wir verwendet, dass $1 + \tau \leq 2$ für $\tau \geq 1$, um den Nenner nach oben abzuschätzen. Das verbleibende Integral war dann für alle endlichen $t \geq 1$ elementar berechenbar. Damit finden wir für $t \geq 1$

$$u(t) \leq -1 - \frac{e^{t-1}-1}{2} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty. \tag{1131}$$

Somit erfüllt $u_0 = -1$ die Anforderung, dass $\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty$.
(d) Wir sollen nun zeigen, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}^-$ gibt, sodass für alle $u_0 < \alpha$ gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty$ und für alle $u_0 > \alpha$ $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} u(t) = \alpha$ für $u_0 \in \mathbb{R}$. Aus der Teilaufgabe (c) sehen wir, dass $\alpha \in (-1, 0)$ erforderlich ist. Wir definieren dieses α durch die Forderung

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{\alpha \tau e^{t-\tau} + (\alpha+1) e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau = 0, \tag{1132}$$

denn für alle endlichen $t > 0$ finden wir ein $A = A(t) \in (-1, 0)$, sodass

$$F(A, t) \equiv \int_0^t \frac{A \tau e^{t-\tau} + (A+1) e^{t-\tau}}{1+\tau} d\tau = 0, \tag{1133}$$

da der links stehende Ausdruck eine stetig differenzierbare Funktion F in $A \in [-1, 0]$ definiert für alle festen endlichen $t \geq 0$. Da $F[A = -1, t] < 0$ analog zu der Abschätzung in (c) und $F[A = 0, t] > 0$ analog zu der Abschätzung in Teil (b), Fall 1, liefert uns der Zwischenwertsatz für stetige Funktion, die Existenz eines $A = A(t)$ wie beschrieben. Da F ferner sogar in t stetig differenzierbar ist und für alle endlichen t gilt $A(t) \in (-1, 0)$ als Lösung von $F(A, t) = 0$, gilt auch $\alpha \equiv \lim_{t\to\infty} A(t) \in (-1, 0)$.

Die Eigenschaften für die $u_0 < \alpha$ bzw. $u_0 > \alpha$ folgen unmittelbar aus der Definition von α. Explizit ist dann

$$\alpha = -\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \frac{\exp(t-\tau)}{1+\tau} d\tau}{\int_0^t \exp(t-\tau) d\tau} = -\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \frac{\exp(-\tau)}{1+\tau} d\tau}{\int_0^t \exp(-\tau) d\tau} = \frac{\int_0^\infty \frac{\exp(-\tau)}{1+\tau} d\tau}{\int_0^\infty \exp(-\tau) d\tau}. \tag{1134}$$

Mit anderen Worten handelt es sich bei α um den Erwartungswert $\langle (1+X)^{-1} \rangle_{X \sim \mathrm{Exp}(1)}$.
□

Aufgabe 86 (H19T1A5) Wir betrachten das zu dem in der Aufgabenstellung genannten, äquivalenten Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1135}$$

zusammen mit der Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Hierbei handelt es sich um ein Anfangswertproblem für ein ebenes und lineares, autonomes System. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme garantiert uns nun die Eindeutigkeit und Existenz einer maximalen Lösung $(\lambda, \mu) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\lambda(t), \mu(t))$, sodass $(\lambda(0), \mu(0)) = (x_0, y_0)$. Aus dem angegebene System ergibt sich induktiv, dass die gesuchte Lösung sogar für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ glatt ist. Indem wir beide Komponenten des Systems nach t differenzieren, erhalten wir $x'' = y'$ und $y'' = x'$, in die wir die beiden Gleichungen des ursprünglichen System einsetzen können. Das liefert uns $x'' - x = 0$ und $y'' - y = 0$. Zudem haben wir die beiden Anfangsbedingungen $x'(0) = y(0) = y_0$ und $y'(0) = x(0) = x_0$ zusätzlich zu $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$. Wir erkennen in $x'' - x = 0$ und $y'' - y = 0$ den hyperbolischen Oszillator und finden

$$x(t) = x_0 \cosh(t) + y_0 \sinh(t) \ \&\ y(t) = y_0 \cosh(t) + x_0 \sinh(t). \tag{1136}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $x'(t) = y_0 \cosh(t) + x_0 \sinh(t) = y(t)$ und $y'(t) = x_0 \cosh(t) + y_0 \sinh(t) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und zudem $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$. Damit haben wir eine und somit die Lösung des Anfangswertproblems gefunden. Sei im Folgenden $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems zum Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt für beliebiges reelles t

$$\begin{aligned} x(t)^2 - y(t)^2 &= (x_0 \cosh(t) + y_0 \sinh(t))^2 - (y_0 \cosh(t) + x_0 \sinh(t))^2 \\ &= x_0^2 \cosh(t)^2 + y_0 \sinh(t)^2 + 2x_0y_0 \sinh(t)\cosh(t) \\ &- x_0 \sinh(t)^2 - y_0^2 \cosh(t)^2 - 2x_0y_0 \sinh(t)\cosh(t) \\ &= x_0^2(\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2) - y_0^2(\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2) \\ &= x_0^2 - y_0^2, \end{aligned}$$

unter Verwendung des hyperbolischen "Pythagoras". Wir stellen somit fest, dass $x(t)^2 - y(t)^2$ eine Erhaltungsgröße ist und die gesuchte Funktion $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $C(x_0, y_0) = x_0^2 - y_0^2$ gegeben ist.
Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- =: Q_3$. Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = (y^2+1)/2xy$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = x_0$. Wir sollen zeigen, dass diese eine Lösung hat. Hierzu beachten wir, dass Q_3 wegen $(x_0, y_0) \in Q_3$ nicht-leer ist, als kartesisches Produkt zweier offener und nichtleerer, halbunendlicher Intervalle selbst eine

offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und als kartesisches Produkt zweier Intervalle selbst zusammenhängend ist. Wir definieren die Funktion $f : Q_3 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (y^2 + 1)/(2xy)$. Diese ist auf ganz Q_3 stetig und ferner ist f stetig partiell nach y differenzierbar, also lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument. Zusammen mit $(x_0, y_0) \in Q_3$ liefert uns der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}^-$ hat, wobei $I \subseteq \mathbb{R}^-$ und $x_0 \in I$. Diese bestimmen wir durch Separation der Variablen. Dazu formen wir die Differentialgleichung in eine Integralgleichung um

$$\int_{y_0}^{y} \frac{2y' dy'}{1 + y'^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'}. \tag{1137}$$

Ausführen der Integrale liefert

$$\ln \left| \frac{1 + y(t)}{1 + y_0^2} \right| = \ln \left| \frac{x}{x_0} \right|. \tag{1138}$$

Da $(x, y(x)) \in Q_3$ gefordert wird,

$$\ln \left(\frac{1 + y(x)}{1 + y_0^2} \right) = \ln \left(\frac{x}{x_0} \right). \tag{1139}$$

Verkettung mit der Exponentialfunktion von außen liefert

$$\frac{1 + y(x)^2}{1 + y_0^2} = \frac{x}{x_0}. \tag{1140}$$

Auflösen nach $y(t)^2$ resultiert in

$$y(x)^2 = \frac{x}{x_0}(1 + y_0^2) - 1. \tag{1141}$$

Da wir $y(x) < 0$ fordern müssen, finden wir $y(x) = -\sqrt{x(1 + y_0^2)/x_0 - 1}$. In der Tat ist $y(x_0) = -\sqrt{y_0^2} = -|y_0| = y_0$, da $y_0 < 0$. Zudem gilt für alle $x < 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} \frac{(1 + y_0^2)/x_0}{\sqrt{x/x_0(1 + y_0^2) - 1}} = \frac{1}{2} \frac{x/x_0(1 + y_0^2) - 1 + 1}{2x(-\sqrt{x/x_0(1 + y_0^2) - 1})} = \frac{1 + y(x)^2}{2xy(x)}, \tag{1142}$$

d.h., das gefundene y ist tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung. Der Ausdruck unter der Wurzel ist definiert, solange $x > x_0/(1 + y_0^2)(< 0)$. Damit können wir die maximale Lösung angeben:

$$\lambda : \mathbb{R}^- \supset (x_0/(1 + y_0^2), 0) \to \mathbb{R}^-, x \mapsto -\sqrt{x(1 + y_0^2)/x_0 - 1}. \tag{1143}$$

Es ist klar, dass $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{dist}(\partial Q_3, (x, \lambda(x))) = 0$, sodass das angebene Intervall $I = (x_0/(1 + y_0^2), 0)$ auf jeden Fall maximal bzgl. der obere Intervallgrenze ist laut Satz über die Charaktersierung maximaler Lösungen anhand des Randverhaltens. Es gilt zudem $\lim_{x \downarrow x_0/(1+y_0^2)} y(x) = 0$, sodass $\lim_{x \downarrow x_0/(1+y_0^2)} \operatorname{dist}(\partial Q_3, (x, \lambda(x))) = 0$. Somit ist I auch maximal bzgl. der unteren Intervallgrenze laut Satz über die Charakterisierung maximaler Lösungen anhand ihres Randverhaltens. Somit haben wir mit λ die gesuchte maximale Lösungen aufgefunden. $\square$

Aufgabe 87 (F14T3A5) Gegeben sei die Matrix $\mathrm{Mat}(3\times 3,\mathbb{R}) \ni A$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1144}$$

und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (1,0,0)^T$. b ist als konstante Abbildung stetig.
(a) Wir sollen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $x' = Ax$ bestimmen. Laut Vorlesung ist dieses durch die Spaltenvektoren von $\exp(tA)$ definiert. Um das Matrix-Exponential berechnen zu können, bestimmen wir die Eigenwerte von A. Dazu benötigen wir die Nullstellen des charakterischen Polynoms $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(z) &= \det\left(\begin{pmatrix} -z & 1 & 2 \\ 1 & -z & 1 \\ 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix}\right) \\ &= (-1)^{3+3}(1-z)\det\left(\begin{pmatrix} -z & 1 \\ 1 & -z \end{pmatrix}\right) \\ &= -(z-1)^2(z+1), \end{aligned} \tag{1145}$$

wobei wir die Laplace'schen Entwicklungssatz angewendet haben. Damit sehen wir, dass χ_A die einfache Nullstelle $z = -1$ und die doppelte Nullstelle $z = +1$ hat. Wir bestimmen nun die, ggf. verallgemeinerten, Eigenvektoren zu jedem der Eigenwerte -1 bzw. $+1$. Zumindest können wir, da das charakteristische Polynom in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$ zerfällt, A über $\mathbb{R}$ in Jordan-Normalform bringen.

- *Nullstelle* $z = -1$. Die Eigenvektoren sind gegeben durch $(A + E_3)v = 0$. Wir lösen das zugehörige Lineare Gleichungssystem mit dem Gauss-Verfahren.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}. \tag{1146}$$

  Damit sehen wir, dass $\ker(A+E_3) = \mathbb{R}\cdot(1,-1,0)^T$ und dass $v = (1,-1,0)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $z = -1$ ist. Dies ist auch der einzige, da $z = -1$ ein Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit 1 ist.

- *Nullstelle* $z = 1$. Die Eigenvektoren sind gegeben durch $(A - E_3)v = 0$. Wir lösen das zugehörige lineare Gleichungssystem mit dem Gauss-Verfahren.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \tag{1147}$$

  Damit sehen wir, dass wir zwei Eigenvektoren $v_1 = (0,-2,1)^T$ und $v_2 = (-1,0,1)^T$ haben, denn $\ker(A-E_3) = \mathbb{R}\cdot\{(0,-2,1)^T, (-1,0,1)^T\}$. Insbesondere gibt es zwei Eigenvektoren zum Eigenwert 1, sodass A sogar diagonalisierbar ist.

Sei $D = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$ die Diagonalmatrix, zu der A ähnlich ist. Laut Vorlesung gilt mit der Transformationsmatrix $T = (v_1, v_2, v)$, dass

$$\exp(tM) = T\exp(tD)T^{-1} \tag{1148}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1149}$$

Wir berechnen die in der Formel auftauchende inverse Matrix

$$\begin{array}{ccc|ccc}
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2
\end{array} \tag{1150}$$

Damit finden wir also

$$\begin{aligned}
\exp(tM) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\exp(t) & -\exp(t) & -\exp(t) \\ \exp(t) & \exp(t) & 2\exp(t) \\ 2\exp(-t) & \exp(-t) & 2\exp(-t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^t & e^{-t} - e^t & 2e^{-t} - 2e^t \\ e^t - 2e^{-t} & 2e^t - e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das gesuchte Fundamentalsystem ist dann laut Vorlesung durch die Spaltenvektoren von $\exp(tM)$ gegeben, genauer wird dieses Fundamentalsystem durch die Funktion

$$\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (2e^{-t} - e^t, e^t - 2e^{-t}, 0)^T \tag{1151}$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (e^{-t} - e^t, 2e^t - e^{-t}, 0)^T \tag{1152}$$

$$\Phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (2e^{-t} - 2e^t, 2e^t - 2e^{-t}, e^t)^T \tag{1153}$$

gebildet.
(b) Wir lösen nun das Anfangswertproblem $x' = Ax + b(t)$ zu der Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Laut Vorlesung ist die gesuchte Lösung dann gegeben durch die

Duhamelsche Formel

$$x(t) = \int_0^t \exp((t-\tau)M)b(\tau)\,d\tau, \tag{1154}$$

wobei wir gleich $x(0) = 0$ gesetzt haben. Wir finden durch Ausführen der Matrix-Vektor-Multplikation im Integranden

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{\tau-t} - e^{t-\tau} \\ e^{t-\tau} - 2e^{\tau-t} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 2-(-1)-(2e^{-t}-(-e^{t})) \\ -1-2-(-e^{t}-2e^{-t}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-2\exp(-t)+\exp(t) \\ \exp(t)+2\exp(-t)-3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1155}$$

□

Aufgabe 88 (H19T2A1) (a) Wir sollen die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ bestimmen, für die die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k} \tag{1156}$$

konvergiert. Wir definieren zu diesem Zweck die neue Variable $w = 1/(z-1)$ und schreiben die Reihe um,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w^k. \tag{1157}$$

Aus dem Wurzelkriterium sehen wir, dass die Reihe konvergiert, falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n w^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w|^n} = \limsup_{n\to\infty} |w| = |w| < 1$. Somit konvergiert die Reihe absolut in der w-Ebene, falls $w \in B_1(0)$, bzw., absolut in der z-Ebene falls $z \in K_{1,\infty}(1) := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z-1| < \infty\}$. Der Grenzwert ist in diesem Fall

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w^k = \frac{1}{1-(-w)} = \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{z-1}{z}. \tag{1158}$$

Für $z \in \partial B_1(1)$ hingegen konvergiert die angegebene Reihe nicht, denn es ist bekannt, dass die geometrische Reihe nur für $|(-1)w| = |w| < 1$ konvergiert.
(b) Gesucht ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x' = -x^2$ mit $x(1) = -2$. Wir sehen zunächst, dass die Differentialgleichung eine vom Differentiationsparameter unabhängige rechte Seite hat, also autonom ist. Zudem ist definiert die rechte Seite die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto -x^2$. Diese ist infolge der stetigen Differenzierbarkeit im zweiten Argument lokal Lipschitz-stetig

in x. Da $\mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist und $(1,-2) \in \mathbb{R}^2$ garantiert uns der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems, wobei $1 \in I$, I offen und maximal und $\lambda(1) = -2$. Wir finden diese Lösung durch Separation der Variablen,

$$\int_{-2}^{\lambda(t)} \frac{dx}{-x^2} = \int_1^t d\tau \Rightarrow \frac{1}{\lambda(t)} - \frac{1}{(-2)} = t - 1. \tag{1159}$$

Wir formen der letzten Ausdruck um,

$$\frac{1}{\lambda(t)} = t - \frac{3}{2}. \tag{1160}$$

Für $t < 3/2$ ist die rechte Seite auf $(-\infty, 3/2)$ erklärt und hat dort keine Nullstellen. Das erlaubt uns den Kehrwert der Ausdrücke auf beiden Seiten zu betrachten,

$$\lambda(t) = \frac{1}{t - \frac{3}{2}}. \tag{1161}$$

Die Umformungen erforderten, dass $\lambda : (-\infty, 3/2) \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda(t)$ gesetzt wird. Wir verifizieren, dass es sich hierbei um eine Lösung der Differentialgleichung handelt. Es gilt

$$\lambda'(t) = -\frac{1}{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2} = -\lambda(t)^2 \tag{1162}$$

für beliebiges $t \in (-\infty, 3/2)$. Zudem ist $1 \in I = (-\infty, 3/2)$ und es gilt $\lambda(2) = 1/(1-3/2) = -2$, d.h., das gefundene λ befriedigt die Anfangsbedingung. Zum Nachweis der Maximalität beachten wir, dass I bereits die untere Intervallgrenze $-\infty$ hat, also nach dem Charakterisierungssatz maximaler Lösungen anhand ihres Randverhaltens bzgl. der unteren Intervallgrenze maximal ist. Zudem ist $\limsup_{t\to 3/2} |\lambda(t)| = \infty$, da λ bei $t = 3/2$ eine Polstelle erster Ordnung hat. Der Satz über die Charakterisierung maximaler Lösungen anhand ihres Randverhaltens liefert uns also, dass I auch bzgl. der oberen Intervallgrenze das maximale Existenzintervall der Lösung des angegebenen Anfangswertproblems ist. Somit ist $\lambda : I \to \mathbb{R}, t \mapsto 1/(t - 3/2)$ mit $I = (-\infty, 3/2)$ tatsächlich die maximale Lösung des Anfangswertproblems.
(c) Wir sollen alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' - 2y = \cos(2t)$ bestimmen. Bei dieser handelt es sich um eine skalare und lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und ganz $\mathbb{R}$ definierter stetiger rechter Seite. Somit ist der Lösungsraum ein eindimensionaler affiner Raum $\mathcal{L} = y_p + \mathcal{L}_h$ von einmal stetig differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. y_p bezeichnet hierbei eine Lösung des inhomogenen Problems, und $\mathcal{L}$ ist der laut Vorlesung eindimensionale Vektorraum der Lösungen des homogenen Problems. Wir lösen zunächst das homogene Problem: $y_h' = 2y_h$. Es ist leicht zu sehen, dass $y_h(t; c) = c\exp(2t)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine globale Lösung des homogenen Problems ist. Für eine spezielle Lösung

y_p des inhomogenen Problems schreiben wir mithilfe Variation der Konstanten

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \int_0^t d\tau \exp(2(t-\tau))\cos(2\tau) \\
&= \exp(2t)\Re\left[\int_0^t d\tau \exp((-2+2i)\tau)\right] \\
&= \exp(2t)\Re\left[\frac{\exp(-2t+2it)-1}{-2+2i}\right] \\
&= \exp(2t)\Re\left[\frac{(\exp(-2t)\cos(2t)-1)+i\exp(-2t)\sin(2t)}{-2+2i}\right] \\
&= \exp(2t)\frac{(\exp(-2t)\cos(2t)-1)(-2)+2\exp(-2t)\sin(2t)}{8} \\
&= \frac{\sin(2t)-\cos(2t)+\exp(2t)}{4}.
\end{aligned}$$

Es ist unbeachtlich, dass y_p so gewählt wurde, dass $y_p(0)=0$, denn wir benötigen laut Vorlesung lediglich eine Lösung des inhomogenen Problems. Zusammenfassend ist also eine Lösung y des vollen Problems von der Form

$$y(t;c) = \frac{\sin(2t)-\cos(2t)+\exp(2t)}{4} + c\cdot\exp(2t), \tag{1163}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ die Lösung eindeutig festlegt, sobald eine Anfangsbedingung für y spezifiziert ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich tatsächlich alle Lösungen in der obenstehenden Form ausdrücken lassen. □

Aufgabe 89 (H19T3A4) (a) Gesucht sind alle Lösungen $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der homogenen reellen Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0. \tag{1164}$$

Die zugehörigen charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2+2\lambda+2=0$. Sie hat die beiden Nullstellen

$$\lambda_\pm = \frac{-2\pm 2i}{2}. \tag{1165}$$

Beide Nullstellen sind einfache Nullstellen, somit sind die vermöge $t\mapsto \exp(\mu t)$ für $\mu\in\{\lambda_+,\lambda_-\}$ definierten Lösungen laut Vorlesung linear unabhängig. Wir finden also zwei linear unabhängige, komplexwertige Lösungen

$$Y_+ : \mathbb{R}\to\mathbb{C}, t\mapsto \exp(-t)\exp(it) \ \&\ Y_- : \mathbb{R}\to\mathbb{C}, t\mapsto \exp(-t)\exp(-it). \tag{1166}$$

Zwei reellwertige, linear unabhängige Lösungen erhalten wir durch $y_+ \equiv 1/2[Y_+ + Y_-]$ und $y_- \equiv 1/(2i)[Y_+ - Y_-]$ bzw. explizit

$$y_+ : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto \exp(-t)\cos(t) \ \&\ y_- : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto \exp(-t)\sin(t). \tag{1167}$$

Laut Vorlesung ist der Lösungsraum einer linearen Differentialgleichung der Ordnung 2 mit reellen Koeffizienten ein zweidimensionaler reeller Vektorraum. Da wir zwei linear unabhängige, reelwertige Lösungen gefunden haben, haben wir somit bereits eine Basis der Lösungsraum gefunden. Also kann jede Lösung $y(.;c_1,c_2):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der Differentialgleichung in der Form

$$y(t;c_1,c_2)=\exp(-t)(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \tag{1168}$$

dargestellt werden, wobei $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können.
(b) Wir sollen nun alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $y''+2y'+2y=15\exp(t)$ bestimmen. Laut Vorlesung ist der Lösungsraum $\mathcal{L}$ ein affiner Unterraum des Vektorraums der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, genauer $\mathcal{L}=y_p+\mathcal{L}_h$, wo y_p eine Lösung des inhomogenen Problems und $\mathcal{L}_h$ den Lösungs(vektor)raum des homogenen Problems bezeichnet. Letzterer ist mithilfe von (a) als $\mathbb{R}\cdot y_+\oplus\mathbb{R}y_-$ bekannt. Wir setzen an $y_p(t)=C\exp(t)$. Einsetzen liefert

$$(1+2\cdot 1+2)C\exp(t)=15\exp(t), \tag{1169}$$

sodass wir durch Wahl von $C=3$ eine Lösung des inhomogene Problems erhalten. Infolge der eingangs gemachten Bemerkungen lässt sich also jede Lösung $y(.;c_1,c_2):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ des inhomogenen Problems in der Form

$$y(t;c_1,c_2)=3\exp(t)+\exp(-t)(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \tag{1170}$$

schreiben, wo $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ und aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können.
(c) Wir sollen zeigen, dass es genau eine holomorphe Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ gibt, sodass $f''(z)+2f'(z)+2f(z)=15\exp(z)$ und $f(0)=3$ sowie $f'(0)=2$ und die bestimmen. Angenommen, $f_1,f_2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ wären zwei verschiedene Funktionen, die das Anfangswertproblem auf $\mathbb{C}$ erfüllen. Dann gilt $f_1-f_2\neq 0$, wo 0 die Nullfunktion bezeichnet. Zudem löst $f\equiv f_1-f_2$ die Differentialgleichung $f''+2f'+2f=0$ zusammen mit den Anfangsbedingungen $f(0)=0$ und $f'(0)$. Die Einschränkung $g\equiv f|_{\mathbb{R}}$ löst dann die in (a) betrachtete Differentialgleichung $g''(t)+2g'(t)+2g(t)=0$ auf $\mathbb{R}$ mit den Anfangsbedingungen $g(0)=0$ und $g'(0)=0$. Das ist nur möglich, wenn $g(t)=0$, d.h., $f|_{\mathbb{R}}$ die Nullfunktion (auf $\mathbb{R}$) ist. Da $\mathbb{C}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist, $\mathbb{R}$ offensichtlich eine nicht-diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist ($1/n\in\mathbb{R}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}\ni 0=\lim_{n\to\infty}(1/n)$), liefert uns der Identitässatz, dass $f|_{\mathbb{R}}=0\Rightarrow f=0$ auf $\mathbb{C}$. Das ist aber ein Widerspruch zur vorausgestezten Verschiedenheit von f_1 und f_2. Damit war die Annahme, $f_1\neq f_2$ falsch. Wir arbeiten nun wieder mit den Bezeichnungen den Aufgabenstellung. Es gibt also genau eine Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, die das komplexe Anfangswertproblem löst. Um dieses f nun zu bestimmen, bemerken wir, dass $h:=f|_{\mathbb{R}}$ die in (b) betrachtete Differentialgleichung löst, insbesondere also die Wahl einer reellwertigen Lösung möglich ist, denn $h(0)=3\in\mathbb{R}$ und $h'(0)=2\in\mathbb{R}$. h kann nach (b) also als

$$h(t)=3\exp(t)+\exp(-t)(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \tag{1171}$$

geschrieben werden. De Konstanten $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ folgen aus den Anfangsbedingungen. Aus $h(0)=3$ folgt direkt $c_1=0$. Ableiten von h und Inspektion von $h'(t=0)=2$ liefert

$$2=3\exp(0)+c_2\exp(-0)\cos(0), \tag{1172}$$

also $c_2 = -1$. Damit finden wir

$$h(t) = 3\exp(t) - \exp(-t)\sin(t), \tag{1173}$$

sodass erneute Anwendung des Identitässatz analog zum Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems auf $\mathbb{C}$ liefert, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch $f(z) = 3\exp(z) - \exp(-z)\sin(z)$. □

Aufgabe 90 (F16T3A5) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1174}$$

(a) Zu bestimmen ist das Fundamentalsystem $\exp(At)$. Zur Berechnung des Matrixexponentials bestimmen wir die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$,

$$\begin{aligned} \chi_A(z) &= \det\left(\begin{pmatrix} -1-z & 1 & -1 \\ 0 & -z & -1 \\ 1 & -1 & -1-z \end{pmatrix}\right) && (1175) \\ &= (-z)(-1-z)^2 - 1 - z + (1+z) && (1176) \\ &= (-z)(-1-z)^2 && (1177) \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms gegeben durch $z = 0$ und $z = -1$, ersteres ist eine einfache Nullstelle und $z = -1$ ist eine zweifache Nullstelle. Da χ_A über $\mathbb{R}$ separabel ist, wissen wir, dass A zumindest eine reelle Jordan-Normalform hat. Wir bestimmen also Eigenwerte und Eigenvektoren

- *Fall 1* $z = 0$. Der gesuchte Eigenvektor v ist $0 \neq v \in \ker(A)$, woraus wir unmittelbar $v = (1,1,0)^T$ als mögliche Wahl des Eigenvektors bekommen.

- *Fall 2* $z = -1$. In diesem Fall lösen wir das lineare Gleichungssystem $(A + 1E_3)v = 0$ für $v \in \mathbb{R}^3$ und bekommen so $\ker(A + E_3)$.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}. \tag{1178}$$

  Damit ist $0 \neq v = (1,1,1)^T \in \ker(A+E_3)$ und $\mu_g(A, z = -1) = 1 < \mu_a(A, z = -1) = 2$. Damit ist A nicht diagonalisierbar und wir müssen die Jordan-Normalform berechnen. Zunächst gilt

$$(A+E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1179}$$

Somit finden wir, dass $v_1 = (1,1,1)^T \in \ker(A+E_3)^2$ und $v_2 = (2,1,0) \in \ker(A+E_3)^2$. Da $v_1 \in \ker(A+E_3)$, bauen wir die Jordan-Kette ausgehend von $w_2 = (2,1,0)^T$ auf. Es gilt

$$w_1 = (A+E_3)w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1180}$$

Die Jordan-Normalform J_A von A lautet also

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ so, dass } TJ_AT^{-1} = A, \tag{1181}$$

wo $T = (w_1, w_2, v)$. Wir bestimmen T^{-1},

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1
\end{array}. \tag{1182}$$

Somit ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1183}$$

Nun können wir das Matrix-Exponential berechnen,

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= T\exp(J_At)T^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-t) & t\exp(-t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\exp(-t) & -t\exp(-t) & \exp(-t) \\ \exp(-t) & -\exp(-t) & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t\exp(-t) + 2\exp(-t) - 1 & -t\exp(-t) - 2\exp(-t) + 2 & \exp(-t) - 1 \\ t\exp(-t) + \exp(-t) - 1 & -t\exp(-t) - \exp(-t) + 2 & \exp(-t) - 1 \\ t\exp(-t) & -t\exp(-t) & \exp(-t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das ist das gesuchte Fundamentalsystem $\exp(At)$.
(b) Wir sollen nun die Lösung des Anfangswertproblems $x' = Ax$ mit $x(1) = (1,0,0)^T$ bestimmen. Nach der Lösungsformel für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten ist die gesuchte Lösung gegeben durch

$$x(t) = \exp(A(t-1))x(1) = \begin{pmatrix} (t-1)\exp(-(t-1)) + 2\exp(-(t-1)) - 1 \\ (t-1)\exp(-(t-1)) + \exp(-(t-1)) - 1 \\ (t-1)\exp(-(t-1)) \end{pmatrix}. \tag{1184}$$

(c) Wir sollen zeigen, dass die Ruhelage $(0,0,0)^T$ stabil ist. Dazu bemerken wir, dass für jeden Eigenwert λ von A gilt $\Re[\lambda] \leq 0$. Falls $\Re[\lambda] = 0$, also wenn wir die Eigenwert $z = 0$ von A betrachten, stimmen geometrischen und algebraische Vielfachheit überein, $\mu_a(A, z = 0) = \mu_g(A, z = 0)$. Für alle anderen Eigenwerte von A, also für $z = -1$, gilt $\Re[z] < 0$. Der Stabilitätssatz für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten sagt nun, dass die Ruhelage $(0,0,0)^T$ von $x' = Ax$ stabil ist. $\square$

Aufgabe 91 (H19T3A5) Sei $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$\begin{aligned} p :&(0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &(r,\phi) \mapsto f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\cos(\phi) + g(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\sin(\phi) \end{aligned} \tag{1185}$$

$$\begin{aligned} q :&(0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &(r,\phi) \mapsto r^{-1}(g(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\cos(\phi) - f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\sin(\phi)). \end{aligned} \tag{1186}$$

(a) Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \to (0,\infty) \times \mathbb{R}, t \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ eine Lösung von $r' = p(r,\phi)$, $\phi' = q(r,\phi)$. Wir zeigen, dass dann $\beta = (\beta_1, \beta_2) : I \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$ definiert durch $\beta_1(t) = \alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t))$ und $\beta_2(t) = \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))$ eine Lösung von $x' = f(x,y)$, $y' = f(x,y)$ ist. Zunächst gilt für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} \beta_1'(t) &= \alpha_1'(t)\cos(\alpha_2(t)) - \alpha_1(t)\alpha_2'(t)\sin(\alpha_2(t)) \\ &= f(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))\cos(\alpha_2(t))^2 \\ &\quad + g(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))\cos(\alpha_2(t))\sin(\alpha_2(t)) \\ &\quad - \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1(t)}\sin(\alpha_2(t)) g(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))\cos(\alpha_2(t)) \\ &\quad + \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1(t)}\sin(\alpha_2(t))^2 f(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))) \\ &= f(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))(\cos(\alpha_2(t))^2 + \sin(\alpha_2(t))^2) \\ &\quad - g(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))\,(\sin(\alpha_1(t))\cos(\alpha_2(t)) \\ &\quad - \sin(\alpha_1(t))\cos(\alpha_2(t))) \\ &= f(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))) \\ &= f(\beta_1(t), \beta_2(t)). \end{aligned}$$

Analog rechnet man nach

$$\begin{aligned}
\beta_2'(t) &= \alpha_1'(t)\sin(\alpha_2(t)) + \alpha_1(t)\alpha_2'(t)\cos(\alpha_2(t)) \\
&= f(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))\sin(\alpha_1(t))\cos(\alpha_2(t)) \\
&\quad + g(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))^2 \\
&\quad + \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1(t)} g(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))\cos(\alpha_2(t))^2 \\
&\quad - \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1(t)} f(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))\cos(\alpha_2(t)) \\
&= g(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t)))(\cos(\alpha_1(t))^2 + \sin(\alpha_2(t))^2) \\
&= g(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))) \\
&= g(\beta_1(t), \beta_2(t)).
\end{aligned}$$

Damit ist β wie behauptet eine Lösung des angegebenen Systems von Differentialgleichungen.
(b) Wir sollen nun das Anfangswertproblem $x' = f(x,y)$, $y' = f(x,y)$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y + x^3 + xy^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -y + x^2y + y^3$ lösen, wenn $x(0) = \sqrt{2}^{-1}$ und $y(0) = 0$. Wir sehen unmittelbar, dass das System von Differentialgleichungen autonom ist. Zunächst stellen wir fest, dass $\mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist und ferner $(f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als Vektorfeld mit multivariaten Polynomfunktion als Komponentenfunktionen sogar glatt, insbesondere also lokal Lipschitz-stetig ist. Damit können wir für ein vorgegebenes $(x(0), y(0)) = (\eta_x, \eta_y) \in \mathbb{R}^2$ den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf das so definierte Anfangswertproblem anwenden. Dieser liefert uns die Existenz einer eindeutig bestimmten maximalen Lösung $(\xi_x, \xi_y) : I \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems, die auf einem maximalen offenen Intervall I das Anfangswertproblem zum Anfangswert $(x(0), y(0)) = (\eta_x, \eta_y)$ löst. Für die Wahl $(\eta_x, \eta_y) = (0,0)$ sehen wir, dass es sich um eine Ruhelage des betrachteten Systems handelt. Somit ist $(x_0, y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (0,0)$ die eindeutig bestimmte und maximale Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems, denn (x_0, y_0) ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und löst dort das eben besprochene Anfangswertproblem. Zudem handelt es sich um die eindeutig bestimmte maximale Lösung für den Anfangswert $(x(\tau), y(\tau)) = (0,0)$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Da $(x(0), y(0)) = (\sqrt{2}^{-1}, 0) \neq (0,0)$ sehen wir, dass die zum Anfangswertproblem $x' = f(x,y), y' = g(x,y)$, $(x(0), y(0)) = (\sqrt{2}^{-1}, 0)$ gehörige maximale Lösung $(\xi_x, \xi_y) : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\xi_x(t), \xi_y(t))$, dass $(\xi_x(t), \xi_y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle t aus dem maximalen Existenzintervall I. Andernfalls finden wir ein $\tau \in \mathbb{R}$, sodass $(\xi_x(\tau), \xi_y(\tau)) = (0,0) = (x_0(\tau), y_0(\tau))$. Dann sind aber durch (x_0, y_0) und (ξ_x, ξ_y) wegen $(\xi_x(0), \xi_y(0)) = (\sqrt{2}^{-1}, 0) \neq (0,0)$ zwei verschiedene und maximal definierte Lösungen des Anfangswerproblems $x' = f(x,y), y' = f(x,y)$, $(x(\tau), y(\tau)) = (0,0)$ gegeben, was der Eindeutigkeit der maximalen Lösung des Anfangswertproblems infolge des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes widerspricht. Somit gilt also tatsächlich $(\xi_x(t), \xi_y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle $t \in I$. Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ebenfalls ein Gebiet ist, reicht es f und g auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ einzuschränken und das Anfangswertproblem auf D zu betrachte. Wir bezeichnen lax die angesprochenen Einschränkungen wieder mit f bzw. g. Damit haben (die neuen) f und g die für die

Definition von p, q gemäß Angabe notwendige Form. Es gilt dann

$$p(r,\phi) = r\sin(\phi)\cos(\phi) + r^3\cos(\phi)^2 - r\cos(\phi)\sin(\phi) + r^3\sin(\phi)^2 = r^3 \tag{1187}$$
$$q(r,\phi) = -\cos(\phi)^2 + r^2\sin(\phi)\cos(\phi) - \sin(\phi)^2 - r^2\sin(\phi)\cos(\phi) = -1 \tag{1188}$$

Wir setzen also wie in Teil (a) das System $r' = p(r,\phi) = r^3$ und $\phi' = q(r,\phi) = -1$ auf, wo $(r,\phi) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$. Es ist leicht nachzurechnen, dass die maximalen Lösungen jeweils durch $r(t) = 2/\sqrt{2r_0^{-2} - t}$ für die Wahl der Anfangswerte $r(t) = r_0 > 0$ und $\phi(t) = \phi_0 - t$ für $\phi(t) = \phi_0$ gegeben sind und wir für die maximale Lösung (r,ϕ) des Systems $I = (-\infty, \sqrt{2r_0^{-2}} > 0)$ fordern müssen wegen des Charakterisierungssatzes für maximale Lösungen anhand des Randverhaltens. Indem wir nun das in Teil (a) bewiesene Resultat bemühen, finden wir

$$\xi_x(t) = \frac{2\cos(\phi_0 - t)}{\sqrt{2r_0^{-2} - t}} \quad \xi_y(t) = \frac{2\sin(\phi_0 - t)}{\sqrt{2r_0^{-2} - t}} \tag{1189}$$

und bestimmen $2r_0^{-2} = 8$ sowie $\phi_0 = 0$ aus der Forderung, dass $(\xi_x(0), \xi_y(0)) = (0,0)$ also eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Dann gilt, dass

$$\xi = (\xi_x, \xi_y) : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(\frac{2\cos(t)}{\sqrt{8-t}}, \frac{-2\sin(t)}{\sqrt{8-t}}\right) \tag{1190}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems ist, die mit $I = (-\infty, 8)$ $0 \in I$ erfüllt und wegen des Charakterisierungssatzes zur Maximalität von Lösungen tatsächlich auch eine, und damit die, maximale Lösung des Anfangswertproblems ist. □

Aufgabe 92 (H13T3A2) Gegeben sei die lineare Differentialgleichung $x' = Ax$ mit $A \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$, sodass

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{1191}$$

Gesucht sind alle $a \in \mathbb{R}$, sodass es eine nicht-triviale Lösung $x(t)$ mit $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ gibt. Wir sehen zunächst, dass es sich um ein lineares System mit konstanten Koeffizienten handelt. Somit existiert zu jedem $\xi \in \mathbb{R}^3$ nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme eine eindeutig bestimmte Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems $x' = Ax, x(0) = \xi$. Wir bestimmen also das charakteristische Polynom $\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(A - zE_3)$ in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$. Es gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \chi_A(z) &= (-1-z)(1-z)(a-z) + a^2(a-z) \\ &= (z^2 - 1 + a^2)(a-z) \\ &= (z - \sqrt{1-a^2})(z + \sqrt{1-a^2})(a-z). \end{aligned}$$

Somit sind alle Eigenwerte von A, d.h., die Nullstellen von χ_A, in $\mathbb{C}$ einfach, es sei denn $|a| = 1$. A ist also diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ falls $a \in \mathbb{R} \setminus \{pm1\}$. Wir betrachten diesen Fall. Seien v_+, v_-, v_0 die zu $\sqrt{1-a^2}$, $-\sqrt{1-a^2}$ bzw. a korrespondierenden

Eigenvektoren. Falls $|a| < 1$, dann ist $-\sqrt{1-a^2} < 0$ und wir haben mit $x(t) = v_- \exp(-\sqrt{1-a^2}t)$ eine Lösung des Systems gefunden, die $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ erfüllt. Falls $a < -1$, dann haben wir mit $x(t) = v_0 \exp(at)$ ebenfalls eine Lösung gefunden, die die gewünschte Eigenschaft hat. Falls $a > 1$, dann ist $\pm\sqrt{1-a^2} \in i\mathbb{R}$, also rein imaginär, und $a > 1$. Da es $c_+, c_-, c_0 \in \mathbb{C}$ gibt, so dass sich jede reellwertige Lösung $x(t)$ in der Form $x(t) = c_+v_+ \exp(\sqrt{1-a^2}t) + c_-v_- \exp(-\sqrt{1-a^2}t) + c_0v_0 \exp(at)$ darstellen lässt und v_0, v_+, v_- paarweise orthogonal sind und ohne Einschränkung als normiert angenommen werden können, folgt $\|x(t)\| = |c_+|^2 + |c_-|^2 + |c_0|^2 \exp(2at)$, sodass $0 = \lim_{t\to\infty} \|x(t)\|$ nur für $c_+ = c_- = c_0 = 0$, d.h., die triviale Lösung erreicht werden kann. Für $a = -1$ ist zumindest -1 ein einfacher Eigenwert von A und eine nicht-triviale Lösung gegeben durch $x(t) = v_0 \exp(-t)$. Diese erfüllt $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$. Für $a = 1$ sehen wir, dass A keinen Eigenwert hat, der negativen Realteil hat. Somit gibt es keine nicht-triviale Lösung $x(t)$ mit der gewünschten Eigenschaft. Denn bezeichne mit v_1, v_2 eine Jordan-Basis von $A = A(a = 1)$ zum Eigenwert 0 und mit v_0 eine Jordan-Basis zum Eigenwert $+1 = a$, dann ist jede Lösung $x(t)$ von der Form $x(t) = c_1v_1 + c_2tv_2 + c_0v_0 \exp(t)$ für geeignete $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Hieraus sehen wir unmittelbar, dass $c_0 = c_2 = 0$ nötig ist, um $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ sicherzustellen. Da $\|v_1\| \neq 0$, brauchen wir zudem $c_1 = 0$, sodass $x(t) = 0$, d.h., die triviale Lösung ist. Insgesamt haben wir somit $a \in (-\infty, 1)$ und $(-\infty, 1) \subset \mathbb{R}$ ist gerade die Menge, die diejenigen Parameterwerte enthält, die die Anforderungen erfüllen. □

Aufgabe 93 (H19T3A1) (a) Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in keinem Punkt stetig ist. Dazu definieren wir

$$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} . \tag{1192}$$

Wir behaupten, dass χ für alle $a \in \mathbb{R}$ in a unstetig ist. Falls $a \in \mathbb{Q}$, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = a + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{Q}$, aber $x_n \notin \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\lim_{n\to\infty} \chi(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1 = \chi(a = \lim_{n\to\infty} x_n)$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, finden wir andererseits für jedes $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in (b - 1/n, b + 1/n) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$. Dies definiert uns eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Andererseits ist auch hier $\lim_{n\to\infty} \chi(y_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \chi(b = \lim_{n\to\infty} y_n)$. Damit ist χ nirgends auf $\mathbb{R}$ stetig.
(b) Es ist bekannt, dass $\mathbb{Q}$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist. Somit ist auch $\mathbb{Q}\cap[0, 1]$ eine Lebesgue-Nullmenge in $[0, 1]$. Betrachte nun $\chi|_{[0,1]}$. Da χ nirgends auf $\mathbb{R}$ stetig ist, ist auch $\chi|_{[0,1]}$ nirgends auf $[0, 1]$ stetig, insbesondere also unstetig. Andererseits ist $\chi|_{[0,1]}$ auch die charakteristische Funktion von $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, welche als Lebesgue-Nullmenge messbar bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes auf $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist. Somit gilt

$$\infty > 0 = \int_{[0,1]} \chi|_{[0,1]}\, d\lambda = \int_{[0,1]} |\chi|_{[0,1]}| d\lambda, \tag{1193}$$

wo λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $[0, 1]$ bezeichnet und die Nicht-Negativität von $\chi|_{[0,1]}$ auf $[0, 1]$ bemüht wurde. Somit ist $\chi|_{[0,1]} \in L^1([0, 1])$, also haben wir eine (Lebesgue-)intergierbare, unstetige Funktion gefunden. □

Aufgabe 94 (F18T3A2) (a) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x\exp(x-y^2)$. Gesucht sind Art und Lage aller lokalen Extrema von f. Wir beachten, dass f als Produkt der glatten Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x$ und der Komposition der jeweils glatten Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^t$ und der multivariaten Polynomfunktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x - y^2$ ebenfalls glatt ist. Sei nun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ als lokales Extremum vorausgesetzt. Nach dem notwendigen Kriterium für die Existenz lokaler Extrema ist dann $(\nabla f)(x,y) = (0,0)$. Es gilt $(\partial_x f)(x,y) = \exp(x-y^2) + x\exp(x-y^2) = (1+x)\exp(x-y^2)$ und $(\partial_y f)(x,y) = -2xy\exp(x-y^2)$. Da die Exponentialfunktion strikt positiv für alle (reellen) Werte ihres Arguments ist, reduziert sich die oben genannte notwendige Bedingung auf $0 = \partial_x f(x,y) \Leftrightarrow 0 = 1+x$ und $0 = \partial_y f(x,y) \Leftrightarrow 0 = 2xy$. Aus der ersten Gleichung finden wir $x = -1$, was uns nach Einsetzen in die zweite $y = 0$ liefert. Damit ist ein Extremum in $\{(-1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ enthalten. Wir wenden nun das hinreichende Kriterium an, das überdies die Klassifikation der Art der Extrema erlaubt. Hierzu bilden wir die Hesse-Matrix $\mathcal{H}(f)$. Diese ist, da f insbesondere zweimal stetig differenzierbar als glatte Funktion ist, symmetrisch, also diagonalisierbar:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x,y) & \partial_{x,y}^2 f(x,y) \\ \partial_{x,y}^2 f(x,y) & \partial_y^2 f(x,y) \end{pmatrix} \\ &= e^{x-y^2} \begin{pmatrix} 2+x & -2y(1+x) \\ -2y(1+x) & -2x+4xy^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1194}$$

Damit gilt am Kandidaten für das Extremum, $(x,y) = (-1,0)$, dass

$$\mathcal{H}(f)(-1,0) = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1195}$$

Da die zuletzt berechnete Hesse-Matrix bereits in Diagonalform vorliegt, können wir ihre Eigenwerte als die Diagonalelemente ablesen. Es gilt $0 < 1/e < 2/e$, sodass nach dem Eigenwertkriterium für positive Definitheit symmetrischer Matrizen die Hessematrix $\mathcal{H}(f)(-1,0)$ positiv definit ist. Damit hat f bei $(-1,0)$ ein lokales Minimum.

(b) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = 2xy$ und $\dot{y} = 1+x$. Wir sollen zeigen, dass alle stationären Lösungen stabil sind. Sei $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine stationäre Lösung des Differentialgleichungssystems. Dann gilt $2x_0y_0 = 0$ und $1 + x_0 = 0$. Also ist $(x_0,y_0) = (-1,0)$ die einzige stationäre Lösung des Systems. Wir beachten nun, dass f aus Teil (a) an der Stelle $(-1,0)$ ein lokales Minimum hat. Indem wir $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $V(x,y) = f(x,y) - f(-1,0)$ definieren, erreichen wir, dass $V(-1,0) = 0$ und $(-1,0)$ wiederum ein lokales Minimum vom V ist. Wir zeigen nun, dass V eine nicht-strikte Lypanuov-Funktion des Systems ist. Dazu beachten wir, dass für jede Lösung $(\lambda,\mu) : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\lambda(t),\mu(t))$ des obenstehenden Differentialgleichungssystems gilt $\langle \nabla V(x = \lambda(t), y = \mu(t)), (\dot{\lambda}(t), \dot{\mu}(t)) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \exp(\lambda(t) - \mu(t)^2)((1+\lambda(t))2\lambda(t)\mu(t) - 2\lambda(t)\mu(t)(1+\lambda(t))) = 0 \leq 0$ für alle $t \in I$, dem, ohne Einschränkung maximalen Existenzintervall von der Lösung (λ,μ). Die Minimumseigenschaft von $(-1,0)$ erlaubt nun, mit dem ersten Stabilitätskriterium von Lyapunov zu folgern, dass $(-1,0)$ eine stabile Ruhelage des betrachteten ebenen Systems ist. $\square$

Aufgabe 95 (H10T2A4) Gegeben sei das System $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_1$ in der Ebene. Wir behaupten, dass $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ ein erstes Integral ist. Offenbar ist E als Polynomfunktion in zwei Variablen stetig differenzierbar. Beim vorliegenden System handelt es sich um ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zu jedem Anfangswert $(x_1(0), x_2(0)) = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ existiert also nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung $(\lambda, \mu) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Nun gilt $d_t(E \circ (\lambda, \mu))(t) = \langle \nabla E(\lambda(t), \mu(t)), (d_t\lambda(t), d_t\mu(t))\rangle = \langle (2\lambda(t), -2\mu(t)), (\mu(t), \lambda(t))\rangle = 2\lambda(t)\mu(t) - 2\lambda(t)\mu(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei wir verwendet haben, dass $\dot{\lambda}(t) = \mu(t)$ und $\dot{\mu}(t) = \lambda(t)$ für die Lösung (λ, μ) gilt. Somit ist E längs jeder Lösung konstant. Damit ist E ein erstes Integral, wie behauptet.$\square$

Aufgabe 96 (H19T1A2) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) := x^2y + y^2x - xy$. f ist als Polynomfunktion in zwei Variablen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.
(a) Wir bestimmen zunächst die Menge der kritischen Punkte $\mathrm{Krit}(f)$. Es gilt $(x_0, y_0) \in \mathrm{Krit}(f) :\Leftrightarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$. Das bedeutet $0 = \partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0y_0 + y_0^2 - y_0$ und $\partial_y f(x_0, y_0) = x_0^2 - x_0 + 2x_0y_0$. Wir sehen, dass beide Gleichungen für $(x_0, y_0) = (0,0)$ erfüllt sind. Sei im folgenden zunächst $x_0 \neq 0, y_0 = 0$ angenommen. Dann ist $\partial_x f(x_0, y_0) = 0 = 2x_0y_0 + y_0^2 - y_0$ erfüllt für alle x_0 und $0 = \partial_y f(x_0, y_0)$ erfordert $x_0^2 - x_0 = 0$, was nur für $x_0 = 1$ wegen $x_0 \neq 0$ möglich ist. Also ist $(1,0) \in \mathrm{Krit}(f)$. Analog sehen wir, dass für $x_0 = 0$ und $y_0 \neq 0$ nur noch $(0,1) \in \mathrm{Krit}(f)$. Zuletzt sei $x_0 \neq 0$ und $y_0 \neq 0$ vorausgesetzt. Dann ist aus Gleichung $0 = \partial_x f(x_0, y_0)$, dass $0 = y_0(y_0 + 2x_0 - 1)$ und zusätzlich aus $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$, dass $0 = x_0(x_0 + 2x_0 - 1)$, sodass wir wegen $x_0 \neq 0$ und $y_0 \neq 0$ das lineare Gleichungssystem $y_0 + 2x_0 = 1$ und $x_0 + 2y_0 = 1$ lösen müssen. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert nun $x_0 = y_0$, sodass wir durch Einsetzen in die erste Gleichung $(x_0 = 1/2, y_0 = 1/3)$ erhalten. Damit finden wir für die Menge der kritischen Punkte von f, dass

$$\mathrm{Krit}(f) \subseteq \{(0,0), (0,1), (1,0), (1/3, 1/3)\} \tag{1196}$$

und man verifiziert durch Einsetzen, dass es sich hierbei tatsächlich um kritische Punkte handelt, d.h., Gleichheit gilt. Wir berechnen nun für die Entscheidung, ob es sich um Extrema handelt, die Hesse-Matrix von f. Diese ist infolge $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ symmetrisch.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x,y) & \partial_{x,y}^2 f(x,y) \\ \partial_{y,x}^2 f(x,y) & \partial_y^2 f(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1197}$$

- *Fall* $(x,y) = (0,0)$.

$$\mathcal{H}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1198}$$

Die Eigenwerte von $\mathcal{H}(f)(0,0)$ sind aus $0 = \det(\mathcal{H}(f)(0,0) - \lambda E_2)$ zu $\lambda \in \{-1,+1\}$ bestimmbar. Die Hesse-Matrix ist also an der Stelle $(0,0)$ indefinit und f hat also bei $(0,0)$ einen Sattelpunkt nach dem notwendigen und hinreichenden Kriterium für Extrema.

- *Fall* $(x,y) = (1,0)$.

$$\mathcal{H}(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1199}$$

Die Eigenwerte von $\mathcal{H}(f)(1,0)$ sind aus $0 = \det(\mathcal{H}(f)(1,0) - \lambda E_2)$ zu $\lambda(\lambda - 2) - 1$ bestimmt zu $\lambda_\pm = (2 \pm 2\sqrt{2})/2$. Da $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, ist $\mathcal{H}(f)(1,0)$ auch hier indefinit, $(1,0)$ also ein Sattelpunkt nach dem notwendigen und hinreichenden Kriterium für Extrema.

- *Fall* $(x,y) = (0,1)$.

$$\mathcal{H}(f)(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1200}$$

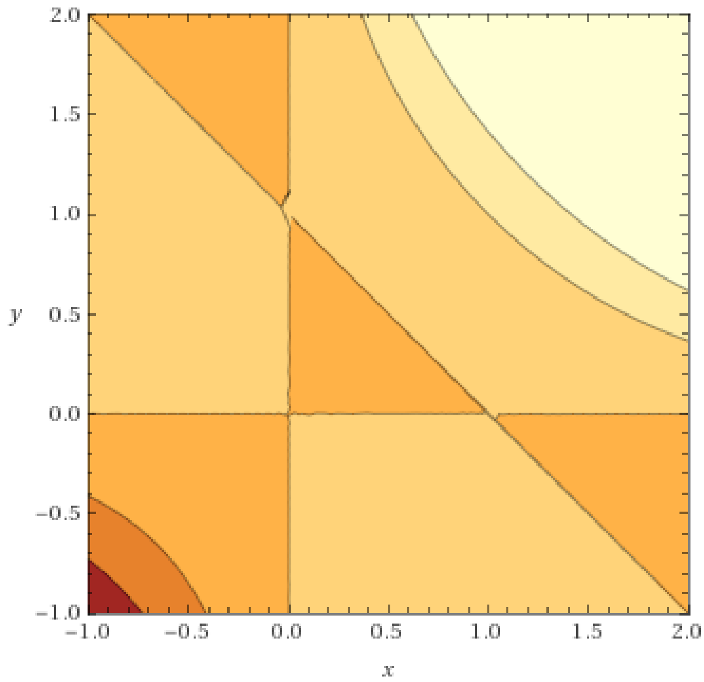
Die Eigenwerte von $\mathcal{H}(f)(0,1)$ sind aus $0 = \det(\mathcal{H}(f)(0,1) - \lambda E_2)$ zu $\lambda(\lambda - 2) - 1$ bestimmt zu $\lambda_\pm = (2 \pm 2\sqrt{2})/2$. Da $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, ist $\mathcal{H}(f)(0,1)$ auch hier indefinit, $(0,1)$ also ein Sattelpunkt nach dem notwendigen und hinreichenden Kriterium für Extrema.

- *Fall* $(x,y) = (1/3,1/3)$.

$$\mathcal{H}(f)(1/3,1/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \tag{1201}$$

Die Eigenwerte von $\mathcal{H}(f)(1/3,1/3)$ sind aus $0 = \det(\mathcal{H}(f)(1,1) - \lambda E_2)$ zu $(\lambda - 2/3)(\lambda - 2/3) - (1/3)^2 = (\lambda - 1/3)(\lambda - 1)$ bestimmt zu $\lambda \in \{1/3, 1\} \subseteq \mathbb{R}^+$. Damit ist die Hesse-Matrix bei $(1/3,1/3)$ positiv definit, also $\mathcal{H}(f)(1/3,1/3)$ ein lokales Minimum von f nach dem notwendigen und hinreichenden Kriterium für Extrema.

(b) Sei $(x,y) \in Q = (-1,2)^2$ beliebig. Es gilt $f(x,y) = x^2y + y^2x - xy = y(x^2 + yx - x) = x \cdot y(x + y - 1)$. Die Nullstellenmenge von f ist also gegeben durch die Randkurve $\partial\mathrm{Conv}((0,0),(1,0),(0,1)) = \partial T$.
(c) Da T gerade der Abschluss von $\mathrm{Conv}((0,0),(1,0),(0,1))$ ist und die in (b) gefundene Nullstellenmenge ganz in Q liegt, ist T eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Ferner ist T nach Definition aus der Angabe abgeschlossen. Nach dem Satz von Heine-Borel ist T also ein Kompaktum in $\mathbb{R}^2$. Da $f|_T : T \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, nimmt sie nach dem Maximumprinzip für reelle Funktion auf T ein Minimum und Maximum an.
(d) Siehe nachfolgende Abbildung.



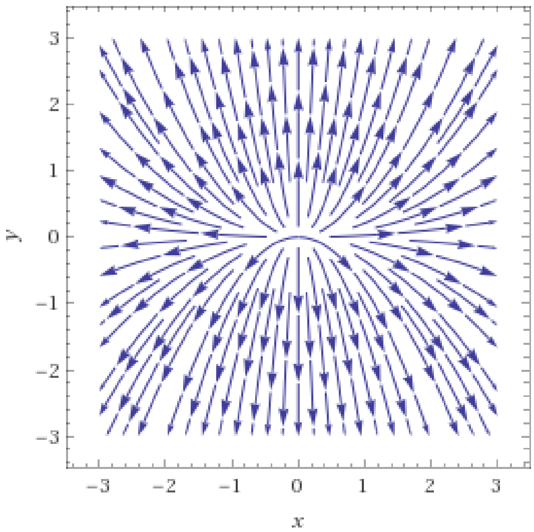
Damit ist die Aufgabe zu Ende. $\square$

Aufgabe 97 (F14T1A3) Gegeben ist $\ddot{x} = -\cos(x)$. Wir wandeln dieses System in ein System von Differentialgleichungen der Ordnung 1 um, indem wir $\dot{x} = y$ definieren und somit haben:

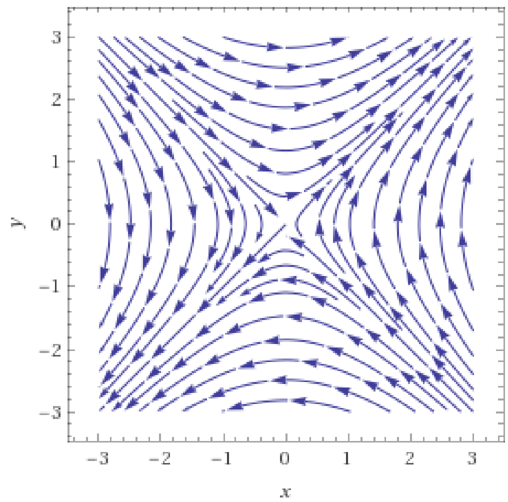
$$\dot{x} = y \ \& \ \dot{y} = -\cos(x). \tag{1202}$$

Sei nun $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Da $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, -\cos(x))$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld ist, ist F lokal Lipschitz-stetig. Infolge der Gebietseigenschaft von $\mathbb{R}^2$ liefert der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Existenz einer maximalen Lösung $(\lambda, \mu) : I \to \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems zum Anfangswert $(\lambda(0), \mu(0)) = (\eta, \xi)$. Es ist sogar stärker $I = \mathbb{R}$, da $\|F\|_\infty(x, y) \leq |y| + 1 \leq \|(x, y)\|_\infty + 1$, also es sich um ein Differentialgleichungssystem mit linear beschränkter rechter Seite handelt. Der dazugehörige Existenz- und Eindeutigkeitssatz legt in diesem Fall bereits $I = \mathbb{R}$ fest. Sei nun $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2\sin(x) + y^2$. Diese Funktion ist als Summe unendlich oft stetig partiell differenzierbarer Funktion selbst eine glatte Funktion. Zudem gilt für jede Lösung $(\lambda, \mu) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems, dass $(S \circ (\lambda, \mu))'(t) = 2\cos(\lambda(t))\lambda'(t) + 2\mu(t)\mu'(t) = 2\cos(\lambda(t))\mu(t) - 2\mu(t)\cos(\lambda(t)) = 0$, wobei wir verwendet haben, dass (λ, μ) das angegebene Differentialgleichungssystem erfüllt. Die Beliebigkeit der gewählten Lösung impliziert, dass S konstant entlang jeder Trajektorie des Differentialgleichungssystems, also ein erstes Integral ist. $\square$

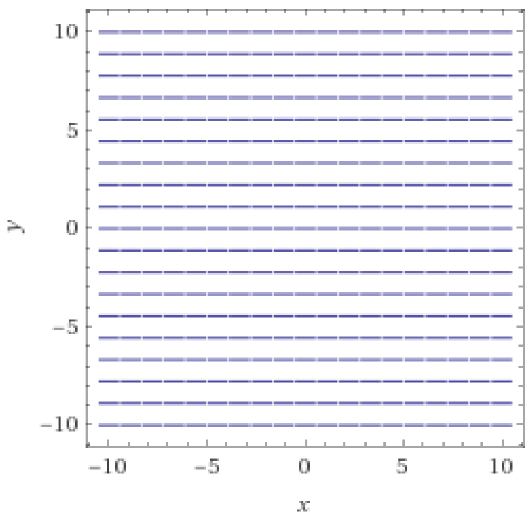
Aufgabe 98 (H01T2A1) Diese Aufgabe wurde bereits im Wintersemester 2018/2019 gelöst, deswegen gibt es hier nur noch die Abbildungen.
(a)



(b)



(c)



□

Aufgabe 99 (H19T2A2) Gegeben sei die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ und der $\mathbb{R}^3$ mit der Euklidischen Norm $\|\heartsuit\|$.
(a) Wir zeigen, dass $\gamma(\mathbb{R})$ abgeschlossen ist. Angenommen, $\gamma(\mathbb{R})$ ist nicht abgeschlossen. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \gamma(\mathbb{R})$, sodass für alle $\epsilon > 0$ $B_\epsilon(p) \not\subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \gamma(\mathbb{R})$. Definiere nun $d := \operatorname{dist}(\gamma(\mathbb{R}), p)$. Dann ist $B_{d/2}(p) \cap \gamma(\mathbb{R}) = \emptyset$, sodass $B_{d/2}(p) \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \gamma(\mathbb{R})$, im Widerspruch zur Annahme. Damit ist $\gamma(\mathbb{R})$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$.
(b) Sei $p = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Wir definieren die Funktion $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ durch $f_p(t) := \|\gamma(t) - p\|^2$. Da $\|.\|$ als Normfunktion nicht-negativ ist, und die Quadratfunktion auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend ist, ist das Minimum von f_p gleich dem Minimum vom $t \mapsto \|\gamma(t) - p\|$. Es ist $f_p(t) = (\cos(t) - p_x)^2 + (\sin(t) - p_y)^2 + (t - p_z)^2$. Offenbar können wir uns wegen der 2π-Periodizität der trigonometrischen Funktionen sin und cos darauf beschränken, $t \in [-\pi + p_z, p_z + \pi] =: I(p_z)$ zu suchen, sodass f_p für dieses t minimiert wird. Da $I(p_z) \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossenes und beschränktes, d.h., kompaktes, Intervall ist, liefert uns das Maximumsprinzip, dass es in der Tat ein $\tau \in [-\pi + p_z, p_z + \pi]$ gibt, sodass $f_p(\tau) = \min_{t \in [-\pi + p_z, p_z + \pi]}\{f_p(t)\}$. In der Notation der Aufgabe ist $\tau = t_p$ und wir haben bereits oben argumentiert, dass dies auch das Minimum von $t \mapsto \|\gamma(t) - p\|$ ist.
(c) Da t_p ein Minimum nicht nur von f_p, insbesondere also ein Extremum, liefert das notwendige kriterium für (lokale) Extrema von Funktionen einer reellen Variablen, dass $f_p'(t_p) = 0$. Es gilt also $f_p'(t) = 2\langle \gamma'(t_p), (\gamma(t_p) - p)\rangle = 0$ unter Verwendung der Definition der Euklidischen Norm über das Standard euklidische Skalarprodukt und der Symmetrie des Skalarprodukts. Die letzte Gleichung bedeutet aber gerade $\gamma'(t_p) \perp (\gamma(t_p) - p)$.
(d) Wir lösen also $-\sin(t)(\cos(t) - 2) + \sin(t)\cos(t) + t = 0$. Das liefert uns die Gleichung $2\sin(t) + t = 0$. Durch Einsetzen sieht man schnell, dass $t = 0$ eine Lösung ist. Angenommen, es gibt noch eine weitere Lösung, dann müsste $\sin(t) = -1/2t$ sein. Da $|\sin(t)| \leq 1$, können wir uns auf $t \in [-2, 2]$ beschränken. Falls nun $2 \geq t > 0$, dann ist $\sin(t) > 0$ aber $-2t < 0$, sodass diese Option ausscheidet. Falls $-2 \leq t < 0$, dann ist $\sin(t) < 0$ aber $-2t > 0$, sodass die Gleichheit ebenfalls nicht erfüllt werden kann. Damit haben wir gezeigt, dass es außer 0 kein weiteres Extremum gibt. Da $f_p''(t) = 2\cos(t) + 1$ an der Stelle $t = 0$ positiv ist, haben wir nach dem hinreichenden Kriterium tatsächlich ein Minimum von f_p vorliegen an der Stelle $t = 0$, das, wie in den vorangegangenen Teilaufgaben beschrieben, mit dem Minimum von $t \mapsto \|\gamma(t) - p\|$ zusammenfällt. $\square$

Aufgabe 100 (F18T2A2) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 4(x + y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$.
(a) Wir sollen die Existenz eines globalen Maximum zeigen. Dazu beachten wir, dass sich die Nebenbedingung vermöge der Definition $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ als $h(x, y) = 0$ schreiben lässt. Es gilt nun mit $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | h(x, y) = 0\}$, dass M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, denn $\nabla h = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ für alle $(x, y) \in M$. Zudem ist $M \subseteq \mathbb{R}^2$ als Rand der Einheitskreisscheibe abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Die Einschränkung $f|_M : M \to \mathbb{R}$ besitzt nun auf dem Kompaktum M nach dem Maximumprinzip für reellwertige Funktionen ein globales Maximum.
(b) Wir bestimmen dieses Maximum sowie den Wert, den f dort annimmt. Dazu

beachten wir, dass durch $\psi : \mathbb{R} \to M, \phi \mapsto (\cos(\phi), \sin(\phi))$ eine Surjektion gegeben ist. Nun gilt $(f \circ \psi)(\phi) = 4(\cos(\phi) + \sin(\phi))$. Für ein Extremum von $f \circ \psi$ gilt $0 = 4\cos\phi - 4\sin(\phi)$. Für $\phi \notin \pi\mathbb{Z}$ können wir dies zu $1 = \cot(\phi)$ umformen. Das liefert $\phi \in \pi/4 + \pi\mathbb{Z}$. Für $\phi \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$ erhalten wir analog $1 = \tan\phi$, was wiederum $\phi \in \pi/4 + \pi\mathbb{Z}$. Wegen der 2π-Periodizität von ψ können wir uns auf die Untersuchung von $\phi \in \{\pi/4 + 5\pi/4\}$ beschränken. Es gilt nun $(f \circ \psi)''(\phi) = -4(\sin(\phi) + \cos(\phi))$, sodass wir $(f \circ \psi)''(\phi) < 0$ für $\phi = \pi/4$ und für $\phi = 5\pi/4$ haben wir $(f \circ \psi)''(\phi) > 0$. Damit handelt es sich bei der kritischen Punkten $\psi(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ und $\psi(5\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ von $f|_M$ jeweils um Extrema und wegen $d_\phi^2 f(\psi(\phi = \pi/4)) < 0$ ist $\psi(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ das gesuchte Maximum. Für den Funktionswert dort gilt $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}$. □

Aufgabe 101 (F18T2A3) Gegeben ist die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 < R^2, x^2 + y^2 > \rho^2\}, \tag{1203}$$

wo $0 < \rho < R$. Gesucht ist $\mathrm{Vol}(M)$. Da $M \subseteq B_{3R/2}(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist M beschränkt und damit von endlichem Maß. Es gilt nun bzgl. des vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Lebesgue-Maßes auf M,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(M) &= \int_M \chi_M(X) d\lambda(X) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_\rho^R \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r2}} dz\, r dr\, d\phi \\
&= 4\pi \int_\rho^R r\sqrt{R^2 - r^2} dr \\
&= 4\pi R^3 \int_{\rho/R}^1 u\sqrt{1 - u^2} du \\
&= 4\pi R^3 \int_{\arcsin(\rho/R)}^{\arcsin(1)} \sin(v)\cos(v)^2 dv \\
&= -4\pi R^3 \int_{\cos(\arcsin(\rho/R))}^{\cos(\arcsin(1))} w^2 dw \\
&= -4\pi R^3 \left.\frac{w^3}{3}\right|_{\sqrt{1-\rho^2/R^2}}^0 \\
&= \frac{4\pi}{3}\sqrt{R^2 - \rho^2}^3.
\end{aligned}$$

In Zeile 1 wurde die Definition des Volumens über das Integral verwendet. In Zeile 2 haben wir den Transformationssatz für Integrale mit Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (x(r, \phi) = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi), z)$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\phi \in (0, 2\pi)$ verwendet, um die Symmetrie des Problems auszunutzen und dabei die bekannte Funktionaldeterminante für Zylinderkoordinaten, $\det(\partial(x, y, z)/\partial(r, \phi, z)) = r$ verwendet. Für Zeile 3 haben wir den Satz von Fubini verwendet, um das Mehrfachintegral auf ein Einfachintegral über die radiale Koordinate r zu reduzieren. In Zeile 4 haben wir $r \to r/R$ reskaliert

(Transformationssatz), in Zeile 5 haben wir $r \in (\rho/R, 1) \subseteq (0, 1)$ verwendet, um $r = \sin(v)$ zu transformieren mittels Transformationssatz für eindimensionale Integrale. Danach haben wir $w = \cos(v)$ verwendet, um das Integral über v in eines über w zu überführen. Wegen $v \in (0, \pi/2)$ in jedem Fall ist $v \mapsto \cos(v)$ auf dem in Rede stehenden Bereich bijektiv. Das verbleibende Integral haben wir dann ausgerechnet. □

Aufgabe 102 (F18T1A2) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen.
(a) *Falsch.* Man hat einen Widerspruch, wenn man z.B. $f(x) = 1$ und $g(x) = 1$ falls $x \in \mathbb{Q}$ und $g(x) = 0$ falls $x \notin \mathbb{Q}$ verwendet, um f und g zu definieren. Als konstante Funktion ist f stetig, und g ist zumindest eine Funktion. Die Funktion h ist dann $h(x) = 0$, falls $x \in \mathbb{Q}$ und $h(x) = -1$, falls $x \notin \mathbb{Q}$ und damit offensichtlich unstetig auf ganz $\mathbb{R}$.
(b) *Richtig.* Da f stetig ist, gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt dann für die in der Angabe definierte Funktion h, dass $h(x) = F(g(x)) - F(0)$. Da die Komposition der differenzierbaren Funktionen F, g selbst wieder differenzierbar ist und die Subtraktion der Konstanten $F(0)$ daran nichts ändert, ist auch h differenzierbar.
(c) *Richtig.* Sei $m := \lim_{x\to\infty} f'(x) \in \mathbb{R}$ und $M > 0$ dergestalt, dass $|f(x)| < M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Angenommen, $m \neq 0$ und ohne Einschränkung $m > 0$. Dann gibt es für $\epsilon = m/2$ ein $x_0 > 0$, sodass $f'(x) > m - \epsilon > m/2 > 0$ für alle $x > x_0$. Nun gilt

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt > f(x_0) + m\frac{x - x_0}{2}. \tag{1204}$$

Da die rechte Seite der Abschätzung nach unten durch eine unbeschränkte Funktion gegeben ist, ist auch $f(x)$ unbeschränkt, was aber der Existenz von $M > 0$, sodass insbesondere $f(x) < M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ widerspricht, d.h., der Voraussetzung, dass f insbesondere nach oben beschränkt ist. Analog behandelt man den Fall, dass $m < 0$, nur hat man dann eine Abschätzung nach oben statt nach unten und in der Folge einen Widerspruch zur Beschränktheit von f nach unten. □

Aufgabe 103 (H19T3A3) (a) Sei f eine ganze Funktion, die beschränkt ist. Dann ist f konstant.
(b) Sei f eine ganze Funktion und sei $\Im[f]$ nach unten beschränkt. Wir zeigen, dass f konstant ist. Da $\Im[f]$ nach unten beschränkt ist, gibt es ein m in $\mathbb{R}$, sodass $\Im[f](z) \geq m$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren nun $h(z) = \exp(if(z)) = \exp(-\Im[f](z)) \exp(i\Re[f])$. Es gilt $0 \leq |h(z)| \leq \exp(-m)$. Da h mit f und der komplexen Exponentialfunktion ebenfalls eine ganze Funktion ist, folgt nach dem Satz von Liouville, dass h konstant ist, also $h(z) = C$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit einem $C \in \mathbb{C}$. Angenommen, f ist nicht konstant. Dann ist $f(\mathbb{C}) =: G \subseteq \mathbb{C}$ nach dem Satz über die Gebietstreue ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Nach dem Satz über die Gebietstreue, angewendet auf die komplexe Exponentialfunktion ist dann aber $h(\mathbb{C})$ ebenfalls ein Gebiet, also insbesondere $h(\mathbb{C}) \neq \{C\}$ für das oben definierte C. Insbesondere ist dann h nicht konstant, im Widerspruch zum vorher bewiesenen. Also war die Annahme, f wäre nicht konstant, falsch und somit ist f konstant, wie behauptet. □

Aufgabe 104 (H19T1A3) (a) Gesucht sind alle holomorphen Funktionen $f : B(0,3/2) \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $f(1/n) = 2n/(2n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren zunächst $h : B(0,3/2) \to \mathbb{C}$ durch $h(z) = 2/(2+z)$. Es gilt nun $h(1/n) = 2/(2+1/n) = 2n/(2n+1)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Für eine auf $B(0,3/2)$ holomorphe Funktion gilt wegen Stetigkeit bei $z = 0$ im Speziellen $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = 1$. Zudem ist auch $h(0) = 1$. Damit stimmen f und h auf $\{1/n|n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} =: M \subseteq B(0,3/2)$ überein. $B(0,3/2)$ ist als offene Kreisscheibe laut Vorlesung ein Gebiet und die Menge M hat den Häufungspunkt 0, da dieser der Grenzwert der Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M ist. Der Identitätssatz liefert nun, dass $f = h$ bereits auf ganz $B(0,3/2)$ gilt. Damit ist durch $f(z) = 2/(2+z)$ die einzige holomorphe Funktion mit den gewünschten Eigenschaften gegeben.
(b) Das Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem beschränkten Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit stetiger Fortsetzung auf $G \cup \partial G$ besagt, dass f sein (striktes) Betragsmaximum am Rand annimmt oder andernfalls konstant ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, und setzen die Angaben in der Aufgabenstellung als bekannt voraus. Falls $f(c) = 0$, dann haben wir bereits eine Nullstelle von f gefunden. Sei also $f(c) \neq 0$ vorausgesetzt. Angenommen, f hat keine Nullstelle in $B(c,r)$. Dann ist $g := 1/f$ auf ganz $B(c,r)$ wohldefiniert und eine holomorphe Funktion. Zudem erlaubt g nach Voraussetzung, dass $\min\{|f(z)||z \in \partial B(c,r)\} > |f(c)| > 0$ eine stetige Fortsetzung auf $B(c,r) \cup \partial B(c,r)$. Nach dem Maximumsprinzip nimmt nun g sein striktes Maximum am Rand an, da $f(c) > \min\{|f(z)||z \in \partial B(c,r)\}$ bereits impliziert, dass $g = 1/f$ nicht konstant ist. Nun gilt $\max|g(z)||z \in \partial B(c,r)\} = 1/\min\{|f(z)||z \in \partial B(c,r)\} < 1/|f(c)|$ im Widerspruch zum Maximumsprinzip. Damit ist die Annahme, f hätte keine Nullstelle in $B(c,r)$, falsch und es gibt ein $z \in B(c,r)$, sodass $f(z) = 0$. $\square$

Aufgabe 105 (F13T2A1) (a) Gesucht sind alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + 2axy + by^2$ den Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ erklärt. Da $\mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$ ist, wird durch u der Realteil einer holomorphen Funktion erklärt, wenn u harmonisch ist, d.h., wenn $\Delta u(x,y) = 0$ auf $\mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\Delta u(x,y) = 2 + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -1. \tag{1205}$$

Der Parameter $a \in \mathbb{R}$ unterliegt keiner Einschränkung. Damit finden wir die Menge M aller $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit den beschriebenen Eigenschaften als $\{(a,-1)|a \in \mathbb{R}\}$.
(b) Gesucht ist nun der dazugehörige Imaginärteil $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto v(x,y)$ aller holomorphen Funktionen, deren Realteil u ist. Zunächst gilt $\partial_x u(x,y) = 2x + 2ay$ und $\partial_y u(x,y) = 2ax - 2y$. Mittels Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen finden wir

$$v(x,y) - v(0,y) = -\int_0^x (2a\chi - 2y)d\chi = -ax^2 + 2yx \tag{1206}$$

$$v(0,y) - v(0,0) = \int_0^y 2a\gamma d\gamma = ay^2. \tag{1207}$$

Indem wir $c \equiv v(0,0) \in \mathbb{R}$ definieren, finden wir, dass sich der gesuchte Imaginärteil v als

$$v(x,y) = -ax^2 + 2yx + ay^2 + c \tag{1208}$$

angeben lässt, wobei a durch die Wahl von u festgelegt und $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. □

Aufgabe 106 (H19T1A1) (a) Zu berechnen sind zwei Kurvenintegrale.

- *Integral 1:* Wir sollen das Integral

$$I = \int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019} dz \tag{1209}$$

berechnen, wobei $\partial B(20,19)$ einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufen wird. Zunächst gilt $z^2 - 2019 = (z+\sqrt{2019})(z-\sqrt{2019})$, sodass lediglich $\sqrt{2019} \in B(20,19)$, dem von $\partial B(20,19)$ berandeten Gebiet liegt. Zudem gilt $\pm\sqrt{2019} \notin \partial B(20,19)$. Mittels Partialbruchzerlegung finden wir

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2019}} \int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z-\sqrt{2019}} dz - \frac{1}{2\sqrt{2019}} \int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z+\sqrt{2019}}. \tag{1210}$$

Das zweite Integral ist ein Integral über eine auf $B(20,20) \supseteq \bar{B}(20,19)$ holomorphe Funktion. Nach dem Integralsatz von Cauchy verschwindet es also. Das erste Integral können wir mittels der Integralformel von Cauchy umschreiben,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2019}} \int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z-\sqrt{2019}} dz \\ &= \frac{\pi i}{\sqrt{2019}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z-\sqrt{2019}} dz \right] \\ &= \frac{\pi i}{\sqrt{2019}} \cos(2020), \end{aligned}$$

wobei die Cauchysche Integralformel im zweiten Schritt eingesetzt wurde.

- *Integral 2:* Wir sollen das Integral

$$J = \int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3} \tag{1211}$$

berechnen, wobei $\partial B(0,2)$ wiederum einmal und mathematisch positiv durchlaufen wird. Es ist $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin(z)$ eine ganze Funktion und insbesondere $\sin(1) \neq 0$. Wir wenden die allgemeine Cauchysche Integralformel an, um das obenstehende Integral umzuschreiben

$$\begin{aligned} J &= \int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3} dz \\ &= \frac{1}{2!} \left[\frac{2!}{2\pi i} \int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3} dz \right] \\ &= \frac{d_z^2 \sin(z)|_{z=1}}{2} \\ &= \frac{-\sin(1)}{2}. \end{aligned}$$

(b) Gegeben sei nun der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \cos(\exp(it))^2$. Es gilt zum einen $\gamma(0) = \cos(1) = \gamma(2\pi)$, sodass γ geschlossen ist, zum anderen ist γ stetig differenzierbar und es gilt $\gamma'(t) = -2\sin(\exp(it))\cos(\exp(it))i\exp(it) \neq 0$ für $t \in [0, 2\pi]$, sodass γ eine C^1-Kurve ist. Wir sollen die Windungszahl berechnen, $n = n(\gamma, 0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} \\ &= \frac{-i}{\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\exp(it))\cos(\exp(it))\exp(it)}{\cos(\exp(it))^2}dt \\ &= \frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tan(\exp(it))\exp(it)dt \\ &= \frac{i}{\pi}\int_{\partial B(0,1)} \tan(z)dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

nach dem Integralsatz von Cauchy, denn $z \mapsto \tan(z)$ ist holomorph auf $B(0, \pi/2) \supseteq \bar{B}(0, 1)$. □

Aufgabe 107 (H02T1A1) Sei $\rho > 0$, $G := \{z | |z| < 1 + \rho\}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(\exp(i\theta))| < c$ für $\theta \in [0, 2\pi]$ und es habe f eine einfache Nullstelle bei $z = 0$. Zudem sei $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G \setminus \{0\}$. Wir zeigen, dass es ein $c_1 \in \mathbb{C}$ mit $|c_1| = c$ gibt, sodass $f(z) = c_1 z$. Da $G \supseteq \bar{\mathbb{E}}$, wo $\mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe bezeichnet, ist $f|_{\bar{\mathbb{E}}}$ stetig und auf $\mathbb{E}$ holomorph. Setze nun $g := c^{-1}f|_{\mathbb{E}}$, denn $c > 0$ wie aus der Voraussetzung folgt. Dann ist auch g auf $\bar{\mathbb{E}}$ stetig fortsetzbar und nach dem Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen auf beschränkten Gebieten gilt $|g(z)| < 1$ auf $\mathbb{E}$, denn andernfalls wäre g und damit $f (\propto g)$ konstant auf $\bar{\mathbb{E}}$. Letzteres geht nicht, denn $f(0) = 0 \neq c = |f(1)|$, also $f(1) \neq 0$. Damit sehen wir, dass $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, z \mapsto c^{-1}f(z)$. Wir schreiben nun $g(z) = zh(z)$ mit einer G holomorphen und auf $\bar{\mathbb{E}}$ nullstellenfreien Funktion h. Da h nullstellenfrei ist, liefert das Minimumsprinzip für holomorphe Funktionen, dass h konstant auf $\bar{\mathbb{E}}$ ist. Zusammen mit $|g(z)| = 1$ für $z \in \partial\mathbb{E}$ erhalten wir also $h(z) = d$ mit $\mathbb{C} \ni d : |d| = 1$. Somit ist $f(z) = cg(z) = (cd)z =: c_1 z$ und $c_1 \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $|c_1| = c$. □

Aufgabe 108 (H10T2A2) Sei $\mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph und mit der Eigenschaft, dass $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ auf $\mathbb{E}$. Wir zeigen, dass sogar $|f(z)| < 1$ gilt. Falls f konstant ist, folgt die Behauptung aus $f(z) = f(0)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und $|f(0)| < 1$ laut Voraussetzung. Sei also f nicht-konstant. Da $\mathbb{E}$ ein Gebiet ist, ist nach dem Satz von der Gebietstreue für das nicht-konstante f $f(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, also insbesondere offen. Bislang wissen wir $f(\mathbb{E}) \subseteq \bar{\mathbb{E}}$Damit kann es kein $z \in \mathbb{E}$ geben, sodass $|f(z)| = 1$, d.h., $f(z) \in \partial\mathbb{E}$. Also ist $f(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{E}$ und damit $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. □

Aufgabe 109 (F13T3A2) (a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $|\sin(z)| \geq 1/2(\exp(|y|) - \exp(-|y|))$. Bekanntlich ist

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right). \tag{1212}$$

Bilden des Betrags auf beiden Seiten liefert dann

$$\begin{aligned} |\sin(z)| &= \left|\frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right)\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\left|\left|e^{-y}e^{ix}\right| - \left|e^{y}e^{-ix}\right|\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\exp(-y) - \exp(y)\right| \\ &= \begin{cases} 1/2(\exp(y) - \exp(-y)) & y \geq 0 \\ 1/2(\exp(-y) - \exp(y)) & y < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\left(\exp(|y|) - \exp(-|y|)\right), \end{aligned} \tag{1213}$$

wobei für die Ungleichung $\geq$ die umgekehrte Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$ bemüht wurde.
(b) Sei nun für alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) = \sin(nz)/n$. Wir sollen die Menge M derjenigen $z \in \mathbb{C}$ bestimmen, für die $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sei zunächst $z = x + iy$ die Zerlegung von z in Real- und Imaginärteil.

- *Fall 1:* $y = 0$. Dann ist $z = x \in \mathbb{R}$. Es gilt $|\sin(X)| \leq 1$ für alle $X \in \mathbb{R}$. Somit können wir für beliebiges $z = x \in \mathbb{R}$ abschätzen $0 \geq |f_n(z)| = |\sin(nz)/n| \leq 1/n$. Da $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, liefert das Quetschlemma, dass $f_n(z) \to 0$ wenn $n \to \infty$. Insbesondere finden wir $\mathbb{R} \subseteq M$.

- *Fall 2:* $y \neq 0$. Dann ist $\kappa \equiv |y| > 0$. Es gilt nun für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $y \neq 0$, dass

$$|f_n(z)| = \left|\frac{\sin(nz)}{n}\right| \geq \frac{\exp(n\kappa) - \exp(-\kappa n)}{2n}. \tag{1214}$$

  Sei nun $N := \lceil 1/(2\kappa)\ln(2)\rceil$. Dann gilt für alle $n \geq N$, dass

$$\frac{\exp(n\kappa) - \exp(-\kappa n)}{2n} \geq \frac{\exp(\kappa n)}{4n}. \tag{1215}$$

  Da aber nach L'Hopital für die glatte Funktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(\kappa x)/(4x)$ gilt $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$, finden wir, dass $\exp(\kappa n)/(4n) \to \infty$ wenn $n \to \infty$. Damit ist $(|f_n(z)|)_{n\in\mathbb{N}}$ und somit auch $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist $z \notin M$. Damit gilt wegen Beliebigkeit von $z \in \mathbb{C}$ mit $\Im[z] \neq 0$, dass $M \subseteq \mathbb{C} \setminus (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Insgesamt haben wir somit $M = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ nachgewiesen. Für $z \in M$ ist dann $f : M \to \mathbb{C}, z \mapsto 0$ die Grenzfunktion, $0 = f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. □

Aufgabe 110 (H00T1A5) (a) *Wahr.* Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Einschränkung der komplexen Sinusfunktion auf die reelle Achse. Jede Nullstelle von g ist somit auch eine Nullstelle der komplexen Sinusfunktion. Wir zeigen, dass die komplexe Sinusfunktion keine weitere Nullstelle hat. Angenommen, $z = x + iy$ mit $y \neq 0$ ist eine weitere Nullstelle der komplexen Sinusfunktion. Andererseits ist $|\sin(z)| \geq (\exp(|y|) - \exp(-|y|))/2$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung für alle $z = x + iy \in \mathbb{R}$ und somit muss $0 = \exp(|y|) - \exp(-|y|)$ für eine Nullstelle $z = x + iy$ mit $y \neq 0$ der komplexen Sinusfunktion gelten. Das lässt sich in $1 = \exp(2|y|)$ umformen. Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv ist und $\exp(0) = 1$ gilt, finden wir somit $2|y| = 0$, also $y = 0$ im Widerspruch zu $y \neq 0$ nach der Annahme, dass $z \notin \mathbb{R}$ Nullstelle der komplexen Sinusfunktion ist. Somit hat die komplexe Sinusfunktion außerhalb der reellen Achse keine Nullstellen und die Nullstellenmenge der komplexen Sinusfunktion stimmt mit der Nullstellenmenge ihrer Einschränkung auf die reelle Achse überein, wobei die Nullstellenmengen jeweils als Teilmengen von $\mathbb{C}$ verstanden werden.
(b) *Falsch.* Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \exp(z) - 1$ ist holomorph und hat eine Nullstelle der Ordnung 1 bei $z = 0$, denn $f(z = 0) = 0$ aber $f'(z) = \exp(z)$, also $f'(0) = 1 \neq 0$. Damit gibt es eine Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto h(z)$, die die holomorphe Fortsetzung von $(\exp(z) - 1)/z$ auf ganz $\mathbb{C}$ (von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ aus) ist. Da $\bar{B}_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ liefert der Residuensatz, dass $\int_{\partial B_1(0)} (\exp(z) - 1)/z dz = 0$, denn die Singularität der Integrandenfunktion bei $z = 0$ ist hebbar, da die Integrandenfunktion durch h holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar ist.
(c) *Wahr.* Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und nullstellenfrei ist. Damit ist die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)/\exp(z)$ wohldefiniert und ganz. Nach Voraussetzung an $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt $|g(z)| \leq |c|$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Damit ist g eine ganze und beschränkte Funktion, nach dem Satz von Liouville also konstant. Sei also $c \in \mathbb{C}$ dergestalt, dass $g(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Einsetzen der Definition von g folgt $f(z) = c\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. □

Aufgabe 111 (H02T2A1) (a) *Falsch.* Gäbe es eine solche holomorphe Funktion f, so ließe sie sich in einer gegebenenfalls kleineren offenen Umgebung von 0 als gleichmäßig konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 darstellen. Für die Koeffizienten a_n der Potenz z^n in der Potenzreihenentwicklung gilt laut Vorlesung $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Andererseits ist $|a_n| = |f^{(n)}(0)/n!| \geq (n!)^2/n! = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zudem ist $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ wenn $n \to \infty$, sodass die Formel von Hadamard für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihenentwicklung von f liefert, dass $\rho = 0$. Damit gibt es insbesondere keine offene Umgebung der 0 in der sich f als Potenzreihe darstellen lässt. Widerspruch! Eine holomorphe Funktion f mit den gewünschten Eigenschaften kann es somit nicht geben.
(b) *Falsch.* Angenommen, es gäbe eine ganze Funktion f mit der beschriebenen Eigenschaft. Dann ist f nicht-konstant. Nach dem kleinen Satz von Picard ist aber das Bild von $\mathbb{C}$ unter einer nicht-konstanten, ganzen Funktion f ganz $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ mit einem $p \in \mathbb{C}$. Da aber $0, -i \notin f(\mathbb{C})$ trifft keiner der beiden Fälle zu. Widerspruch! Eine Funktion f, wie beschrieben, kann es somit nicht geben.
(c) *Richtig.* Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $\Re[f](z) = (\Im[f](z))^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $\Re[f](z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir betrachten $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $h(z) = \exp(-f(z))$. h ist eine ganze Funktion. Ferner ist

$0 \leq |h(z)| \leq \exp(-\Re[f](z)) \leq 1$, da $x \mapsto \exp(-x)$ auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton fallend und positiv und durch $1 = \exp(0)$ nach oben beschränkt ist. Zusammenfassend ist h als ganze und beschränkte Funktion nach dem Satz von Liouville konstant, d.h., $h(\mathbb{C}) = \{p\}$ mit einem $p \in \mathbb{C}$. Das Bild von $\mathbb{C}$ unter h ist somit insbesondere kein Gebiet. Angenommen, f ist nicht konstant. Dann ist nach dem Satz von der Gebietstreue $f(\mathbb{C}) = G' \subseteq \mathbb{C}$ ein nicht-leeres Gebiet. Da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ holomorph ist, ist auch $h(G') = G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zusammenfassend ergibt sich also $h(\mathbb{C}) = G$, wo G Gebiet ist. Das ist aber ein Widerspruch zur vorherigen Feststellung, dass $h(\mathbb{C}) = \{p\}$ kein Gebiet ist. Also war die Annahme, f wäre nicht-konstant falsch. Somit ist f konstant, wie behauptet. $\square$