Im gesamten Abschnitt bezeichnet $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall positiver Länge, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Definition

- Eine Zerlegung von [a,b] ist eine endliche (eventuell auch leere) Teilmenge $\mathscr{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\} \subseteq]a, b[$.
- Mit Z(a, b) bezeichnen wir die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$.

Die Elemente eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ werden immer so durchnummeriert, dass $x_k < x_{k+1}$ für $1 \leq k < n - 1$ erfüllt ist. Außerdem setzen wir stets $x_0 = a$ und $x_n = b$.

Definition der Unter- und Obersummen

Definition (9.1)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei $\mathscr{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$.
Für jedes k mit $0 \le k < n$ definieren wir

$$c_k = \inf f([x_k, x_{k+1}]) \text{ und } d_k = \sup f([x_k, x_{k+1}]).$$

Dann bezeichnet man

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) \text{ bzw. } \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k(x_{k+1} - x_k)$$

als Unter- bzw. Obersumme von f bezüglich der Zerlegung $\mathscr{Z}$.

Definition Riemann-integrierbarer Funktionen

Definition (9.2)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann bezeichnet man

$$\int_{a\star}^{b} f(x)\ dx \quad = \quad \sup\left\{\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \;\middle|\; \mathscr{Z} \in \mathrm{Z}(a,b)\right\} \quad \text{bzw.}$$

$$\int_{a}^{b\star} f(x)\ dx \quad = \quad \inf\left\{\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) \;\middle|\; \mathscr{Z} \in \mathrm{Z}(a,b)\right\}$$

als Unter- bzw. Oberintegral der Funktion f. Stimmen Unter- und Oberintegral von f überein, dann bezeichnet man f als Riemann-integrierbar und nennt

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad = \quad \int_{a\star}^{b} f(x)\ dx \quad = \quad \int_{a}^{b\star} f(x)\ dx$$

das Riemann-Integral der Funktion f.

(Unter- und Oberintegral haben stets endliche Werte.)

Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit

Satz (9.5)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.

(ii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ mit $\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) - \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) < \varepsilon$.

Hinweis:

Weil die Tafelfotos mit einem anderen Gerät aufgenommen wurden, sind leider viele Bilder am Rand abgeschnitten.
Ich bitte, das zu entschuldigen.

Rechenregeln für das Riemann-Integral I

Satz (9.6)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und λf Riemann-integrierbar. Außerdem gilt

(i) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$

(iii) Aus $f \leq g$ folgt $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$.

Beweis von Satz 9.6, Teil (ii) und (iii)

ggf: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-int.

zu (ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. z.zg: λf ist Riemann-int.

und $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

1. Fall: $\lambda = 0$ z.zg: Die Nullfunktion ist Riemann-

und es gilt $\int_a^b 0 \cdot dx = 0$.

$$Z = \emptyset \Rightarrow S_0^+(Z) = 0\cdot(b-a) = 0$$
$$S_0^-(Z) = 0\cdot(b-a) = 0$$

Da für jede Zerlegung Z jeweils gilt

$$S_0^-(Z) \leq \int_{a*}^{b} 0 \cdot dx \leq \int_a^{b*} 0 \, dx \leq S_0^+(Z),$$

$$\int_{a*}^{b} 0 \cdot dx = \int_a^{b*} 0 \cdot dx = 0$$ Daraus folgt die Be

2. <u>Fall</u>: $\lambda > 0$ Sei $Z = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ eine Zerlegun

Dann gilt $S_{\lambda f}^-(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf(\lambda f)([x_k, x_{k+1}]) \cdot ($

$=$

Σ $\inf(\lambda A) = \lambda \cdot \inf(A)$ falls $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$ angewendet auf $f([x_k, x_{k+1}])$

$$\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \inf f([x_k, x_{k+1}]) (x_{k+1} - x_k$$

$= \lambda \cdot S_f^-(Z)$, ebenso

$S^+_{\lambda f}(Z) = \lambda S^+_f(Z)$. Nach Vor. ist f Riemann-int. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgeg., existiert somit eine Zerlegung Z mit

$$S^+_f(Z) - S^-_f(Z) < \frac{\varepsilon}{\lambda} \Longrightarrow$$

$$S^+_{\lambda f}(Z) - S^-_{\lambda f}(Z) \overset{\text{s.o.}}{=} \lambda\left(S^+_f(Z) - S^-_f(Z)\right)$$

$$< \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon \Rightarrow \lambda f \text{ ist Riemann-int.}$$

Außerdem gilt:

$$\lambda \cdot S^-_f(Z) \leq \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leq \lambda \cdot S^+_f(Z)$$

ebenso: $\lambda S^-_f(Z) = S^-_{\lambda f}(Z) \leq \int_a^b (\lambda f)(x)\,dx$

$\leq S^+_{\lambda f}(Z)) = \lambda \cdot S^+_f(Z)$. Wegen

$\lambda S^+_f(Z) - \lambda \cdot S^-_f(Z) < \varepsilon$ folgt

also $\left| \int_a^b (\lambda f)(x)\,dx - \lambda \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$.

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. klein gewählt werden kann,

folgt $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>3. Fall</u>: $\lambda < 0$. Basiert auf den Gleichungen

$S^+_{\lambda f}(Z) = \lambda \cdot S^-_f(Z)$, $S^-_{\lambda f}(Z) = \lambda \cdot S^+_f(Z)$,

die wiederum zurückzuführen ist auf

$\inf(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup(A)$, $\sup(\lambda \cdot A) = \lambda \inf(A)$, falls

$A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschr., $A \neq \emptyset$

(Details zum 3. Fall siehe Skript)

zu (iii) Vor.: $f \leq g$ z.zg.: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

überprüfe: $f \leq g \Rightarrow S_f^+(Z) \leq S_g^+(Z)$
und $S_f^-(Z) \leq S_g^-(Z)$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$
f, g Riemann-int. $\Rightarrow$ Es gibt eine Zerlegung Z mit $S_f^+(Z) - S_f^-(Z) < \varepsilon$ und
$S_g^+(Z) - S_g^-(Z) \overset{(*)}{<} \varepsilon$. $\Longrightarrow$

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq S_g^-(Z) - S_f^+(Z)$$
$$\geq S_g^+(Z) - \varepsilon - S_f^+(Z) \geq -\varepsilon$$

g ,

$\underline{S}_f(Z))$

ht.

$_f(Z))$

$f)(x)\,dx$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. klein gewählt werden kann, folgt $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Rechenregeln für das Riemann-Integral II

Satz (9.7)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $c \in \,]a, b[$ ein beliebig gewählter Punkt. Genau dann ist f Riemann-integrierbar, wenn die Funktionen $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar sind, und in diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und integrierbare Funktionen f auf $[a, b]$ definieren wir

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Gleichung in Satz 9.7 ist dann für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ gültig.

Beweis von Satz 9.7:

geg: beschränkte Fkt. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in \,]a,b[$

z.zg: (i) f Riemann-int. $\Leftrightarrow$ $f|_{[a,c]}$, $f|_{[c,b]}$ beide R.-int.

(ii) Unter der Vor. (i) gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Sei $Z = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ eine Zerlegung mit $c \in Z$, also $c = x_m$ für ein $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Sei $Z' = Z \cap \,]a,c[\, = \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ und $Z'' = Z \cap \,]c,b[\, = \{x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}\}$.

$$\Rightarrow S_f^-(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf f([x_k, x_{k+1}]) \cdot (x_{k+1} - x_k) =$$

z.zg. (i) f Riemann-int. $\Leftrightarrow f|_{[a,c]}, f|_{[c,b]}$ ...

(ii) Unter der Vor. (i) gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \inf f([x_k, x_{k+1}])(x_{k+1}-x_k) + \sum_{k=m}^{n-1} \inf f([x_{k+1}, x_k])(x_{k+1}-x_k)$$

$= S^-_{f|_{[a,c]}}(Z') + S^-_{f|_{[c,b]}}(Z'')$ Eine entsprechende Rechnung liefert eine analoge Gleichung für $S^+_f(Z)$.

zu (i) „$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. f Riemann-int. $\Rightarrow \exists$ Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $S^+_f(Z) - S^-_f(Z) < \varepsilon$. Die Ungleichung bleibt erhalten, wenn Z durch $Z \cup \{c\}$ ersetzt wird (da dies eine Verfeinerung von Z ist). Deshalb setze o.B.d.A. $c \in Z$ voraus. Sei $Z' = Z \cap]a,c[$, $Z'' = Z \cap]c,b[$. $\Rightarrow \underbrace{\left(S^+_{f|_{[a,c]}}(Z') - S^-_{f|_{[a,c]}}(Z')\right)^{(*_1)}}_{\geq 0} +$

$\underbrace{\left(S^+_{f|_{[c,b]}}(Z'') - S^-_{f|_{[c,b]}}(Z'')\right)^{(*_2)}}_{\geq 0} = S^+_{f|_{[a,c]}}(Z') + S^+_{f|_{[c,b]}}(Z'')$

CA

(Z'')

$|_{[c,b]}$

$\frac{1}{2}\varepsilon$

$6,$

$\square$

$$-\left(S^-_{f|_{[a,c]}}(Z') + S^-_{f|_{[c,b]}}(Z'')\right) \;\; \underline{\underline{\leq}}\; 0.$$

$S^+_f(Z) - S^-_f(Z) < \varepsilon$ Daraus folgt dass $(*_1)$ und $(*_2)$ beide kleiner als ε sind. Somit sind die Fkt. $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ beide Riemann-integrierbar.

„$\Longleftarrow$" Vor.: $f|_{[a,c]}$, $f|_{[c,b]}$ sind Riemann-int.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gibt es eine Zerlegung Z' von $[a,c]$ und eine Zerlegung Z'' von $[c,b]$ mit

$S^+_{f|_{[a,c]}}(Z') - S^-_{f|_{[a,c]}}(Z') < \frac{1}{2}\varepsilon$ und

$$S^+_{f|[c,b]}(Z'') - S^-_{f|[c,b]}(Z'') < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Sei $Z = Z' \cup \{c\} \cup Z''$. Dann gilt

$$S^+_f(Z) - S^-_f(Z) \overset{\text{s.o.}}{=} S^+_{f|[a,c]}(Z') + S^+_{f|[c,b]}(Z'')$$

$$- S^-_{f|[a,c]}(Z') - S^-_{f|[c,b]}(Z'') < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$= \varepsilon \Rightarrow f$ ist Riemann-int.

zu (ii) analog zu den Beweisen in Satz 9.6, Details siehe Skript.

$\square$

Definition der gleichmäßigen Stetigkeit

Definition (9.9)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wird auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig genannt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in D$ erfüllt ist.

- Eine gleichmäßig stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist nach dem ε-δ-Kriterium offenbar in jedem Punkt $a \in D$ stetig.
- Nicht jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
  Beispiel: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

Beispiel für eine stetige, nicht gleichmäßig stet

Funktion: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

Angenommen, f ist auf $\mathbb{R}^+$ glm. ste

Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass

alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $|x-y| < \delta$ jewe

$|f(x) - f(y)| < 1$ gilt.

aber: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$, $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = |n-$

$= |-n| = n$ Ist $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{1}{2n} < \delta$ ist.

müsste also $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| < 1$ sein. aber: $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right.\right.$

$= n \geq 1$ $\lightning$.

Satz (9.10)

Jede auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ stetige Funktion ist dort auch gleichmäßig stetig.

Satz (9.11)

Jede stetige Funktion auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall ist Riemann-integrierbar.

aber: $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n}$, $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2n})| = |$

Beweis von Satz 9.10:

geg. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), f s

z.zg.: f ist glm. stetig. Angenommen, f ist nicht

$\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sodass kein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, für dass

$\forall x, y \in [a,b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Insb. gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils Punkte $x_n, y_n \in$

mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| \overset{(*2)}{\geq} \varepsilon$. Nach de

von Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

konvergiert, d.h. $p = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$ existiert in $[a,b]$.

Ziel: Führe die Voraussetzung, dass f stetig in p ist, z

Widerspruch. f stetig in p, $\lim_{k\to}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(p)$

__Beh__: $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = p$ Sei $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$

Wähle $K \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{2}$

$\forall k \geq K$. Wegen $(*)$ kann nach Vergröß

von K auch $|x_{n_k} - p| < \frac{1}{2}\varepsilon_1 \; \forall k$

angenommen werden. $\Rightarrow$ erhalte für all

$k \geq K$: $|y_{n_k} - p| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k}$

$< \frac{1}{n_k} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 < \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \varepsilon_1$ ($\Rightarrow$ Beh

Auf Grund der Beh. und der Stetigkeit von f
in p muss also auch $\lim_{k \to \infty} f(y_{n_k}) = f(p)$ ge
Es gibt somit insb. ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit
$|f(y_{n_{k_1}}) - f(p)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $|f(x_{n_{k_1}}) - f(p)|$

$\Rightarrow |f(x_{n_{k_1}}) - f(y_{n_{k_1}})| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$

Aber wegen $(*_2)$ muss $|f(x_{n_{k_1}}) - f(y_{n_{k_1}})| \geq \varepsilon$
gelten. ↯

$\square$

$(*)$
$x_{n_k} = p$

$+$

$\frac{1}{2}\varepsilon_1$

größerung
$\forall k \geq K$
für alle
$1 + |x_{n_k} - p|$
$(\Rightarrow$ Beh.$)$

Beweis von Satz 9.11:

geg: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. z.zg: f

Riemann-integrierbar

Maximumsprinzip (Satz 5.17) $\Rightarrow$ Es g

Punkte $p, q \in [a, b]$ mit $f(p) = \max$

$f(q) = \min f([a, b])$. o.B.d.A. $f(p) > f$

(sonst ist f konstant und die R-Integrierbar

leicht zu sehen) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

z.zg: $\exists$ Zerlegung Z von $[a, b]$ mit

$$S_f^+(Z) - S_f^-(Z) < \varepsilon.$$

n.

$\frac{1}{2}\varepsilon$

ε

$\square$

Sei $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Auf Grund der glm. Stet

gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass $\forall x, y \in [a, b]$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon'$ gilt. (*)

Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$ erfüllt is

Setze $Z = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ durch $x_k = a + k \cdot \frac{(b-}{}$

$\Rightarrow x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} < \delta$. Da $f|_{[x_k, x_{k+1}]}$ stetig

gibt es jeweils $y_k, z_k \in [x_k, x_{k+1}]$ mit $f(y_k) =$

$\min f([x_k, x_{k+1}])$, $f(z_k) = \max f([x_k, x_{k+1}])$

$\Rightarrow |z_k - y_k| \leq x_{k+1} - x_k < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} f(z_k) - f(y_k) <$

$S_f^+(Z) - S_f^-(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(x_{k+1} - x_k) -$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(z_k)-f(y_k)\right)\left(x_{k+1}-x_k\right.$$

$$< \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon'(x_{k+1}-x_k) = \varepsilon' \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) = \varepsilon'(x$$

$$= \varepsilon'(b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$