Im gesamten Abschnitt bezeichnet $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall positiver Länge, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Definition

- Eine Zerlegung von [a,b] ist eine endliche (eventuell auch leere) Teilmenge $\mathscr{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\} \subseteq \,]a, b[$.
- Mit $\mathrm{Z}(a, b)$ bezeichnen wir die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$.

Die Elemente eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ werden immer so durchnummeriert, dass $x_k < x_{k+1}$ für $1 \leq k < n - 1$ erfüllt ist. Außerdem setzen wir stets $x_0 = a$ und $x_n = b$.

Definition der Unter- und Obersummen

Definition (9.1)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei $\mathscr{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$.
Für jedes k mit $0 \le k < n$ definieren wir

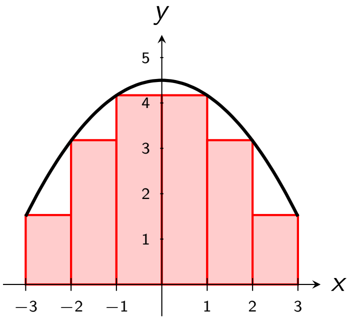
$$c_k = \inf f([x_k, x_{k+1}]) \text{ und } d_k = \sup f([x_k, x_{k+1}]).$$

Dann bezeichnet man

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) \text{ bzw. } \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k(x_{k+1} - x_k)$$

als Unter- bzw. Obersumme von f bezüglich der Zerlegung $\mathscr{Z}$.

Veranschaulichung der Unter- und Obersummen



Definition Riemann-integrierbarer Funktionen

Definition (9.2)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann bezeichnet man

$$\int_{a\bigstar}^{b} f(x)\,dx \quad = \quad \sup\left\{\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \;\middle|\; \mathscr{Z} \in \mathrm{Z}(a,b)\right\} \quad \text{bzw.}$$

$$\int_{a}^{b\bigstar} f(x)\,dx \quad = \quad \inf\left\{\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) \;\middle|\; \mathscr{Z} \in \mathrm{Z}(a,b)\right\}$$

als Unter- bzw. Oberintegral der Funktion f. Stimmen Unter- und Oberintegral von f überein, dann bezeichnet man f als Riemann-integrierbar und nennt

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad = \quad \int_{a\bigstar}^{b} f(x)\,dx \quad = \quad \int_{a}^{b\bigstar} f(x)\,dx$$

das Riemann-Integral der Funktion f.

(Unter- und Oberintegral haben stets endliche Werte.)

Verfeinerung von Zerlegungen

Ist $\mathscr{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ eine Zerlegung, dann bezeichnet man

$\delta(\mathscr{Z}) = \max \{ \, x_{k+1} - x_k \ \mid 0 \le k < n \}$ als Feinheit der Zerlegung.

Eine Zerlegung $\mathscr{Z}'$ heißt Verfeinerung von $\mathscr{Z}$, wenn $\mathscr{Z}' \supseteq \mathscr{Z}$ gilt.

Lemma (9.3)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und seien $\mathscr{Z}$, $\mathscr{Z}'$ Zerlegungen von $[a, b]$, wobei $\mathscr{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathscr{Z}$ ist. Dann gilt

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}') \ge \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \quad \text{und} \quad \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}') \le \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}).$$

Beweis von Lemma 9.3

geg. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

Z, Z' Zerlegungen von $[a,b]$ mit $Z' \supseteq Z$

Sei $Z = \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$, $Z' = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ $(m, n \in \mathbb{N})$

(Laut Konvention ist $x_0 = y_0 = a$, $x_m = y_n = b$.)

Für $0 \le k < m$ sei $c_k = \sup f([x_k, x_{k+1}])$, und

für $0 \le l < n$ sei $d_l = \sup f([y_l, y_{l+1}])$.

Dann gilt $S_f^+(Z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (x_{k+1} - x_k)$ und

$$S_f^+(Z') = \sum_{l=0}^{n-1} d_l (y_{l+1} - y_l). \quad Z \subseteq Z' \Rightarrow$$

Für $1 \le k \le m-1$ gibt es jeweils ein $l_k \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $y_{l_k} = x_k$. Setze $l_0 = 0$, $l_m = n$. $\Rightarrow l_0 < l_1 < \dots < l_m$

Für $0 \le k \le m-1$ und $l_k \le l \le l_{k+1} - 1$ gilt jeweils

$$[y_l, y_{l+1}] \subseteq [y_{l_k}, y_{l_{k+1}}] = [x_k, x_{k+1}] \Rightarrow$$

$$f([y_l, y_{l+1}]) \subseteq f([x_k, x_{k+1}]) \Rightarrow d_l = \sup f([y_l, y_{l+1}])$$

$$\le \sup f([x_k, x_{k+1}]) = c_k \Rightarrow S_f^+(Z') = \sum_{l=0}^{n-1} d_l (y_{l+1} - y_l)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=l_k}^{l_{k+1}-1} d_l (y_{l+1} - y_l) \le \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{l=l_k}^{l_{k+1}-1} (y_{l+1} - y_l) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (y_{l_{k+1}} - y_{l_k})$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} c_k (x_{k+1} - x_k) = S_f^+(Z) \text{. Da}$$

Beweis von $S_f^-(Z') \geq S_f^-(Z)$ läuft analog $\square$

Unterintegral $\leq$ Oberintegral

Folgerung (9.4)

Für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{a\star}^{b} f(x)\, dx \quad \leq \quad \int_{a}^{b\star} f(x)\, dx.$$

Für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und jede Zerlegung $\mathscr{Z}$ von $[a, b]$ gelten also die Ungleichungen

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \leq \int_{a\star}^{b} f(x)\, dx \leq \int_{a}^{b\star} f(x)\, dx \leq \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}).$$

Beweis von Folgerung 9.4

geg. beschränkte Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

Beh.: $\int_{a*}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{b*} f(x)\,dx$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach Def. des Unterintegrals als Supremum existiert eine Zerlegung Z' mit $S_f^-(Z') > \int_{a*}^{b} f(x)\,dx - \varepsilon$. Nach Def. des Oberintegrals als Infimum existiert eine Zerlegung Z'' mit $S_f^+(Z'') < \int_{a}^{b*} f(x)\,dx + \varepsilon$.

Sei $Z = Z' \cup Z''$. Das ist eine gemeinsame

Verfeinerung von Z' und Z''. Lemma 9.3 $\Rightarrow$

$$\Sigma_f^+(Z) \leq \Sigma_f^+(Z''), \quad \Sigma_f^-(Z) \geq \Sigma_f^-(Z')$$

Ist $Z = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, dann gilt

$$\Sigma_f^+(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup f([x_k, x_{k+1}]) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} \inf f([x_k, x_{k+1}]) \cdot (x_{k+1} - x_k) = \Sigma_f^-(Z)$$

$$\Rightarrow \int_a^{b*} f(x)\,dx - \int_{a*}^{b} f(x)\,dx \geq (\Sigma_f^+(Z'') - \varepsilon)$$

$$-(\Sigma_f^-(Z') + \varepsilon) \geq \Sigma_f^+(Z) - \Sigma_f^-(Z) - 2\varepsilon$$

$\geq -2\varepsilon$ Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. klein gewählt werden kann, folgt $\int_a^{b^*} f(x)\,dx - \int_{a_*}^{b} f(x)\,dx \geq 0$

$\square$

s

des

e

$dx + \varepsilon$

me

Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit

Satz (9.5)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.

(ii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ mit $\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) - \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) < \varepsilon$.

Beweis von Satz 9.5

geg. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, z.zg.

f Riemann-integrierbar $\Longleftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es eine Zerlegung Z mit $S_f^+(Z) - S_f^-(Z) < \varepsilon$

„$\Longrightarrow$"

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Def. des Unterintegrals $\Rightarrow \exists$ Zerlegung Z' mit

$S_f^-(Z') > \int_{a*}^{b} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}\varepsilon$ ebenso

$\exists$ Zerlegung Z'' mit $S_f^+(Z'') < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Sei $Z = Z' \cup Z''$. $\Rightarrow S_f^+(Z) - S_f^-(Z) \leq$

$$\sum\nolimits_f^+(Z'') - \sum\nolimits_f^-(Z') < \int_a^b f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\varepsilon - \left(\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\varepsilon\right) = \varepsilon$$

„$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und Z eine Zerlegung, so dass die Vor. erfüllt ist. $\Rightarrow$ $\sum_f^-(Z) \leq \int_{a*}^{b} f(x)\,dx \leq \int_a^{b*} f(x)\,dx \leq \sum_f^+(Z)$

Wegen $\sum_f^+(Z) - \sum_f^-(Z) < \varepsilon$ folgt

$0 \leq \int_a^{b*} f(x)\,dx - \int_{a*}^{b} f(x)\,dx < \varepsilon$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. klein gewählt werden kann, folgt $\int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{b*} f(x)\,dx$. $\square$

$\Rightarrow$ f ist Riemann-integrierbar.

Beispiel für eine nicht Riemann-integrierbare Funktion

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, denn es gilt

$$\int_0^{1\star} f(x)\,dx = 1 \text{ und } \int_{0\star}^1 f(x)\,dx = 0.$$

geg. $f: [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Beh. (i) $\int_0^{1*} f(x)\,dx = 1$ (ii) $\int_{0*}^{1} f(x)\,dx = 0$

zu (i) Sei $Z = \emptyset \Rightarrow S_f^+(Z) = \sup f([0,1])\,(1-0)$ $= 1 \cdot (1-0) = 1$. Da $\int_0^{1*} f(x)\,dx$ das Infimum der Obersummen ist, folgt $\int_0^{1*} f(x)\,dx \le 1$. Für die Ungleichung $\int_0^{1*} f(x)\,dx \geq 1$ muss gezeigt werden, dass für jede Zerlegung Z jeweils $S_f^+(Z) \geq 1$ gilt.

Sei also $Z = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ eine bel. Zerlegung. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, existiert in jedem Intervall $]x_k, x_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq n-1)$ eine rationale Zahl. $\Rightarrow \sup f([x_k, x_{k+1}]) = 1$, $0 \leq k \leq n-1$

$$\Rightarrow S_f^+(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup f([x_k, x_{k+1}]) \cdot (x_{k+1} - x_k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

<u>zu iii)</u> Hier verwendet man, dass die irrationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen. $\square$

Rechenregeln für das Riemann-Integral I

Satz (9.6)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und λf Riemann-integrierbar. Außerdem gilt

(i) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$

(iii) Aus $f \leq g$ folgt $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

Beweis von Satz 9.6:

geg.: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-int.

zu (i) z.zg.: $f+g$ ist Riemann-int., und

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Zeige zunächst: Ist $Z = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ eine bel. Zerlegung von $[a,b]$, dann gilt

$$S^+_{f+g}(Z) \le S^+_f(Z) + S^+_g(Z) \quad \text{und}$$

$$S^-_{f+g}(Z) \ge S^-_f(Z) + S^-_g(Z).$$

Überprüfe: Für $0 \leq k \leq n-1$ gilt jeweils

$\sup\left((f+g)([x_k, x_{k+1}])\right) \leq \sup f([x_k, x_{k+1}]) + \sup g([x_k, x_{k+1}])$ denn: Für jedes x aus $[x_k, x_{k+1}]$ gilt $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f([x_k, x_{k+1}]) + \sup g([x_k, x_{k+1}])$ $\rightarrow$

Also ist $\sup f([x_k, x_{k+1}]) + \sup g([x_k, x_{k+1}])$ eine obere Schranke von $(f+g)([x_k, x_{k+1}])$.

Da das Supremum von $(f+g)([x_k, x_{k+1}])$ die kleinste obere Schranke ist, folgt die Aussage.

Es folgt $\sum_f^+(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup (f+g)([x_k, x_{k+1}])(x_{k+1} - x_k)$

$\le \sum_{k=0}^{n-1} \sup f([x_k, x_{k+1}])(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \sup g([x_k, x_{k+1}])(x_{k+1} - x_k)$

$= \sum_f^+(Z) + \sum_g^+(Z)$ Der Beweis der anderen Ungleichung läuft analog.

Riemann-Integrierbarkeit von $f+g$:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. f, g Riemann-Integrierbar $\Rightarrow \exists$ Zerlegungen Z', Z'' von $[a, b]$ mit

$\sum_f^+(Z') - \sum_f^-(Z') < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\sum_g^+(Z'') - \sum_g^-(Z'') < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Sei $Z = Z' \cup Z''$. Dann gelten beide Ungleichungen auch mit Z statt mit Z' bzw. Z''.

$$\Rightarrow S^+_{f+g}(Z) - S^-_{f+g}(Z) \overset{\text{s.o.}}{\leq} S^+_f(Z) + S^+_g(Z) - S^-_f(Z) - S^-_g(Z)$$

$$= S^+_f(Z) - S^-_f(Z) + S^+_g(Z) - S^-_g(Z) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Beweis der Gleichung $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$:

$$S^-_f(Z) + S^-_g(Z) \leq S^-_{f+g}(Z) \leq \boxed{\int_a^b (f+g)(x)\,dx} \leq$$

$$S^+_{f+g}(Z) \leq S^+_f(Z) + S^+_g(Z)$$

$$S^-_f(Z) + S^-_g(Z) \leq \boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx} \leq S^+_f(Z) + S^+_g(Z)$$

Da die Differenz von $S^+_f(Z) + S^+_g(Z)$ und $S^-_f(Z) + S^-_g(Z)$

$$\underline{S}_f(Z) + \underline{S}_g(Z) \leq \left| \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \right| \leq \overline{S}_f(Z) + \overline{S}_g(Z)$$

Da die Differenz von $S_f^+(Z) + S_g^+(Z)$ und $S_f^-(Z) + S_g^-(Z)$ kleiner als ε ist, muss auch der Abstand zwischen $\int_a^b (f+g)(x)\,dx$ und $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (d.h. der Betrag der Differenz) kleiner als ε sein. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, müssen die Werte übereinstimmen.