Definition (8.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein beliebiger Punkt. Man nennt a ein

(i) lokales Maximum von f, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \varepsilon$ gilt, und ein

(ii) globales Maximum von f, wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Entsprechend sind die Begriffe lokales bzw. globales Minimum definiert.

Das Wort Extremum ist der gemeinsame Oberbegriff für Minimum und Maximum.

notwendiges Kriterium für Extrema

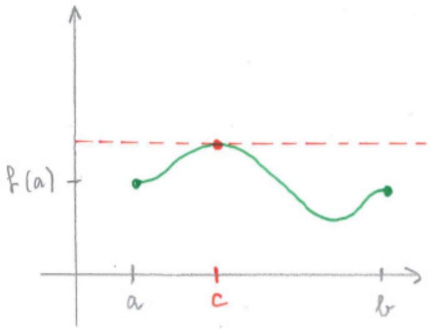
Proposition (8.2)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein lokales Extremum von f. Ist die Funktion f in a differenzierbar, dann gilt $f'(a) = 0$.

Satz von Rolle

Satz (8.3)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$, die darüber hinaus auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann gibt es ein $c \in \,]a, b[$ mit $f'(c) = 0$.

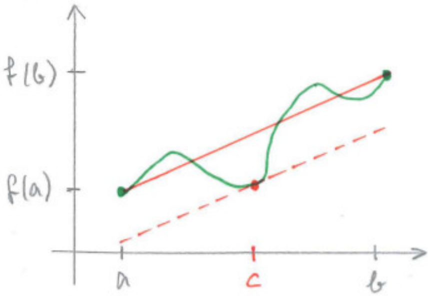


Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz (8.4)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) \quad = \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Ableitung und Monotonieverhalten

Folgerung (8.5)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f'(x) = 0$ für alle $x \in \,]a, b[$. Dann ist f auf $[a, b]$ konstant.

Satz (8.6)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion.

(i) Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \,]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend.

(ii) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \,]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ streng monoton wachsend.

(iii) Gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \,]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ monoton fallend.

(iv) Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in \,]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ streng monoton fallend.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Satz (8.7)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen, wobei wir $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ voraussetzen. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis von Satz 8.7

geg $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, stetig auf $[a, b]$,
diff'bar auf $]a, b[$, $\forall x \in]a, b[: g'(x) \neq 0$

[Hilfsfunktion beim herkömmlichen Mittelwertsatz:
$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$
]

Hier betrachten wir die Hilfsfunktion
$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$
(Dabei ist $g(a) = g(b)$ unmöglich, da sonst nach dem Satz von Rolle ein $c \in]a, b[$ mit $g'(c) = 0$ existieren würde.)

mit $g'(c) = 0$ existieren würde.)

Bew. $h(a) = h(b)$ $\quad h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g(a)$

$$= \frac{f(a)\,(g(b)-g(a))}{g(b)-g(a)} - \frac{f(b)g(a) - f(a)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$= \frac{f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - f(b)g(a) + \cancel{f(a)g(a)}}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g(b) = \frac{\cancel{f(b)g(b)} - g(a)f(b) - \cancel{f(b)g(b)} + f(a)g(b)}{g(b)-g(a)}$$

$$= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

Satz von Rolle $\Rightarrow \exists\, c \in\,]a,b[$ mit $h'(c) = 0$.

$$\Rightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-g(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \square$$

Satz (8.8)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ein Berührpunkt von I. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit den Eigenschaften $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und entweder

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to a} g(x) \in \{\pm\infty\}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dies soll bedeuten: Existiert der Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ auf der rechten Seite der Gleichung, dann existiert auch der Grenzwert auf der linken Seite und hat denselben Wert c.

Anwendung der l'Hospitalschen Regel

Berechnung von $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1-e^x}$

Wende die Regel auf die Funktionen
$f(x) = x$ und $g(x) = 1 - e^x$ an.
Beide Fkt. sind diff'bar, $f'(x) = 1$,
$g'(x) = -e^x$. Es gilt $g'(x) = -e^x \neq 0$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Fkt. f und g sind
in 0 stetig, somit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$,
$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$.

Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{(-e^x)} = \frac{1}{(-e^0)}$

$= \frac{1}{(-1)} = -1$ Aus der l'Hospitalschen

Regel folgt also $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x} = -1$

$\neq 0$

sind

$(0) = 0$.

$= 0$

Beweis der l'Hospitalschen Regel

$f, g : I \to \mathbb{R}$ diff'bar, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ Berühr-punkt von I. Vor.: $c \overset{(*)}{=} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert.

<u>1. Fall</u>: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \quad (***)$

z.zg.: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.

z.zg. Es gibt eine Umgebung U von a, so dass $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \varepsilon$ für alle $x \in I \cap U$ gilt. $(**)$

$(*) \Rightarrow \exists$ Umg. V von a, so dass $\left| \dfrac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \frac{1}{2} \varepsilon$

Ersetze I durch $I \cap V$. Danach ist $(**)$ für alle $x \in I$ erfüllt. Für alle $x, y \in I$ mit $x \neq y$ ist $g(x) \neq g(y)$, da sonst nach dem Satz von Rolle ein z zwischen x und y mit $g'(z) = 0$ existieren würde.

verallgem. Mittelwertsatz $\Rightarrow$ Für alle $x, y \in I$ mit $x \neq y$ existiert ein z zwischen x und y mit

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (*_4)$$

Für jedes $x \in I$ gilt wegen $(***)$ jeweils

$$\lim_{y \to a} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Wähle $x \in I$ bel.

Nach Verkleinerung von I gilt somit $\left| \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right|$

$< \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall y \in I$. Für jedes $y \in I$ mit $x \neq y$ existiert nun ein z zwischen x und y mit $(*_4)$, und insgesamt erhalten wir

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} + \frac{f'(z)}{g'(z)} - c \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \right| + \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - c \right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

2. Fall: $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x) \in \{\pm\infty\}$

Hier betrachtet man an Stelle Differenz von $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$ und $\frac{f(x)}{g(x)}$ den Quotienten $\frac{\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1-\frac{f(y)}{f(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}$. Details siehe Skript. $\square$

Folgerung aus der l'Hospital'schen Regel

Satz (8.9)

Für jede Polynomfunktion p gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0.$$

Definition der zweiten Ableitung

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Sei $D_1 \subseteq D$ gegeben durch

  $$D_1 = \{x \in D \mid f \text{ ist in } x \text{ differenzierbar}\}.$$

  Dann ist durch die erste Ableitung eine Funktion $f' : D_1 \to \mathbb{R}$ definiert.

- Wir bezeichnen f als zweimal differenzierbar an der Stelle $x \in D$, wenn x in D_1 liegt und die Funktion f' in x differenzierbar ist. Man bezeichnet dann $f''(x) = (f')'(x)$ als die zweite Ableitung von f an der Stelle x.

Definition höherer Ableitungen

Ableitungen beliebiger Ordnung lassen sich rekursiv definieren. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ wie oben, $D_0 = D$ und $f^{(0)} = f$. Ist die n-te Ableitung $f^{(n)} : D_n \to \mathbb{R}$ bereits definiert, dann setzen wir

$$D_{n+1} = \{x \in D_n \mid f^{(n)} \text{ ist in } x \text{ differenzierbar}\}$$

und $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ für alle $x \in D_{n+1}$.

- Ist $x \in D_n$, so bezeichnen wir f als n-mal differenzierbar in x.
- Ist $f^{(n)}$ außerdem in x stetig, so bezeichnet man f an der Stelle x als n-mal stetig differenzierbar.

Definition der Taylorpolynome

Definition (8.10)

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a \in D$, dann nennt man

$$\tau_1(f, a) \quad = \quad f(a) + f'(a)(x-a)$$

das Taylorpolynom erster Ordnung von f an der Stelle a.

Definition (8.11)

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $a \in D$, dann nennt man

$$\tau_2(f, a) \quad = \quad f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an der Stelle a.

Setzen wir $p_k = \tau_k(f, a)$ für $k = 1, 2$, dann gilt $p_1(a) = f(a)$ und $p_1'(a) = f'(a)$. Das zweite Taylorpolynom erfüllt diese Bedingungen ebenfalls, und darüber hinaus auch $p_2''(a) = f''(a)$.

Beispiel für Taylorpolynome

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 5x + 7$ und die Stelle $a = 1$. Es gilt $f'(x) = 2x - 5$ und $f''(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Taylorpolynome sind somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_1(f,1)(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) = 3 + (-3)(x-1) \\ &= -3x + 6 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tau_2(f,1)(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 \\ &= -3x + 6 + \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-1)^2 = -3x + 6 + (x^2 - 2x + 1) \\ &= x^2 - 5x + 7. \end{aligned}$$

Die Funktion f stimmt also mit dem Taylorpolynom zweiter Ordnung überein!

Taylorreihen

Als „Taylorpolynom unendlicher Ordnung“ kann die Taylorreihe

$$\tau(f,a) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

angesehen werden. Viele bekannte Funktionen können durch ihre Taylorreihe dargestellt werden. Beispielsweise stimmt die Exponentialfunktion mit ihrer eigenen Taylorreihe überein, denn es gilt

$$\begin{aligned} \tau(\exp,0) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp^{(n)}(0)(x-0)^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp(0) x^n \\ &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad = \quad \exp(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Ebenso kann man leicht nachrechnen, dass Sinus- und Kosinusfunktion mit ihrer Taylorreihe übereinstimmen.

Existenz beidseitiger Grenzwerte

Lemma (8.12)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ und $f :]a, b[\setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wenn die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x \to c} (f|_{]a,c[})(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to c} (f|_{]c,b[})(x)$$

existieren und übereinstimmen, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to c} f(x)$, und es gilt $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (f|_{]a,c[})(x) = \lim_{x \to c} (f|_{]c,b[})(x)$.

Beweis von Lemma 8.12:

Vor: $u = \lim_{x \to c} (f|_{]a,c[})(x) = \lim_{x \to c} (f|_{]c,b[})(x)$

existiert (mit $u \in \mathbb{R}$)

zzg: $\lim_{x \to c} f(x) = u$. Sei (x_n) eine Folge in $D =]a,b[\setminus \{c\}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = c$. zzg: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = u$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\lim_{x \to c} (f|_{]a,c[})(x) = u \Rightarrow$ Es existiert ein $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x \in]a,c[$ mit $|x-c| < \delta_1$ jeweils $|f(x) - u| = |(f|_{]a,c[})(x) - u| < \varepsilon$ gilt. $(*_1)$

$\lim_{x \to c} (f|_{]c,b[})(x) = u \Rightarrow \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in]c,b[$ mit

$|x-c| < \delta_2$ jeweils $|f(x)-u| = |(f|_{]c,b[})(x)| < \varepsilon$ $(*_2)$

Sei $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $\lim_{n \to \infty} x_n = c \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$|x_n - c| < \delta \ \forall n \geq N$. Bew.: $|f(x_n) - u| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

Sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

1. Fall: $x_n < c$ (also $x_n \in]a,c[$) $|x_n - c| < \delta \leq \delta_1$

$(*_1) \Rightarrow |f(x_n) - u| < \varepsilon$

2. Fall: $x_n > c$ (also $x_n \in]c,b[$) $|x_n - c| < \delta \leq \delta_2$

$(*_2) \Rightarrow |f(x_n) - u| < \varepsilon$. $\square$

Anmerkung:

Nach Proposition 7.2 ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt a von D genau dann differenzierbar, wenn eine Funktion $\psi : D \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(x) = \tau_1(f,a)(x) + \psi(x) \text{ für alle } x \in D \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{x-a} = 0 \quad \text{gilt.}$$

Satz (8.13)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt, in dem f zweimal differenzierbar ist. Dann gibt es eine Funktion $\psi : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \tau_2(f,a)(x) + \psi(x) \text{ für alle } x \in D \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{(x-a)^2} = 0.$$