Definition der Stetigkeit

Definition (5.7)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$. Man sagt, die Funktion f ist stetig im Punkt a, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ in D die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \qquad\qquad \text{gilt.}$$

Die Funktion f wird stetig genannt, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiele für stetige Funktionen

(i) Jede konstante Funktion auf einer beliebigen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ist stetig.

(ii) Für jede Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ist die identische Abbildung id_D stetig.

(iii) Die Betragsfunktion $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig.

(iv) Die Signumsfunktion $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{sgn}(x) \quad = \quad \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Sie ist im Punkt 0 unstetig, in allen übrigen Punkten stetig.

Stetigkeit der rationalen Funktionen

Proposition (5.9)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, und sei $a \in D$. Wenn die Funktionen f und g im Punkt a stetig sind, dann gilt dasselbe für $f + g$ und fg. Ist der Quotient $\frac{f}{g}$ auf D definiert, so ist auch $\frac{f}{g}$ in a stetig.

Folgerung (5.10)

Alle Polynomfunktionen und rationalen Funktionen sind jeweils auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Die Komposition stetiger Funktionen

Proposition (5.11)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Dann ist auch die Funktion $(g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Proposition (5.8)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, $D_a = D \setminus \{a\}$ und $\tilde{f} = f|_{D_a}$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist stetig in a.

(ii) Es gilt $\lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = f(a)$, oder a ist in D ein isolierter Punkt.

konkretes Beispiel zu Prop. 5.8.

Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

$a = 1$, $D_a = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

- Die Funktion f ist in 1 stetig (wie in jedem anderen Punkt von D auch).
- $\lim\limits_{x \to 1} \tilde{f}(x) = f(1) = 1$

Das ε-δ-Kriterium

Satz (5.12)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Genau dann ist f stetig in a, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad x \in D \quad \text{erfüllt ist.}$$

Beweis von Satz 5.12:

geg.: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ z.zg.:

f ist stetig in a $\iff$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; \forall x \in D$:

$$|x-a| < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

„$\Leftarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

z.zg.: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg.:

$\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N: |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |x_n - a| < \delta$

Auf Grund der Voraussetzung folgt $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

"$\Longrightarrow$" Beweis durch Kontraposition

Vor.: Die Aussage auf der rechten Seite gilt nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ die Implikation (*) nicht erfüllt ist. Für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt es somit ein $x \in D$, so dass einerseits $|x-a| < \delta$, andererseits aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ gilt. Insbesondere gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Beh

mit

Für diese Folge gilt dann zwar $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, denn: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Andererseits gilt aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt <u>kein</u> $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \; \forall n \geq N$.

$\Rightarrow$ Es gilt <u>nicht</u> $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

Also zeigt die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dass f in a nicht stetig ist. $\square$

S

Ang

Sei

1. Fal

2. Fal

überp

alle

Nachtrag zu § 2 : Umgebungen von Punkten in $\bar{\mathbb{R}}$

Definition (2.15)

Seien $a \in \bar{\mathbb{R}}$ und $U \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ vorgegeben. Wir bezeichnen die Menge U als Umgebung des Punktes a

(i) im Fall $a \in \mathbb{R}$, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq U$ erfüllt ist

(ii) im Fall $a = +\infty$, wenn ein $\kappa \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $]\kappa, +\infty] \subseteq U$ gilt,

(iii) im Fall $a = -\infty$, wenn ein $\kappa \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $[-\infty, -\kappa[\subseteq U$ gilt.

Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann (eigentlich oder uneigentlich) gegen einen Punkt $a \in \bar{\mathbb{R}}$, wenn für jede Umgebung $U \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ von a ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \in U$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

Das ε-δ-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

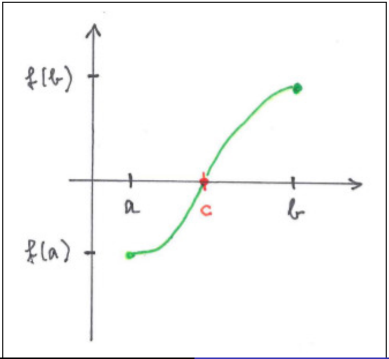
Satz (5.13)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a, c \in \bar{\mathbb{R}}$, wobei a ein Berührpunkt von D sei. Unter diesen Voraussetzungen gilt $\lim_{x \to a} f(x) = c$ genau dann, wenn für jede Umgebung V von c eine Umgebung U von a mit $f(U \cap D) \subseteq V$ existiert.

Der Zwischenwertsatz

Satz (5.14)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I = [a, b]$. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert ein $c \in I$ mit $f(c) = 0$. Dasselbe gilt, wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ ist.



Folgerungen aus dem Zwischenwertsatz

Folgerung (5.15)

Sei I wie oben und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $d \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < d < f(b)$. Dann gibt es ein $c \in I$ mit $f(c) = d$. Dasselbe gilt auch im Fall $f(a) > d > f(b)$.

(Beweis: Wende den Zwischenwertsatz auf $g(x) = f(x) - d$ an.)

Folgerung (5.16)

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, und ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist auch $f(I)$ ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Beweis von Folgerung 5.16:

z.zg: $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall

Seien $c, d \in f(I)$ vorgeg., wobei $c < d$, und $u \in \mathbb{R}$ mit $c < u < d$. z.zg: $u \in f(I)$

$c, d \in f(I) \Rightarrow \exists a, b \in I$ mit $c = f(a)$, $d = f(b)$

1. Fall: $a < b$ I Intervall $\Rightarrow [a, b] \subseteq I$

$c = f(a) < u$, $d = f(b) > u$, f stetig $\xRightarrow[\text{wendet auf } [a,b]]{\text{ZWS ange-}}$ $\exists c \in I$ mit $f(c) = u \Rightarrow u \in f(I)$

2. Fall: $b < a$ analog. wende ZWS auf $[b, a]$ an. $\square$

Das Maximumsprinzip

Satz (5.17)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I = [a, b]$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion f auf I beschränkt, was bedeutet, dass die Wertemenge

$$M \quad = \quad \{f(x) \mid x \in I\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}$$

von f beschränkt ist. Außerdem nimmt die Funktion auf I ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es gibt $p, q \in I$ mit $f(p) = \max M$ und $f(q) = \min M$.

Beweis von Satz 5.17:

geg: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig

zeige nun: $M = f(I) = \{ f(x) \mid x \in I \}$ ist nach oben beschränkt, und f nimmt in einem Punkt von I ihr Maximum an

Sei $s = \sup(M)$ wobei $s = +\infty$ falls M nach oben unbeschränkt

<u>Beh</u>: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = s$.

1 <u>Fall</u>: $s \in \mathbb{R}$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in I$ mit

$s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$ (sonst wäre $s - \frac{1}{n}$ eine obere Schranke von M, im Widerspruch zur Def. des Supremums) $\lim_{n \to \infty} (s - \frac{1}{n}) = s$

Sandwich-Lemma $\Longrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = s$.

2. <u>Fall</u>: $s = +\infty$ Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in I$ mit $f(x_n) > n$, denn ansonsten wäre n eine obere Schranke von M. Es gilt dann $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, denn:

Sei $K \in \mathbb{R}^+$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > K$. Für alle $n \geq N$ gilt dann $f(x_n) \geq n \geq N > K$. $(\Rightarrow$ Beh.$)$

Wegen $x_n \in I \ \forall n \in \mathbb{N}$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in jedem Fall eine beschränkte Folge.

Satz von Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$

gi
mo
Be

(ii) f

zu i)
$a, b \in$
1. Fall

jedem Fall eine beschränkte Folge

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungspunkt $\Rightarrow$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge
$(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ Sei $c = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

f stetig $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$

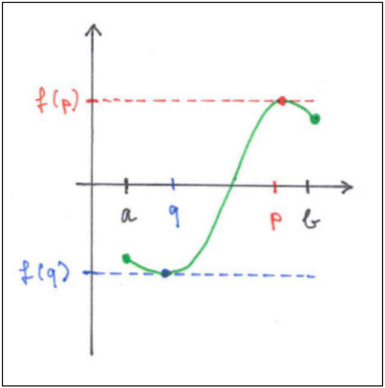
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = s \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = s$

$\Rightarrow s = f(c) \in \mathbb{R} \Rightarrow s = +\infty$ unmöglich

$\Rightarrow M$ ist nach oben beschränkt

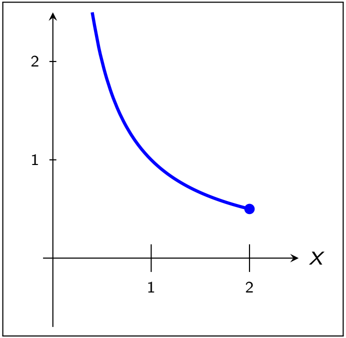
Außerdem nimmt f ihr Maximum wegen
$f(c) = s$ im Punkt c an. $\square$

Veranschaulichung des Maximumsprinzips



Beschränkung des Maximumsprinzips auf endliche abgeschlossene Intervalle

Für offene oder halboffene Intervalle ist die Aussage falsch, wie das Beispiel $f :]0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ zeigt. Offenbar ist diese Funktion nach oben unbeschränkt.



Umkehrfunktionen

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass die Menge D bijektiv auf $E = f(D)$ abgebildet wird. Dann nennt man die Umkehrabbildung $g = f^{-1} : E \to D$ auch die Umkehrfunktion von f.

Beispiele:

- Für ungerades $k \in \mathbb{N}$ ist die k-te Wurzelfunktion $r_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$, gegeben durch die in § 1 definierte k-te Wurzel, die Umkehrfunktion von $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$.
- Für gerades $k \in \mathbb{N}$ ist k-te Wurzelfunktion $r_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ die Umkehrfunktion von $p_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^k$.

Monoton wachsende und monoton fallende Funktionen

Definition (5.18)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wird monoton wachsend genannt, wenn aus $a \leq b$ stets $f(a) \leq f(b)$ folgt. Von einer streng monoton wachsenden Funktion spricht man, wenn im Fall $a < b$ immer $f(a) < f(b)$ erfüllt ist. Entsprechend sind die Begriffe monoton fallend bzw. streng monoton fallend definiert.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

Satz (5.19)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann ist f eine Bijektion auf ihr Bild $f(I)$, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beispielsweise ist die k-te Wurzelfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (für ungerades k) bzw. $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (für gerades k) eine stetige, streng monoton wachsende Funktion.

Beweis von Satz 5.19:

geg: $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend

Beh: (i) f ist eine Bijektion zwischen I und $J = f(I)$ (nach Folgerung 5.16 ist dies ein Intervall)

(ii) $f^{-1}: J \to I$ ist streng mon. wachsend

<u>zu (i)</u> $f: I \to J$ ist injektiv, denn: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. z.zg: $f(a) \neq f(b)$

1. Fall: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

ge | $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. z.zg: $f(a) \neq f(b)$

$\Rightarrow$

2. Fall: $a > b \Rightarrow f(a) > f(b) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

olge

Als Abb. $f: I \to J$ ist f surjektiv, denn für jedes $c \in J = f(I)$ ex. ein $x \in I$ mit $f(x) = c$, nach Def. der Bildmenge.

s

zu (ii) Ang., f^{-1} ist nicht streng mon. wachsend. Dann gibt es $c, d \in J$ mit $c < d$ und $f^{-1}(c) \geq f^{-1}(d)$.

unmöglich

<u>1. Fall</u>: $f^{-1}(c) > f^{-1}(d) \xRightarrow[\text{mon. w.}]{f \text{ streng}} f(f^{-1}(c)) > f(f^{-1}(d))$

$\Rightarrow c > d$ ↯ zu $c < d$

n wegen

<u>2. Fall</u>: $f^{-1}(c) = f^{-1}(d) \Rightarrow f(f^{-1}(c)) = f(f^{-1}(d))$

$\Rightarrow c = d$ ↯

$\square$