# Umordnungssatz

## Satz (4.23)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{K}$. Ist $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}.$$

Beweisskizze:

- Zunächst zeigen wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut konvergiert. Es reicht zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\tau(n)}|$ beschränkt ist.

# Beweis des Umordnungssatzes (Forts.)

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{1, \ldots, n\}$, $B_n = \tau(A_n)$ und $b_n = \max(B_n)$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \left|a_{\tau(k)}\right| \;=\; \sum_{k \in B_n} |a_k| \;\leq\; \sum_{k=1}^{b_n} |a_k| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \;<\; +\infty.$$

- Die Folge der Partialsummen ist also durch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ beschränkt.
- Nun zeigen wir, dass die Grenzwerte der Reihen übereinstimmen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $s'_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}$. Wir zeigen $\lim_n (s_n - s'_n) = 0$.
- Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \quad < \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

# Beweis des Umordnungssatzes (Forts.)

- Weil die Abbildung $\tau$ surjektiv ist, existiert ein $N' \geq N$ mit $B_n = \tau(A_n) \supseteq A_N$ für alle $n \geq N'$. Für diese $n$ gilt dann auch

$$s_n - s_n' = \sum_{k \in A_n} a_k - \sum_{k \in B_n} a_k =$$

$$\sum_{k \in A_n} a_k - \sum_{k \in B_n \cap A_N} a_k - \sum_{k \in B_n \setminus A_N} a_k = \sum_{k \in A_n \setminus A_N} a_k - \sum_{k \in B_n \setminus A_N} a_k .$$

- Wegen $A_n \setminus A_N, B_n \setminus A_N \subseteq \{m \mid m \geq N+1\}$ folgt daraus dann

$$|s_n - s_n'| \leq \sum_{k \in A_n \setminus A_N} |a_k| + \sum_{k \in B_n \setminus A_N} |a_k| \leq$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Damit ist $\lim_{n \to \infty} (s_n - s_n') = 0$ nachgewiesen.

# Das Cauchy-Produkt

**Definition (4.24)**

Das Cauchy-Produkt zweier Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ im Körper $\mathbb{K}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit den Termen $c_n$ gegeben durch

$$c_n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

**Satz (4.25)**

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ mit Grenzwerten $a$ und $b$, wobei wir bei mindestens einer der beiden Reihen absolute Konvergenz voraussetzen. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchy-Produkt der beiden Reihen. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad = \quad ab \quad = \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \quad ,$$

das Cauchy-Produkt konvergiert also gegen den Wert $ab$.
Konvergieren beide Reihen absolut, dann gilt dasselbe auch für das Cauchy-Produkt.

# Beweisskizze zu Satz 4.25

- Wir nehmen an, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die absolut konvergente Reihe ist und setzen $v = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ und $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Zu zeigen ist $\lim_n u_n = ab$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $U_n = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_0^2 \mid k + \ell \leq n\}$. Nach Definition des Cauchy-Produkts gilt $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ und somit

$$u_n = \sum_{j=0}^{n} c_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} a_{j-k} b_k = \sum_{(j,k) \in U_n} a_j b_k$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} a_{n-j} b_k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \left( \sum_{k=0}^{j} b_k \right) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} t_j.$$

# Beweisskizze zu Satz 4.25 (Forts.)

- Wir müssen zeigen, dass die Differenz $u_n - ab$ gegen Null konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned} u_n - ab &= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} t_j - ab = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t_j - b) + \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b - ab \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t_j - b) + (s_n - a)b. \end{aligned}$$

- Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|(s_n - a)b| < \frac{1}{3}\varepsilon$ und $|t_j - b| \leq \frac{\varepsilon}{3v}$ für alle $n, j \geq N$. Wir zerlegen die erste Summe von oben für $n \geq N$ weiter in

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t_j - b) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{n-j}(t_j - b) + \sum_{j=N}^{n} a_{n-j}(t_j - b).$$

# Beweisskizze zu Satz 4.25 (Forts.)

- Der Betrag der zweiten Summe kann abgeschätzt werden durch

$$\frac{\varepsilon}{3v}\sum_{j=N}^{n}|a_{n-j}| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3v}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3v}\cdot v \;=\; \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

- Wegen $\lim_n a_{n-j} = 0$ gilt für die erste Summe außerdem

$$\left|\sum_{j=0}^{N-1} a_{n-j}(t_j - b)\right| \quad < \quad \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad ,$$

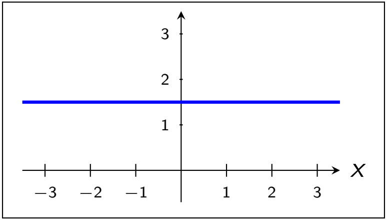
  für hinreichend großes $n$.
- Insgesamt kann $|u_n - ab|$ somit für hinreichend großes $n$ abgeschätzt werden durch $\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$. Es gilt also tatsächlich $\lim_n u_n = ab$.

# Beweisskizze zu Satz 4.25 (Abschluss)

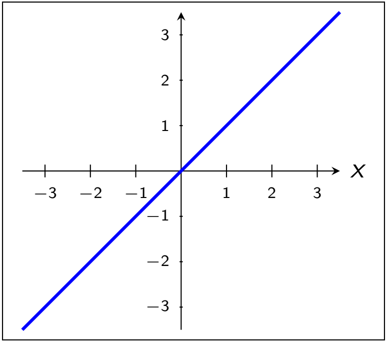
- Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ beide absolut konvergent, dann konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.
- Auf Grund der soeben bewiesenen Aussage ist dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n'$ mit $c_n' = \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}||b_k|$ konvergent.
- Aus der Dreiecksungleichung folgt $|c_n| \leq c_n'$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- Aus dem Majorantenkriterium folgt damit die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir erinnern daran, dass eine (reellwertige) Funktion auf $D$ nichts weiter als eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ ist. Dabei bezeichnet man $D$ als den Definitionsbereich von $f$.

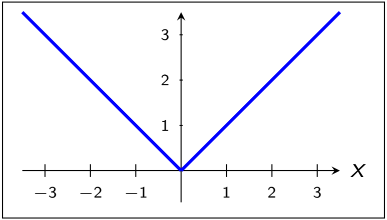
**Beispiel 1:**
Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ die konstante Funktion mit Wert $c$.



**Beispiel 2:**
Die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist eine Funktion.



**Beispiel 3:**
Die Betragsfunktion $\operatorname{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $x \mapsto |x|$.

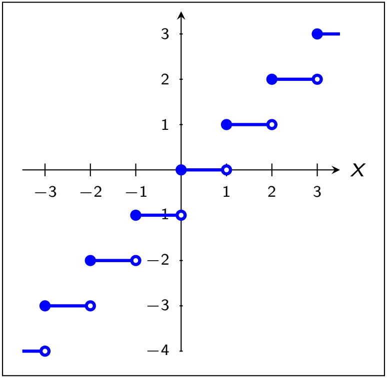


**Beispiel 4:**

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die untere Gaußklammer durch

$$\lfloor x \rfloor \quad = \quad \max \{r \in \mathbb{Z} \mid r \leq x\}.$$

Dann ist durch die Zuordnung $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ebenfalls eine Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.



**Beispiel 5:**
Die Zuordnungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto 2x^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad x \mapsto x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

sind reellwertige Funktionen. Allgemeiner bezeichnet man eine Abbildung der Form

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \qquad \text{mit} \qquad m \in \mathbb{N}_0, \quad a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$$

als (reellwertige) Polynomfunktion.

# Rationale Funktionen

## Definition

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen und $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$. Eine Abbildung der Form

$$h : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \qquad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

wird (reelle) rationale Funktion genannt.

Konkrete Beispiele für rationale Funktionen sind

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x+5}{x^2-1}.$$

# Häufungspunkte, Berührpunkte und isolierte Punkte

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen bezeichnen wir als Folge in $D$, wenn $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

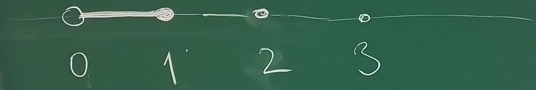
**Definition (5.1)**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Man nennt $a$ einen Häufungspunkt von $D$, wenn eine Folge in $D \setminus \{a\}$ existiert, die (eventuell uneigentlich) gegen $a$ konvergiert. Einen Punkt $a \in D$, der kein Häufungspunkt von $D$ ist, nennt man einen isolierten Punkt von $D$.

Ein Häufungspunkt $a$ von $D$ mit $a \notin D$ auch Berührpunkt der Menge $D$ genannt.

Beispiel zum Begriff des Berührpunkts

$D = ]0,1] \cup \{2,3\}$




isolierte Punkte: 2, 3

Berührpunkt: 0

Häufungspunkte: $[0,1]$

# Kriterien für Berühr- und Häufungspunkte

**Proposition (5.2)**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ und $D_a = D \setminus \{a\}$.

(i) Im Fall $a \in \mathbb{R}$ ist $a$ genau dann ein Häufungspunkt von $D$, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $x \in D_a$ mit $|x - a| < \varepsilon$ existiert.

(ii) Der Punkt $a = +\infty$ ist genau dann Berührpunkt von $D$, wenn für jedes $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ein $x \in D$ mit $x > \kappa$ existiert.

(iii) Der Punkt $a = -\infty$ ist genau dann Berührpunkt von $D$, wenn für jedes $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ein $x \in D$ mit $x < -\kappa$ existiert.

# Definition der Funktionsgrenzwerte

## Definition (5.3)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a, c \in \bar{\mathbb{R}}$. Ist $a$ ein Berührpunkt von $D$, und gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D$ die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \quad ,$$

so bezeichnet man $c$ als Grenzwert von $f$ im Punkt $a$.

**Notation:**

Die Schreibweise $\lim_{x\to a} f(x) = c$ bedeutet, dass $c$ der Grenzwert von $f$ im Punkt $a$ ist.

# Beispiele für Funktionsgrenzwerte

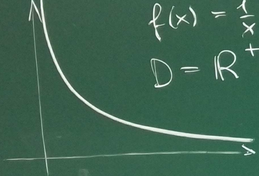
(i) Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(ii) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a$ ein Berührpunkt von $D$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ sei $f_c : D \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion gegeben durch $f_c(x) = c$ für alle $x \in D$. Dann gilt

$$\lim_{x \to a} f_c(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} \mathrm{id}_D(x) = a.$$

# Beispiele für Funktionsgrenzwerte

zu (i)



$f(x) = \frac{1}{x}$

$D = \mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

- 0 ist Berührpunkt von $\mathbb{R}^+$, denn: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\underbrace{}_{}$außerdem: $0 \notin \mathbb{R}^+$
  Dann gilt $x = \frac{1}{2}\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $|x - 0| = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$
- $+\infty$ ist Berührpunkt von $\mathbb{R}^+$, denn: Sei $K \in \mathbb{R}^+$.
  Dann ist $x = K+1 \in \mathbb{R}^+$ und $x = K+1 > K$. außerdem: $+\infty \notin \mathbb{R}^+$
- Nachweis von $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. (*)

z.zg. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. Sei $K \in \mathbb{R}^+$.

z.zg. $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : f(x_n) > K$.

Wende (*) auf $\varepsilon = \frac{1}{K}$ an $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$
$|x_n| < \frac{1}{K}$. Für alle $n \geq N$ gilt somit

$$f(x_n) = \underbrace{\frac{1}{x_n} = \frac{1}{|x_n|}}_{x_n \in \mathbb{R}^+} \underbrace{>}_{|x_n| < \frac{1}{K}} K.$$

- Nachweis von $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (**)

z.zg: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. zu zeigen:

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(x_n) - 0| < \varepsilon$

Anwendung von (**) auf $K = \varepsilon^{-1}$ liefert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n > \varepsilon^{-1}$ $\forall n \geq N$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt

dann $|f(x_n) - 0| = \left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{|x_n|}$

$$= \underbrace{\frac{1}{x_n}}_{x_n \in \mathbb{R}^+} \underbrace{<}_{x_n > \varepsilon^{-1}} \varepsilon.$$

$\square$

# Folgengrenzwerte vs. Funktionsgrenzwerte

**wichtiger Hinweis:**
Die neu definierten Funktionsgrenzwerte sind (trotz der ähnlichen Notation) von den in § 2 definierten Folgengrenzwerten streng zu unterscheiden! Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei wir voraussetzen, dass $+\infty$ ein Berührpunkt des Definitionsbereichs $D$ ist, und $c \in \mathbb{R}$. Dann bedeutet die Gleichung

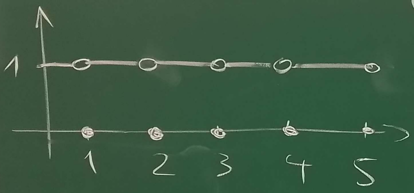
$$\lim_{n\to\infty} f(n) = c$$

etwas völlig anderes als die Gleichung $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$!

- Die Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = c$ bedeutet lediglich, dass die Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $c$ konvergiert.
- Die Gleichung $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ bedeutet: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D$, die uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert, konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionswerte gegen $c$.

**Beispiel**: Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{falls } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$




**Beh**: Es gilt $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$

aber nicht $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

- $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

N
N

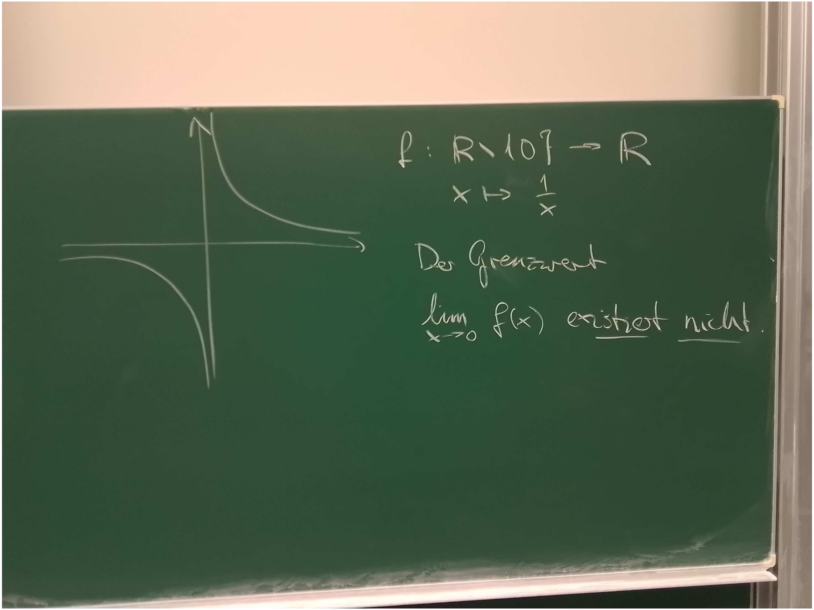
- Angenommen, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Dann müsste für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ jeweils $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ gelten.

Betrachte die Folge geg. durch $x_n = n + \frac{1}{2}$.
Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, denn: Sei $K \in \mathbb{R}^+$.
Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > K$. $\Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$

$x_n = n + \frac{1}{2} \geq N + \frac{1}{2} > N > K$.

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{x_n \notin \mathbb{N}}{=} \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$. ↯




(Begründung auf der nächsten Seite)

Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, der Definitionsbereich der Funktion $f$. Nehmen wir an, dass der Grenzwert

$$c \;=\; \lim_{x \to 0} f(x)$$

in $\bar{\mathbb{R}}$ existiert. Weil $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D$ ist, die gegen 0 konvergiert, muss dann gelten

$$c \;=\; \lim_{n \to \infty} f(\tfrac{1}{n}) \;=\; \lim_{n \to \infty} n \;=\; +\infty.$$

Weil auch $(-\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D$ ist, die gegen 0 konvergiert, müsste ebenso gelten

$$c \;=\; \lim_{n \to \infty} f(-\tfrac{1}{n}) \;=\; \lim_{n \to \infty} (-n) \;=\; -\infty.$$

Aber dann wäre $+\infty = c = -\infty$. Die Annahme hat also zu einem Widerspruch geführt und ist somit falsch.