

Definition (4.3)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann bezeichnet man die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

als **Reihe** über $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Das Folgenglied s_n nennt man die **n -te Partialsumme** der Reihe.

Konvergente Reihen

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge über $\mathbb{K}$, dann verwendet man für die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen auch das Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definition (4.4)

Man sagt, die Reihe **konvergiert** gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Existiert kein solcher Grenzwert, dann spricht man von einer **divergenten** Reihe.

- Im Falle der Konvergenz verwendet man auch für den Grenzwert das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Wenn statt dessen ein **uneigentlicher** Grenzwert vorliegt, dann schreibt man auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad \text{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

Proposition (4.5)

Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Proposition (4.6)

Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

(Diese Reihe ist unter dem Namen **geometrische Reihe** bekannt.)

Beweis von Proposition 4.6 (geometrische Reihe)

geg. $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ z.zg: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Beh. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt die n -te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k \text{ die Gleichung } s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Ind.-Ans. $n=0$: $\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}$

Ind.-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze die Gleichung für n voraus.

Dann folgt $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \stackrel{\text{Ind.-V.}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$

$$= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}$$

($\Rightarrow$ Beh.) Wegen $|x| < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - 0}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{ Grenzwertsatz} \end{array} \quad \square$$

$$\begin{aligned} (1 + x + \dots + x^n)(1 - x) &= \cancel{1-x} + \cancel{x-x^2} + \dots + \cancel{x^n - x^{n+1}} \\ &= 1 - x^{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \end{aligned}$$

Übertragung der Grenzwertsätze auf Reihen

Satz (4.7)

Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen über $\mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind auch die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$\text{und } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Proposition (4.8)

Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen über $\mathbb{R}$. Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis von Satz 4.7 (nur 1 Gleichung)

geg. zwei konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Serien $a, b \in \mathbb{K}$ die Grenzwerte. Beh.

Auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergiert, und der Grenzwert ist $a + b$.

Es seien $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folgen der Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beh.: Die n -te Partialsumme u_n von $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ist geg. durch $u_n = s_n + t_n$.

vollst. Ind.: Ind - Anf $u_1 = a_1 + b_1 = s_1 + t_1$

Ind.-schritt: $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (a_k + b_k) =$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) + (a_{n+1} + b_{n+1}) = s_n + t_n +$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k + a_{n+1} + b_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a_k + \sum_{k=1}^{n+1} b_k = s_{n+1} + t_{n+1} \quad (\Rightarrow \text{Beh})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n)$$

$\uparrow$ Beh
 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a + b$

$\uparrow$ Grenzwertsatz
der Addition

Das Cauchy-Kriterium

Satz (4.9)

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m \geq N$ gilt.

Folgerung (4.10)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Beweis von Folgerung 4.10 :

geg. eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Beh.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Nach dem Cauchy-Kriterium gilt :

Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$

mit $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$

Insbesondere gilt (setze $n = m+1$)

$$|a_{m+1}| = |a_{m+1} - 0| < \varepsilon \quad \forall m \geq N$$

Dies ist gleichbed. mit $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$. $\square$

Satz (4.11)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Genau dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen **beschränkt** ist.

Satz (4.12)

Die **harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Beweis des Monotonie-Kriteriums:

geg. Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sei s_n jeweils die n -te Partialsumme, für alle $n \in \mathbb{N}$

Beh. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge

" $\Leftarrow$ " Wegen $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend (denn: $s_{n+1} = s_n + a_n \geq s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$)
Bekannt: Jede beschränkte, monoton wachsende Folge ist konvergent.

" $\Rightarrow$ " Da $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lt Voraussetzung konvergiert, ist diese Folge auch beschränkt.

Satz 4.12: Die sog. harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

zeige: Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen der Reihe ist unbeschränkt.

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

Für alle $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ gilt für die 2^p -te Partialsumme

$$\begin{aligned} s_{2^p} &= \sum_{n=1}^{2^p} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^p \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{n} \geq 1 + \sum_{k=1}^p \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^p 2^{k-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \sum_{k=1}^p \frac{1}{2} = 1 + p \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(p+2) \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(p+2) = +\infty$ ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt.

Monotonie-Kriterium $\Rightarrow$ Die Reihe divergiert. $\square$

Satz (4.13)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_n a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Anwendungsbeispiel:

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

ist konvergent. Man kann zeigen, dass der Grenzwert gleich $\ln(2)$ ist.

Beweis des Leibniz-Kriteriums (Satz 4.13)

geg. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$, monoton fallend,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ Sei s_n jeweils die n -te Partialsumme, für $n \in \mathbb{N}_0$.

Ansatz: Betrachte $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$.

$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n} - \underbrace{a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq s_{2n}$$

Also ist die Folge $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend.

$$s_{2(n+1)+1} = s_{2n+3} = s_{2n+1} + \underbrace{a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\geq 0} \geq s_{2n+1}$$

Also ist diese Folge monoton wachsend.

außerdem: $s_{2n} \geq s_{2n+1}$, $s_{2n+1} \leq s_{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

da $s_{2n} - s_{2n-1} = (-1) a_{2n-1} \leq 0$, $s_{2n} - s_{2n-2} = a_{2n} \geq 0$

$s_{2n} \geq s_{2n-1} \geq \dots \geq s_1 \Rightarrow (s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt,

wegen $s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_0$ ebenso $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ebenso

Jede beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge konvergiert

$\Rightarrow$ Die Grenzwerte $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$, $s' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$ existieren.

$$s - s' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$$

$\uparrow$ Grenzwertsätze

$$\Rightarrow s = s' \quad \text{Beh: } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

$$\text{Sei } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |s_{2n} - s| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = s \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |s_{2n+1} - s| < \varepsilon$$

Sei nun $N = \max \{2N_1+1, 2N_2+1\}$ und $n \geq N$.

1. Fall: n gerade, $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$

$$2m \geq 2N_1+1 \geq 2N_1 \Rightarrow m \geq N_1 \rightarrow$$

$$|s_n - s| = |s_{2m} - s| < \varepsilon$$

2. Fall: n ungerade, $n = 2m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}$

$$2m+1 \geq 2N_2+1 \Rightarrow m \geq N_2 \Rightarrow$$

$$|s_n - s| = |s_{2m+1} - s| < \varepsilon.$$

also insgesamt: $|s_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq N. \quad \square$

Absolut konvergente Reihen

Definition (4.14)

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ wird **absolut konvergent** genannt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ der Absolutbeträge konvergiert.

Proposition (4.15)

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert im Sinne von Definition 4.4.

Beweis von Prop. 4.15

geg. Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, vor: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

ist konvergent z.zg. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

Ansatz: Überprüfe das Cauchy-Kriterium.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert $\Rightarrow$ Cauchy-

Krit. für diese Reihe liefert ein $N \in \mathbb{N}$

mit $\sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$ Δ -Ungl.

$\Rightarrow \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon \Rightarrow$ Cauchy-Kriterium für
die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist erfüllt. $\square$

Satz (4.16)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}_+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $|a_n| \leq c_n$ für fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Folgerung (4.17)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine divergente Reihe in $\mathbb{R}_+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis von Satz 4.16 :

Ändert man in einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ endlich viele Folgenglieder, so ändert das nichts am Konvergenzverhalten (wohl aber am Grenzwert!).

denn: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ eine Reihe und $N \in \mathbb{N}$ mit

$a_n = a_n'$ für alle $n \geq N$ überprüfe :

Sind $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s_n')_{n \in \mathbb{N}}$ die entsprechenden Folgen der Partialsummen dann gilt

$$s_n' = s_n + a \quad \text{mit} \quad a = \sum_{k=1}^{N-1} (a_k' - a_k) \quad \forall n \geq N$$

Das zeigt, dass $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(s_n')_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Deshalb können wir voraussetzen, dass
 $|a_n| \stackrel{(*)}{\leq} c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist

Überprüfe nun das Cauchy-Kriterium für
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq N : \sum_{k=m+1}^n c_k < \varepsilon$$

$$(*) \Rightarrow \forall n \geq m \geq N : \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon$$

Cauchy-krit. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent.

$n \geq N$
gilt,

Anwendung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent

bereits gezeigt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent (Grenzwert 1)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ ist auch konvergent. Außerdem gilt für

alle $n \in \mathbb{N}$ die Äquivalenz $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{2} n(n+1)$

$\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \Leftrightarrow \frac{1}{2} n^2 \geq \frac{1}{2} n \Leftrightarrow n \geq 1$

also: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Somit folgt die (absolute) Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
aus dem Majorantenkriterium.