Definition der reellen Zahlen

Satz (1.19)

Es gibt vollständige, angeordnete Körper. Wir wählen einen solchen Körper willkürlich aus, bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$ und nennen ihn den Körper der reellen Zahlen.

Eigenschaften der reellen Zahlen

(i) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum, und jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge besitzt ein Infimum.

(ii) Der Körper $\mathbb{R}$ besitzt die Intervallschachtelungs-Eigenschaft.

(iii) Die Anordnung $\mathbb{R}^+$ ist archimedisch. Damit sind auch die unter Satz 1.10 formulierten Rechenregeln für $\mathbb{R}$ gültig.

(iv) Der Körper $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Induktive Teilmengen von $\mathbb{R}$

Definition (1.20)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ wird induktiv genannt, wenn $1 \in M$ gilt und für jedes $x \in M$ auch $x + 1 \in M$ erfüllt ist.

Beispiele für induktive Teilmengen in $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$ selbst, ebenso $\mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{R}^+$.

Definition der natürlichen Zahlen

Definition (1.21)

Die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ der natürlichen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M = \{\, n \in \mathbb{R} \mid n \in M \text{ für jede induktive Menge } M \subseteq \mathbb{R} \,\}.$$

Außerdem definieren wir $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(Es ist leicht zu sehen, dass die Menge $\mathbb{N}$ selbst induktiv ist.)

Eigenschaften der natürlichen Zahlen

Proposition (1.22)

(i) Sind $m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $m + n \in \mathbb{N}$ und $mn \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist $m \in \mathbb{N}$, dann liegt $m - 1$ in $\mathbb{N}_0$.

(iii) Alle natürlichen Zahlen sind positiv, d.h. es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$.

Satz (1.23)

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ erfüllen die Peano-Axiome (P1) bis (P5).

Aus der archimedischen Eigenschaft folgt außerdem, dass $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist.

Definition der ganze und rationalen Zahlen

Definition (1.24)

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sind als Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{n \in \mathbb{R} \mid -n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} : x = \tfrac{a}{b}\}.$$

Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Satz (1.25)

(i) Durch Einschränkung der Abbildungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erhält man zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$. Entsprechendes gilt für die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

(ii) Das Tripel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring.

(iii) Das Tripel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper, und durch $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ ist eine archimedische Anordnung auf $\mathbb{Q}$ definiert.

Desweiteren sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar unendliche Mengen.

Die rationalen Zahlen als dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$

- Wir bezeichnen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ als rational, wenn sie in $\mathbb{Q}$ liegt, ansonsten als irrational.
- Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ wird als dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ bezeichnet, wenn jedes nicht-leere offene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Element aus M enthält.

Satz (1.26)

Sowohl die rationalen als auch die irrationalen Zahlen bilden jeweils eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition der n-ten Wurzel

Satz (1.29)

Sei $b \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha^n = b$. Sie wird mit $\sqrt[n]{b}$ bezeichnet und die n-te Wurzel von b genannt.

Der binomische Lehrsatz

Für den Beweis von Satz 1.29 benötigt man den Binomischen Lehrsatz. Dieser besagt: Sind α, β Elemente eines Rings R und ist $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(\alpha + \beta)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k.$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n und Verwendung der Gleichung $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$.

Spezialfälle des Binomischen Lehrsatzes

$$(\alpha+\beta)^2 = \binom{2}{0}\alpha^2\beta^0 + \binom{2}{1}\alpha^1\beta^1 + \binom{2}{2}\alpha^0\beta^2$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad \text{(Erste Binomische Formel)}$$

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

Beweis des Binomischen Lehrsatzes durch vollst. Ind.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ind.-Anf.: $(\alpha+\beta)^1 = \alpha+\beta = \binom{1}{0}\alpha^1\beta^0 + \binom{1}{1}\alpha^0\beta^1$

Ind.-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze $(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k$ voraus.

$$(\alpha+\beta)^{n+1} = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^n \overset{\text{Ind.V.}}{=} (\alpha+\beta)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k+1}\beta^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^{k+1} =$$

$$\alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k+1}\beta^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^{k+1} + \beta^{n+1} \overset{(*)}{=}$$

$$\alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k+1}\beta^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\alpha^{n-(k-1)}\beta^k + \beta^{n+1} =$$

$$\alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\alpha^{n+1-k}\beta^k + \beta^{n+1} = \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k$$

$$+\beta^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha^{n+1-k} \beta^k \qquad \square$$

(*) Umparametrisierung:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}$$

Beweis zur Existenz der n-ten Wurzel:

z.zg.: geg. $b \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha^n = b$

Beschränken uns auf den Fall $n > 1$, $b > 0$.

Sei $M = \{ x \in \mathbb{R}_+ \mid x^n \leq b \}$

gezeigt: Die Menge M besitzt ein Supremum α. Beh.: $\alpha^n = b$

Um den Beweis der Beh. zu vervollständigen, musste noch gezeigt werden:

Ist $\alpha^n < b$, dann gibt es ein $h \in \mathbb{R}^+$ mit $(\alpha + h)^n < b$

(
$\sum$
$=$
Set
gilt
Für
also

> 0.

gen,

Für jedes $h \in \mathbb{R}^+$ mit $h < \alpha$ gilt

$$(\alpha+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} h^k = \alpha^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} h^{k-1}$$

$$\underset{h<\alpha}{\leq} \alpha^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \alpha^{k-1} = \alpha^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-1}$$

$$= \alpha^n + h\gamma \text{ mit } \gamma = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-1}$$

Setze $\varepsilon = b - \alpha^n$. Für alle $h \in \mathbb{R}^+$ mit $h < \alpha$ gilt die Äquivalenz $h\gamma < \varepsilon \iff h < \varepsilon\gamma^{-1}$.

Für alle h, die zusätzlich $h < \varepsilon\gamma^{-1}$ erfüllen, gilt also

$$(\alpha+h)^n \leq \alpha^n + h\gamma < \alpha^n + \varepsilon = \alpha^n + (b - \alpha^n) = b.$$

$\square$

Rechenregeln für die n-te Wurzel

Lemma (1.30)

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $m, n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad , \quad (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Die zweite Gleichung gilt im Fall $a \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Die beiden Zuordnungen $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $a \mapsto a^n$ und $a \mapsto \sqrt[n]{a}$ sind invers zueinander.

zum Beweis von Lemma 1.30

zeige nur: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ für alle $a \in \mathbb{R}_+$, $m, n \in \mathbb{N}$

Überprüfe, dass das Element $\alpha = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ die Definition der mn-ten Wurzel von a erfüllt. dafür zu überprüfen: $\alpha^{mn} = a$. Es gilt

$$\alpha^{mn} = (\alpha^m)^n = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n \underset{\text{Def. der } m\text{-ten Wurzel}}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \underset{\text{Def. der } n\text{-ten Wurzel}}{=} a \qquad \square$$

Exponentiation mit rationalen Zahlen

Mit Hilfe der n-ten Wurzeln können wir Potenzen a^r für $a \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{Q}$ definieren. Besitzt r die Darstellung $r = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann setzen wir

$$a^r \quad = \quad \sqrt[n]{a^m}.$$

Lemma (1.31)

Die Potenzgesetze (i) bis (iii) aus Lemma 1.8 gelten auch für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und beliebige Exponenten $r, s \in \mathbb{Q}$.

zur Wohldefiniertheit der Potenz a^r $(a \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{Q}^+)$

Ang $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ sind zwei verschiedene Darstellungen von r als Bruchzahl, mit $m, m' \in \mathbb{Z}$, $n, n' \in \mathbb{N}$.

z.zg.: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$ $(*_1)$

Die Gleichung ist äquivalent zu $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nn'} = \left(\sqrt[n']{a^{m'}}\right)^{nn'}$

$$\Longleftrightarrow \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n}\right)^{n'} = \left(\left(\sqrt[n']{a^{m'}}\right)^{n'}\right)^{n} \Longleftrightarrow (a^m)^{n'} = (a^{m'})^n$$

$$\Longleftrightarrow a^{mn'} \overset{(*_2)}{=} a^{m'n}$$

Aus $\frac{m}{n} = r = \frac{m'}{n'}$ folgt andererseits $mn' = m'n$. Also ist $(*_2)$ erfüllt, und damit auch $(*_1)$

Definition der bewerteten Körper

Definition (1.32)

Eine Bewertung auf einem Körper K ist eine Abbildung $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$, so dass für alle $x, y \in K$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Die letzte Ungleichung ist unter dem Namen Dreiecksungleichung bekannt. Das Paar $(K, |\cdot|)$ bezeichnet man dann als bewerteten Körper.

Der reelle Absolutbetrag

Wir definieren eine Abbildung $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$

Man bezeichnet sie als Absolutbetrag auf den reellen Zahlen.

Der reelle Absolutbetrag als Bewertung

Lemma (1.33)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq |x|$ und $|x| = |-x|$.

Satz (1.34)

Durch den Absolutbetrag ist eine Bewertung auf $\mathbb{R}$ definiert.

Beweis von Lemma 1.33

Sei $x \in \mathbb{R}$. Beh.: (i) $x \leq |x|$ (ii) $|x| = |-x|$

zu (i) 1. Fall: $x \geq 0$ Dann gilt sogar $x = |x|$, also auch „$\leq$".

2. Fall: $x < 0$ Dann gilt $x < 0 \leq |x|$, wobei die zweite Ungl. gilt, weil $|\cdot|$ nur Werte in $\mathbb{R}_+$ annimmt.

zu (ii) 1. Fall: $x \geq 0$ Dann gilt $-x \leq 0$, und somit $|-x| = -(-x)$ (auch im Fall $x = 0$). insgesamt:

$$|x| \underset{x \geq 0}{=} x = -(-x) = |-x|$$

2. Fall: $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow |-x| = -x$

außerdem $|x| = -x$. insges.: $|x| = -x = |-x|$. $\square$

Beweis von Satz 1.34 : Seien $x, y \in \mathbb{R}$. z.z.g.:

(i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ (ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

zu (i) „$\Rightarrow$" $0 \geq 0 \Rightarrow |0| = 0$ Aus $x = 0$ folgt also $|x| = 0$.

„$\Leftarrow$" $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $-x = 0 \Rightarrow x = 0$ oder

$-(-x) = -0 \Rightarrow x = 0$

zu (ii) 1. Fall: $x, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0 \Rightarrow |xy| = xy = |x|\,|y|$

2. Fall: $x < 0,\ y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0 \Rightarrow |xy| = -(xy) =$

$(-x)y = |x| \cdot |y|$

3. Fall: $x \geq 0,\ y < 0$ 4. Fall: $x, y < 0$ analog

<u>zu (iii)</u> 1. Fall: $x+y \geq 0$

$$|x+y| = x+y \underset{\text{Lemma 1.33 (i)}}{\leq} |x|+|y|$$

2. <u>Fall</u>: $x+y<0$

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq |-x|+|-y| \underset{\text{Lemma 1.33 (ii)}}{=} |x|+|y|$$

$\square$

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

Satz (1.35)

Es gibt einen Körper $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) Es gilt $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$, und für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a +_{\mathbb{C}} b = a + b$ und $a \cdot_{\mathbb{C}} b = ab$.

(ii) Es gibt ein Element $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.

(iii) Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ kann auf eindeutige Weise in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann.

Ergänzungen zur Definition

- Der Körper $\mathbb{C}$ wird der Körper der komplexen Zahlen genannt.
- Das Element i bezeichnet man als imaginäre Einheit.
- Ist $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so nennt man a den Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und b den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ von z.

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir die gewohnten Symbole $+$ und $\cdot$ statt $+_{\mathbb{C}}$ und $\cdot_{\mathbb{C}}$ zur Bezeichnung der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$.

Die arithmetischen Operationen auf $\mathbb{C}$

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- **Addition**

$$(a+ib)+(c+id) \quad = \quad (a+c)+i(b+d)$$

- **Subtraktion**

$$(a+ib)-(c+id) \quad = \quad (a-c)+i(b-d)$$

- **Multiplikation**

$$(a+ib)\cdot(c+id) \quad = \quad (ac-bd)+i(bc+ad)$$

- **Kehrwertbildung**

$$(a+ib)^{-1} \quad = \quad \frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{(-b)}{a^2+b^2}$$

Die komplexe Konjugation

Definition (1.36)

Für jedes $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ nennt man $\bar{z} = a - ib$ das zu z konjugiert komplexe Element. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ bezeichnet man dann als komplexe Konjugation.

Proposition (1.37)

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $\bar{\bar{z}} = z$ (ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (iii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

Beweis von Prop 1.37 (iii)

Seien $z = a + ib$, $w = c + id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

z.zg.: $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

linke Seite: $z \cdot w = (a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

$\Rightarrow \overline{zw} = (ac - bd) + i(-ad - bc)$

rechte Seite: $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib) \cdot (c - id) = ac - ibc$

$- iad + i^2 bd = (ac - bd) + i(-bc - ad)$ $\square$

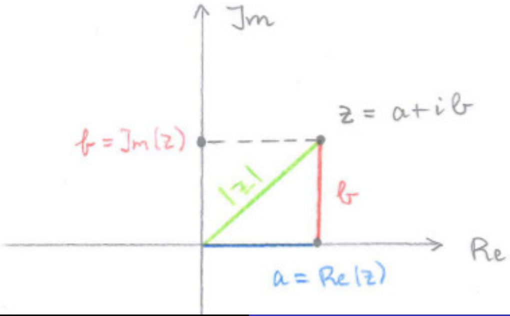
Der komplexe Absolutbetrag

Definition (1.38)

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$|z| \quad = \quad \sqrt{a^2 + b^2} \quad = \quad \sqrt{(a + ib)(a - ib)} \quad = \quad \sqrt{z\bar{z}}$$

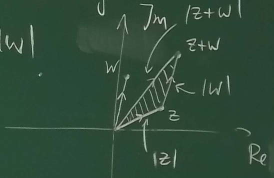
den komplexen Absolutbetrag von z. Durch ihn ist eine Bewertung auf $\mathbb{C}$ definiert.



Nachweis, dass der komplexe Absolutbetrag eine Bewertung ist: Seien $z, w \in \mathbb{C}$. z.zg.:

(i) $z = 0 \iff |z| = 0$ (ii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(iii) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungl.)



zu i) Schreibe $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

„$\Rightarrow$" $z = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$

„$\Leftarrow$" $|z| = 0 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow a^2+b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$

$\Rightarrow z = 0$

zu ii) Es genügt z.zg.: $|z \cdot w|^2 = |z|^2 |w|^2$.

$$|z \cdot w|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$

zu (iii) genügt z.zg.: $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$

äquivalent: $(z+w)\overline{(z+w)} \leq |z|^2 + 2|z|\cdot|w| + |w|^2$

$\Longleftrightarrow \cancel{z\bar{z}} + w\bar{z} + z\bar{w} + \cancel{w\bar{w}} \leq \cancel{z\bar{z}} + 2|z|\cdot|w| + \cancel{w\bar{w}}$

$\Longleftrightarrow \quad w\bar{z} + z\bar{w} \leq 2|z|\cdot|w| \quad (*)$

Schreibe $w\bar{z} = c + id$ mit $c, d \in \mathbb{R}$

Wegen $z\bar{w} = \overline{w\bar{z}}$ ist $(*)$ äquivalent zu

$(c+id) + (c-id) \leq 2\sqrt{z\bar{z}\cdot w\bar{w}} \Longleftrightarrow$

$2c \leq 2\sqrt{(z\bar{w})\cdot(w\bar{z})} \Longleftrightarrow 2c \leq 2\sqrt{(c+id)(c-id)}$

$\Longleftrightarrow c \leq \sqrt{c^2+d^2}$ Diese Ungl. gilt wegen

$\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{c^2} \geq c$ $\square$

Nicht-Existenz einer Anordnung auf $\mathbb{C}$

Satz (1.39)

Auf dem Körper $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung. Es gibt also keine Teilmenge $\mathbb{C}^+ \subseteq \mathbb{C}$, so dass die Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 1.1 erfüllt sind.

Die algebraische Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}$

In $\mathbb{C}$ existiert für jedes Element eine Quadratwurzel, nicht nur für -1. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}+\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}+i+(-\tfrac{1}{2}) \quad = \quad i.\end{aligned}$$

Allgemeiner kann man beweisen

Satz (1.40)

In den komplexen Zahlen besitzt jede Gleichung der Form

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad = \quad 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ mindestens eine Lösung.

Diese Eigenschaft des Körpers $\mathbb{C}$ bezeichnet man als algebraische Abgeschlossenheit.