Definition der reellen Zahlen

Satz (1.19)

Es gibt vollständige, angeordnete Körper. Wir wählen einen solchen Körper willkürlich aus, bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$ und nennen ihn den Körper der reellen Zahlen.

Eigenschaften der reellen Zahlen

(i) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum, und jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge besitzt ein Infimum.

(ii) Der Körper $\mathbb{R}$ besitzt die Intervallschachtelungs-Eigenschaft.

(iii) Die Anordnung $\mathbb{R}^+$ ist archimedisch. Damit sind auch die unter Satz 1.10 formulierten Rechenregeln für $\mathbb{R}$ gültig.

(iv) Der Körper $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Induktive Teilmengen von $\mathbb{R}$

Definition (1.20)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ wird induktiv genannt, wenn $1 \in M$ gilt und für jedes $x \in M$ auch $x + 1 \in M$ erfüllt ist.

Beispiele für induktive Teilmengen in $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$ selbst, ebenso $\mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{R}^+$.

Definition der natürlichen Zahlen

Definition (1.21)

Die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ der natürlichen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M = \{\, n \in \mathbb{R} \mid n \in M \text{ für jede induktive Menge } M \subseteq \mathbb{R} \,\}.$$

Außerdem definieren wir $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(Es ist leicht zu sehen, dass die Menge $\mathbb{N}$ selbst induktiv ist.)

Eigenschaften der natürlichen Zahlen

Proposition (1.22)

(i) Sind $m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $m + n \in \mathbb{N}$ und $mn \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist $m \in \mathbb{N}$, dann liegt $m - 1$ in $\mathbb{N}_0$.

(iii) Alle natürlichen Zahlen sind positiv, d.h. es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$.

Satz (1.23)

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ erfüllen die Peano-Axiome (P1) bis (P5).

Aus der archimedischen Eigenschaft folgt außerdem, dass $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist.

Beweis von Prop. 1.22

wichtige Beob.: Nach Definition ist $\mathbb{N}$ in jeder induktiven Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ enthalten.

zu (i) Summe: Sei $m \in \mathbb{N}$. z.zg: $\forall n \in \mathbb{N}: m+n \in \mathbb{N}$

Sei $T = \{ n \in \mathbb{R} \mid m+n \in \mathbb{N} \}$. Es genügt z.zg: $\mathbb{N} \subseteq T$. Dafür genügt es z.zg., dass T induktiv ist.

$m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ induktiv $\Rightarrow m+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in T$

Sei $n \in T$, z.zg: $n+1 \in T$ $\quad n \in T \rightarrow m+n \in \mathbb{N}$

$\overset{\mathbb{N}\text{ induktiv}}{\Rightarrow} m+n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in T$

$m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ induktiv $\Rightarrow m+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in T$

<u>Produkt</u>: Sei $m \in \mathbb{N}$ z.z.g. $\forall n \in \mathbb{N}: mn \in \mathbb{N}$

Es genügt z.z.g., dass $U = \{n \in \mathbb{R} \mid mn \in \mathbb{N}\}$ eine induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist

$m \cdot 1 = m \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in U$

Sei $n \in U$, z.z.g.: $n+1 \in U$ $\quad n \in U \Rightarrow mn \in \mathbb{N}$

$mn \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \overset{(1)}{\Longrightarrow} mn + m \in \mathbb{N} \Rightarrow m(n+1) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n+1 \in U$

Definition der ganze und rationalen Zahlen

Definition (1.24)

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sind als Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{n \in \mathbb{R} \mid -n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} : x = \tfrac{a}{b}\}.$$

Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Satz (1.25)

(i) Durch Einschränkung der Abbildungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erhält man zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$. Entsprechendes gilt für die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

(ii) Das Tripel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring.

(iii) Das Tripel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper, und durch $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ ist eine archimedische Anordnung auf $\mathbb{Q}$ definiert.

Desweiteren sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar unendliche Mengen.

zum Beweis von Satz 1.25

Def: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{n \in \mathbb{R} \mid -n \in \mathbb{N}\}$.

zu (i) $\forall m, n \in \mathbb{Z} : m+n,\ mn \in \mathbb{Z}$

Produkt: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$

1. Fall: $m = 0$ oder $n = 0 \Rightarrow mn = 0$

$\Rightarrow mn \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow mn \in \mathbb{Z}$

2. Fall: $m, n \in \mathbb{N}$ Dann gilt $mn \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow mn \in \mathbb{Z}$

3. Fall: $-m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (-m)n \in \mathbb{N} \Rightarrow -mn \in \mathbb{N} \Rightarrow mn \in \mathbb{Z}$

4. Fall: $m \in \mathbb{N}, -n \in \mathbb{N}$ analog

5. Fall: $-m, -n \in \mathbb{N} \Rightarrow (-m)(-n) \in \mathbb{N}$

$mn = (-m)(-n) \Rightarrow mn \in \mathbb{N} \Rightarrow mn \in \mathbb{Z}$

Summe: Überprüfe zunächst (1) $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+$

Zeige dann durch vollständige Induktion

(2) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N} : x - n \in \mathbb{Z}$

Damit kann gezeigt werden, dass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ auch $x + y$ in $\mathbb{Z}$ liegt $\square$

(Details siehe Skript)

$\}$

$\in \mathbb{N}$.

$n \in \mathbb{Z}$

abzählbare Unendlichkeit von $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{N}$ unendlich, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ unendlich

$\mathbb{N}$ und $\{0\}$ sind höchstens abzählbar

Sei $A = \{ n \in \mathbb{R} \mid -n \in \mathbb{N} \}$.

Die Menge A ist höchstens abzählbar, da $\mathbb{N} \to A$, $n \mapsto -n$ offenbar eine Bijektion ist. Als Vereinigung von endlich vielen höchstens abzählbaren Mengen ist auch $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup A$ höchstens abzählbar.

$\mathbb{R}^+$

e

$\square$

abzählbare Unendlichkeit von $\mathbb{Q}$:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ unendlich $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ unendlich

$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich $\Rightarrow$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich

Da die Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,
$(a,b) \mapsto \frac{a}{b}$ surjektiv ist, ist $\mathbb{Q}$ somit höchstens abzählbar. $\square$

Die rationalen Zahlen als dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$

- Wir bezeichnen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ als rational, wenn sie in $\mathbb{Q}$ liegt, ansonsten als irrational.
- Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ wird als dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ bezeichnet, wenn jedes nicht-leere offene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Element aus M enthält.

Satz (1.26)

Sowohl die rationalen als auch die irrationalen Zahlen bilden jeweils eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Beweis von Satz 1.26, nur für rationale Zahlen

geg: ein offenes Intervall $I =]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$)

z. zg: $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ mit $r \in I$

Zeige zunächst: Gilt die Aussage für $a > 0$, dann gilt sie auch allgemein. Annahme: $a \leq 0$ archimedische Eig.

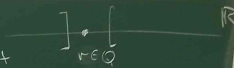
$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ mit $k > -a$ $\Rightarrow$ $a+k,\ b+k > 0$

Laut Annahme gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ im Intervall $]a+k, b+k[$,

d.h. $a+k < r < b+k$. Sei $r' = r-k$. $\Rightarrow r' \in \mathbb{Q}$

und $a < r' < b$ $\Rightarrow r \in]a, b[$.

Es reicht also, die Aussage für den Fall $0 < a < b$ zu zeigen. Sei $\varepsilon = b - a \in \mathbb{R}^+$



Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Sei $k \in \mathbb{N}$ minimal, so dass $k > ma$ erfüllt ist. $\Rightarrow k-1 \leq ma < k \Rightarrow$

$\frac{k-1}{m} \leq a < \frac{k}{m}$ $(*)$ Sei $r = \frac{k}{m}$. $\Rightarrow r \in \mathbb{Q}$

Beh.: $r \in \,]a, b[$ $\quad$ $r > a$ bereits bekannt, z.zg.: $r < b$

$$r = a + r - a = a + \left(\frac{k}{m} - a\right) \overset{(*)}{<} a + \frac{1}{m} < a + \varepsilon$$
$$= a + (b - a) = b \qquad (\Rightarrow \text{Beh.}) \qquad \square$$

Wegen $(*)$ ist der Abstand von a und $\frac{k}{m}$ kleiner als $\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m} = \frac{1}{m}$

Negative Exponenten

Für beliebige Körper K haben wir weiter oben Potenzen der Form a^n mit $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$ eingeführt. Für $a \in K^\times$ kann die Definition folgendermaßen auf negative Exponenten ausgedehnt werden: Man setzt

$$a^{-n} \quad = \quad (a^n)^{-1} \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt ist a^m damit für alle $m \in \mathbb{Z}$ definiert.

Lemma (1.27)

Die Potenzgesetze (i) bis (iii) aus Lemma 1.8 sind im Fall $a, b \neq 0_K$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ gültig.

Definition der n-ten Wurzel

Lemma (1.28)

Sei (K, K^+) ein angeordneter Körper, und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $a, b \in K_+$ die Äquivalenz $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$. Ist n ungerade, dann gilt sie sogar für alle $a, b \in K$.

Das Lemma gilt auch für $>$, $\geq$ oder $\leq$ an Stelle von $<$.

Satz (1.29)

Sei $b \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha^n = b$. Sie wird mit $\sqrt[n]{b}$ bezeichnet und die n-te Wurzel von b genannt.

Beweis von Lemma 1.28, für $a, b \in K_+$

Allgemein gilt $b^n - a^n = b^n - ab^{n-1} + ab^{n-1} + \dots + a^{n-1}b - a^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k}$

$$= b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - a \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k} =$$

$$b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - a \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-(k+1)} = (b-a) \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)}_{\substack{\in K^+ \\ \text{sobald } a, b \in K^+ \\ (*)}}$$

Daraus folgt, dass $b-a$ genau dann positiv ist, wenn $b^n - a^n$ positiv ist.

gleichbedeutend: $a < b \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} a^n < b^n$

(*) Ist $a = 0$ (und evtl. auch $b = 0$) dann ist die Äquivalenz offensichtlich erfüllt. $\square$

Zum Beweis von Satz 1.25

Def.: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{n \in \mathbb{R} \mid -n \in \mathbb{N}\}$.

zu (i) $\forall m, n \in \mathbb{Z} : m+n,\ mn \in \mathbb{Z}$

Produkt: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$

1. Fall: $m = 0$ oder $n = 0 \Rightarrow mn = 0$
$\Rightarrow mn \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow mn \in \mathbb{Z}$

2. Fall: $m, n \in \mathbb{N}$ Dann gilt $mn \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow mn \in \mathbb{Z}$

3. Fall: $-m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow (-m)n \in \mathbb{N} \Rightarrow -mn \in \mathbb{N} \Rightarrow mn \in \mathbb{Z}$

4. Fall: $m \in \mathbb{N}$, $-n \in \mathbb{N}$ analog

Beweis von Satz 1.29:

geg.: $b \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ zzg.: $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha^n = b$

können annehmen: $b > 0$ und $n > 1$ (da die Aussage ansonsten trivial ist)

Betrachte die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^n \leq b\}$

überprüfe: $M \neq \emptyset$, und M ist nach oben beschränkt

$M \neq \emptyset$ ist klar, da $0^n = 0 \leq b$, also $0 \in M$

Setze $c = \max\{1, b\}$. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > c^n$

$\Rightarrow x > c^n \underset{c \geq 1}{\geq} c \geq b \Rightarrow x \notin M$

Dies zeigt, dass c^n eine obere Schranke von M ist.

Insgesamt folgt daraus, dass M ein Supremum α besitzt. Die Menge M enthält offensichtlich positive Zahlen (denn: Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < b \Rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)^n < b^n \Rightarrow \frac{1}{m} \in M$)

Also muss α positiv sein.

<u>Beh.</u> $\alpha^n = b$. Dies zeigen wir, indem wir die Annahmen $\alpha^n < b$ und $\alpha^n > b$ zum Widerspruch führen.

Zeige weiter unten:

(i) Ist $\alpha^n < b$, dann gibt es ein $h \in \mathbb{R}^+$ mit $(\alpha + h)^n < b$.

(ii) Ist $\alpha^n > b$, dann gibt es ein $h \in \mathbb{R}^+$ mit $(\alpha - h)^n > b$

- Nehme nun an, dass $\alpha^n < b$. Nach (i) gilt auch $(\alpha+h)^n < b$ für ein $h \in \mathbb{R}^+$
  $\alpha = \sup(M)$, $\alpha + h > \alpha \Rightarrow \alpha + h \notin M$
  $\Rightarrow (\alpha+h)^n \leq b$ nicht erfüllt $\lightning$
- Nehme nun an, dass $\alpha^n > b$. (ii) $\Rightarrow \exists h \in \mathbb{R}^+$ mit $(\alpha-h)^n > b$. α ist kleinste obere Schranke von M, $\alpha - h < \alpha \Rightarrow \alpha - h$ ist <u>keine</u> obere Schranke von $M \Rightarrow \exists y \in M$ mit $y > \alpha - h$
  $y \in M \Rightarrow y^n \leq b \Rightarrow (\alpha-h)^n < b$ $\lightning$

Nachweis von (ii): Für alle $h \in \mathbb{R}^+$ gilt

$(\alpha - h)^n = \alpha^n \left(1 - \frac{h}{\alpha}\right)^n$ Wähle $h \in \mathbb{R}^+$ so klein,

dass $\frac{h}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow -\frac{h}{\alpha} \geq -1$ Damit kann die

Bernoullische Ungleichung angewendet werden

$\left(1 - \frac{h}{\alpha}\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{h}{\alpha}\right) \Rightarrow (\alpha - h)^n \geq \alpha^n \cdot \left(1 - \frac{nh}{\alpha}\right)$

Setze $\varepsilon = \alpha^n - b$. Dann kann h so klein gewählt

werden, dass $\frac{nh}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{\alpha^n}$ gilt

$\Rightarrow (\alpha - h)^n \geq \alpha^n \left(1 - \frac{nh}{\alpha}\right) > \alpha^n - \frac{\varepsilon}{\alpha^n} \cdot \alpha^n$

$= \alpha^n - \varepsilon = b$

(i) basiert auf dem Binomischen Lehrsatz, s. nächste Stunde!!