Definition (1.1)

Sei K ein Körper. Eine Teilmenge $K^+ \subseteq K$ wird Anordnung von K genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen $x = 0_K$, $x \in K^+$, $-x \in K^+$.

(ii) Aus $x, y \in K^+$ folgt $x + y \in K^+$ und $xy \in K^+$.

Das Paar (K, K^+) bezeichnet man als angeordneten Körper. Ein Element $x \in K$ wird als positiv bezeichnet, wenn $x \in K^+$, und negativ, wenn $-x \in K^+$ gilt.

Für die spätere Verwendung definieren wir die Bezeichnungen

$$K_+ = K^+ \cup \{0_K\} \qquad \text{und} \qquad K^\times = K \setminus \{0_K\}.$$

Lemma (1.2)

Sei (K, K^+) ein angeordneter Körper.

(i) Für alle $a \in K^\times$ gilt $a^2 \in K^+$.

(ii) Aus $a \in K^+$ folgt jeweils $a^{-1} \in K^+$.

Der angeordnete Körper als totalgeordnete Menge

Satz (1.3)

Sei (K, K^+) ein angeordneter Körper.

(i) Durch $x \le y \Leftrightarrow y - x \in K_+$ ist eine Totalordnung auf K definiert. Für alle $x, y \in K$ gilt $x < y \Leftrightarrow y - x \in K^+$.

Seien nun $x, y, a \in K$ vorgegeben.

(ii) Es gilt $x \le y \Leftrightarrow x + a \le y + a$.

(iii) Ist a positiv, dann gilt $x \le y \Leftrightarrow ax \le ay$.

(iv) Ist a negativ, dann gilt $x \le y \Leftrightarrow ax \ge ay$.

Die drei Aussagen (ii), (iii) und (iv) bleiben gültig, wenn man $\le$ durch $<$ und $\ge$ durch $>$ ersetzt.

Beweis von Satz 1.3

geg. angeordneter Körper (K, K^+) mit der Relation $\leq$ auf K geg. durch $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K^+ \cup \{0_K\}$

Seien $x, y, z \in K$. zu überprüfen:

(1) $x < y \Leftrightarrow y - x \in K^+$

(2) Reflexivität: $x \leq x$

(3) Antisymmetrie: $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$

(4) Transitivität: $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(5) Vergleichbarkeit: $x \leq y$ oder $y \leq x$

<u>zu (1)</u> „$\Rightarrow$“ $x < y \Rightarrow x \leq y$ und $x \neq y \Rightarrow$

$y - x \in K^+ \cup \{0_K\} \Rightarrow y - x \in K^+$ oder $y - x = 0_K$

Ang. $y - x = 0_K \Rightarrow x = y$ ↯ also: $y - x \in K^+$

„$\Leftarrow$" $y - x \in K^+ \Rightarrow y - x \in K^+ \cup \{0_K\} \Rightarrow x \leq y$

Ang. $x = y \Rightarrow y - x = 0_K$ ↯ $y - x \in K^+$, siehe Def. 1.1

also: $x \leq y$ und $x \neq y \Rightarrow x < y$

zu (2) $x - x = 0_K \Rightarrow x - x \in K^+ \cup \{0_K\} \Rightarrow x \leq x$

zu (3) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow y - x \in K^+ \cup \{0_K\}$ und $x - y \in K^+ \cup \{0_K\}$

Ang $x \neq y \Rightarrow y - x \neq 0_K, x - y \neq 0_K \Rightarrow y - x \in K^+$ und

$x - y \in K^+ \Rightarrow y - x \in K^+$ und $-(y - x) \in K^+$ ↯ zu Bed.

(i) in Def. 1.1, angewendet auf $y - x$ also: $x = y$

zu (4) Vor.: $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow y - x \in K^+ \cup \{0_K\}$ und

$z - y \in K^+ \cup \{0_K\}$

1. Fall: $x = y$ $\quad x = y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

2. Fall: $y = z$ $\quad x \leq y$ und $y = z \Rightarrow x \leq z$

3. Fall: $x \neq y$ und $y \neq z \Rightarrow y - x \neq 0_K$ und $z - y \neq 0_K$. Daraus folgt $y - x \in K^+$ und $z - y \in K^+$. Die Summe der positiven Elemente $y - x$ und $z - y$ ist positiv.

$\Rightarrow (y-x)+(z-y) = z - x \in K^+ \Rightarrow$
$z - x \in K^+ \cup \{0_K\} \Rightarrow x \leq z$

Sei nun a ein positives und b ein negatives Element in K (d.h. $a \in K^+$ und $-b \in K^+$). Wir zeigen:

(6) $x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$

(7) $x \le y \Rightarrow bx \ge by$

<u>zu (6)</u> $x \le y \Rightarrow y - x \in K^+ \cup \{0_K\}$

<u>1. Fall</u>: $x = y \Rightarrow ax = ay \Rightarrow ay - ax = 0_K$

$\Rightarrow ay - ax \in K^+ \cup \{0_K\} \Rightarrow ax \le ay$

<u>2. Fall</u>: $x \ne y \Rightarrow y - x \ne 0_K \Rightarrow y - x \in K^+$

$a \in K^+,\ y - x \in K^+ \Rightarrow a(y - x) \in K^+ \Rightarrow$

$ay - ax \in K^+ \Rightarrow ay - ax \in K^+ \cup \{0_K\}$

$\Rightarrow ax \le ay$

<u>zu (7)</u> $x \le y \Rightarrow y - x \in K^+ \cup \{0_K\}$

<u>1. Fall</u>: $x = y$ analog zu (6)

<u>2. Fall</u>: $x \ne y \Rightarrow y - x \in K^+$

0_K

y

$\in K^+$

$\Rightarrow$

$0_K \}$

$y - x \in K^+$ und $-b \in K^+ \Rightarrow (y-x)(-b) \in K^+$

$\Rightarrow bx - by \in K^+ \Rightarrow bx - by \in K^+ \cup \{0_K\}$

$\Rightarrow by \leq bx \Rightarrow bx \geq by$

<u>Nachtrag</u>: (5) Vergleichbarkeit

zzg: $x \leq y$ oder $y \leq x$

Nach Def. 1.1 gilt $y - x \in K^+$ oder $-(y-x) \in K^+$ oder $y - x = 0_K$.

<u>1. Fall</u>: $y - x \in K^+ \Rightarrow y - x \in K^+ \cup \{0_K\} \Rightarrow x \leq y$

2. <u>Fall</u>: $x - y \in K^+ \Rightarrow x - y \in K^+ \cup \{0_K\} \Rightarrow y \leq x$

3. <u>Fall</u>: $y - x = 0_K \Rightarrow y - x \in K^+ \cup \{0_K\}$

$\Rightarrow x \leq y$

$\square$

Ringelemente gegeben durch natürliche Zahlen

In einem Ring R kann jedem $n \in \mathbb{N}_0$ auf ein Element n_R in R zugeordnet werden.

- Der Zahl 0 wird das Nullelement 0_R des Rings zugeordnet.
- Der Zahl 1 wird das Einselement 1_R zugeordnet.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzt man $(n+1)_R = n_R + 1_R$.

Lemma (1.4)

Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(m+n)_R = m_R + n_R$ und $(m \cdot n)_R = m_R n_R$.

(Der Beweis erfolgt jeweils durch vollständige Induktion über n.)

Proposition (1.5)

Sei K ein Körper, und seien $a, b \in K$.

(i) Aus $0_K < a < b$ folgt $b^{-1} < a^{-1}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n_K \in K^+$.

(iii) Für alle $a, b \in K$ mit $a < b$ gilt $a < 2_K^{-1}(a + b) < b$.

Beweis von Proposition 1.5

zu (i) Vor.: $0_K < a < b \Rightarrow a \in K^+$ und $b - a \in K^+$

$0_K \leq a$, $a \leq b \Rightarrow 0_K \leq b$ Ang. $b = 0_K \Rightarrow a < 0_K$ und $a > 0_K \Rightarrow a$ positiv und negativ $\lightning$ also: $b \in K^+$

$a, b \in K^+ \Rightarrow ab \in K^+ \Rightarrow \frac{1}{ab} \in K^+$

$b - a \in K^+$ und $\frac{1}{ab} \in K^+ \Rightarrow \frac{1}{ab}(b-a) \in K^+$

$\Rightarrow \frac{1}{ab}(b-a) > 0_K \Rightarrow \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} > 0_K \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0_K \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

zu (ii) durch vollst. Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

K Körper $\Rightarrow 1_K \neq 0_K \overset{\text{Lemma 1.2}}{\Longrightarrow} 1_K^2 \in K^+ \overset{1_K^2 = 1_K}{\Longrightarrow} 1_K \in K^+$

Ind.-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze $n_K \in K^+$ voraus.

$n_K \in K^+$, $1_K \in K^+ \Rightarrow n_K + 1_K \in K^+ \Rightarrow (n+1)_K \in K^+$

zu (iii) geg: $a, b \in K$ mit $a < b \Rightarrow b - a \in K^+$

zu zg: (1) $a < 2_K^{-1}(a+b)$ (2) $2_K^{-1}(a+b) < b$

zu (1) gleichbed. (wegen $2_K \in K^+$): $2_K a < a + b \Leftrightarrow$

Dies wiederum ist äquivalent zu $(1_K + 1_K) a < a + b$

$1_K \cdot a + 1_K \cdot a < a + b \Leftrightarrow a + a < a + b \Leftrightarrow a < b$

Also ist die zu zeigende Aussage äquivalent zur Voraussetzung $\square$

zu (2) Übung

Erweiterung angeordneter Körper durch $\pm\infty$

- Für viele Anwendungen ist es hilfreich, einen angeordneten Körper K durch Hinzunahme zweier weiterer Elemente $-\infty$ und $+\infty$ zu einer Menge $\bar{K} = K \cup \{-\infty, +\infty\}$ zu erweitern.
- Man definiert eine Relation $\leq$ durch
$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a = -\infty \;\vee\; (a, b \in K \wedge a \leq b) \;\vee\; b = +\infty.$$
- Wie man leicht überprüft, ist auch diese Relation eine Totalordnung auf $\bar{K}$. Diese stimmt auf K mit der ursprünglich durch K^+ definierten Relation $\leq$ überein.

Intervalle in einem angeordneten Körper

Definition (1.6)

Eine Teilmenge $I \subseteq K$ wird Intervall in K genannt, wenn gilt: Sind $a, b \in I$ mit $a < b$, dann sind auch alle $x \in K$ mit $a < x < b$ in I enthalten.

Proposition (1.7)

Neben der leeren Menge $\varnothing$ sind folgende Teilmengen Intervalle.

- $]a, b[= \{x \in K \mid a < x < b\}$ für $a, b \in \bar{K}$, $a < b$
- $[a, b] = \{x \in K \mid a \le x \le b\}$ für $a, b \in K$, $a \le b$
- $[a, b[= \{x \in K \mid a \le x < b\}$ für $a \in K$, $b \in \bar{K}$, $a < b$
- $]a, b] = \{x \in K \mid a < x \le b\}$ für $a \in \bar{K}$, $b \in K$, $a < b$

Insbesondere ist auch $K =]-\infty, +\infty[$ selbst ein Intervall.

Bem.: Die Teilmenge $M = [1,2] \cup [3,4] \subseteq \mathbb{R}$ ist <u>kein</u> Intervall im Sinne von Def. 1.6, denn:

$2 \in M$, $3 \in M$, $2 < \frac{5}{2} < 3$, aber $5/2 \notin M$

Beweis von Proposition 1.7:

Überprüfe die Intervalleigenschaft nur für

$I = [a, b[$, $a \in K$, $b \in \overline{K}$, $a < b$.

Seien $c, d \in I$ mit $c < d$ und $u \in K$ mit $c < u < d$.

zu zeigen: $u \in I$ zu zeigen: (1) $u \geq a$ (2) $u < b$

<u>zu (1)</u> $u > c$ und $c \in I \Rightarrow c \geq a$

$u > c$ und $c \geq a \overset{!}{\Rightarrow} u > a \Rightarrow u \geq a$

zu (2) $d \in I \Rightarrow d < b \quad u < d$ und $d < b \Rightarrow u < b$

$\square$

Potenzgesetze in einem Ring

Erinnerung: Die n-te Potenz eines Ringelements $a \in R$ ist rekursiv definiert durch

$$a^0 = 1_R \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Lemma (1.8)

Seien R ein Ring, $a, b \in R$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

(i) $a^{m+n} = a^m a^n$

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

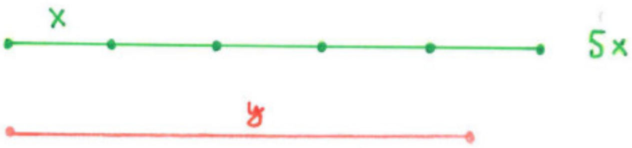
(iii) $(ab)^m = a^m b^m$

(Wie in Lemma 1.4 erfolgt der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.)

Archimedisch angeordnete Körper

Definition (1.9)

Die Anordnung K^+ auf K wird archimedisch genannt, wenn für beliebige $x, y \in K^+$ jeweils ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $n_K x > y$ erfüllt ist. Man bezeichnet (K, K^+) in diesem Fall als archimedisch angeordneten Körper.



Satz (1.10)

Sei (K, K^+) ein archimedisch angeordneter Körper.

(i) Für jedes $\varepsilon \in K^+$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n_K^{-1} < \varepsilon$.

(ii) Sei $x \in K$ mit $x \geq -1_K$. Dann gilt $(1_K + x)^n \geq 1_K + n_K x$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dies ist die sogenannte Bernoullische Ungleichung.

(iii) Ist $b > 1_K$, dann existiert für jedes $\kappa \in K^+$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > \kappa$. (Die Potenz b^n wird „unendlich groß.“).

(iv) Ist dagegen $0_K < b < 1_K$, so gibt es für jedes $\varepsilon \in K^+$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$. (Die Potenz wird „beliebig klein.“).

Beweis von Satz 1.10, neu Teil (i)

Sei $\varepsilon \in K^+$. Wende die archimedische Eigenschaft an auf $x = 1_K$ und $y = \varepsilon^{-1}$ $\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit

$$n \cdot 1_K > \varepsilon^{-1} \rightarrow n_K > \varepsilon^{-1} \Rightarrow \frac{1}{n_K} < \varepsilon$$