Die Struktur der Lösungsmenge eines LGS

Satz (6.21)

Seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ und $b \in K^m$.

- Dann ist $\mathscr{L}_{A,b}^{\mathrm{hom}} = \mathscr{L}_{A,0}$ ein Untervektorraum des K^n.
- Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar und ist $c \in K^n$ eine Lösung, dann gilt $\mathscr{L}_{A,b} = c + \mathscr{L}_{A,b}^{\mathrm{hom}}$. Die Lösungsmenge $\mathscr{L}_{A,b} \subseteq K^n$ ist also ein affiner Unterraum des K^n.

Definition (7.1)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ befindet sich in Zeilenstufenform (kurz ZSF), wenn $A = 0^{(m\times n)}$ gilt oder folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt ein $r \in \{1, ..., m\}$ und $j_1, ..., j_r \in \{1, ..., n\}$ mit $j_1 < j_2 < ... < j_r$, so dass

(i) $a_{ij_i} \neq 0_K$ für $1 \leq i \leq r$ und

(ii) $a_{ij} = 0_K$ für $j < j_i$ oder $i > r$

erfüllt ist. Man nennt r den Zeilenrang einer solchen Matrix. Das Tupel $(r, j_1, ..., j_r)$ bezeichnen wir insgesamt als die Kennzahlen der ZSF.

Die Positionen (i, j_i) mit $1 \leq i \leq r$ in der Matrix werden Zeilenköpfe genannt.

Definition der normierten ZSF

Definition (7.2)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ befindet sich in normierter ZSF, wenn $A = 0^{(m\times n)}$ gilt oder wenn sie in ZSF mit den Kennzahlen $(r, j_1, ..., j_r)$ vorliegt und außerdem die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Es gilt $a_{ij_i} = 1_K$ für $1 \le i \le r$ und $a_{kj_i} = 0_K$ für $1 \le i \le r$ und $1 \le k < i$.

Beispiele für Matrizen in ZSF

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

normierte Zeilenstufenform,
Kennzahlen $r = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 4$.

Bestimmung homogener Lösungsmengen

Sei $\mathscr{L}^{\mathrm{hom}} \subseteq K^n$ die Lösungsmenge des homogenen LGS mit Koeffizientenmatrix $A \in \mathscr{M}_{m \times n,K}$ in normierter ZSF, also des Systems $Ax = 0$. Seien r und $j_1, ..., j_r$ die Kennzahlen der ZSF. Wir setzen $S = \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_r\}$ und definieren für jedes $\ell \in S$ den Vektor

$$v_\ell = e_\ell - \sum_{k=1}^{r} a_{k\ell} e_{j_k}.$$

Der Vektor v_ℓ kommt dadurch zu Stande, dass der Wert 1 an der Stelle ℓ eingetragen und die negativen Spalteneinträge $-a_{k\ell}$ für $1 \leq k \leq r$ auf die Positionen $j_1, ..., j_r$ verteilt werden.

Bestimmung homogener Lösungsmengen (Forts.)

Satz (7.4)

Sei $Ax = 0$ ein homogenes Gleichungssystem mit Matrix A in normierter ZSF wie oben, und sei $\mathscr{L}^{\mathrm{hom}} \subseteq K^n$ die Lösungsmenge.

(i) Im Fall $S = \varnothing$ gilt $\mathscr{L}^{\mathrm{hom}} = \{ \, 0_{K^n} \, \}$.

(ii) Ist S nichtleer, dann ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathscr{L}^{\mathrm{hom}} \quad = \quad \left\{ \sum_{\ell \in S} \lambda_\ell v_\ell \,\middle|\, \lambda_\ell \in K \ \forall \ \ell \in S \right\}.$$

Probeklausur: Di, 10.12., $16^{15}-17^{45}$, B 138 (hier)

Beweis von Satz 7.4:

zu (i) Vor. $S = \emptyset$, d.h. $\{1, \dots n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\} = \emptyset$

$\Rightarrow r = n$, $j_k = k$ für $1 \leq k \leq r$ z.zg.: $\mathcal{L}^{hom} = \{0_{K^n}\}$

wobei nach Def. $\mathcal{L}^{hom} = \{v \in K^n \mid Av = 0_{K^m}\}$

„$\supseteq$" klar, da $A\, 0_{K^n} = 0_{K^m}$

„$\subseteq$" Aus $r = n$, $j_k = k$ folgt, dass die ersten n Zeilen von A die Zeilen der Einheitsmatrix $E^{(n)}$ sind, die übrigen Zeilen sind gleich 0. Daraus folgt für alle $v \in K^n$ jeweils

„⊇" klar, da $A\, 0_{K^n} = 0_{K^m}$

„⊆" Aus $r=n$, $j_k = k$ folgt, dass die ersten n Zeilen

$v \in \mathcal{L}^{hom} \Leftrightarrow Av = 0_{K^m} \Leftrightarrow (Av)_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq m$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = 0_K$ für $1 \leq i \leq m \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = 0_K$ (untere $m-r$ Zeilen von A sind null)

für $1 \leq i \leq n$ $(n=r)$ $\overset{\text{s.o.}}{\Leftrightarrow} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v_j = 0_K$ für $1 \leq i \leq n$

$\Leftrightarrow \delta_{ii} v_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow v_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq n$

$\Leftrightarrow v \in \{0_{K^n}\}$

zu (ii) Zeige nur $\{\sum_{l \in S} \lambda_l v_l \mid \lambda_l \in K\ \forall l \in S\} \subseteq \mathcal{L}^{hom}$.

Da $\mathcal{L}^{hom}$ ein Untervektorraum von K^n ist, genügt es zu überprüfen, dass $v_l \in \mathcal{L}^{hom}$ für jedes $l \in S$ gilt. Sei also $l \in S$.

Nach Def von v_l gilt $(v_l)_l = 1_K$, $(v_l)_{j_k} = -a_{kl}$ für $1 \leq k \leq r$, alle übrigen Einträge von v_l sind gleich 0_K.

außerdem: $a_{ij_k} = \delta_{ik}$ für $1 \le i, k \le r$

z.zg: $A v_l = 0_{K^m}$, d.h. $(A v_l)_i = 0_K$ für

$1 \le i \le m$. Es gilt

$$(A v_l)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_{l_j} \overset{\text{Form des Vektors } v_k}{=} a_{il} (v_l)_l + \sum_{k=1}^{r} a_{ij_k} v_{l_{j_k}}$$

$$= a_{il} + \sum_{k=1}^{r} \delta_{ik}(-a_{kl}) = a_{il} + 1_K \cdot (-a_{il})$$

$$= 0_K.$$

$\square$

Beispiele für die Bestimmung von Lösungsmengen

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$x_1 - 4x_3 + 5x_5 = 0,\ \ x_2 + 2x_3 = 0,\ \ x_4 = 0.$$

Koeffizientenmatrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kennzahlen der normierten ZSF

$$r = 3, \quad j_1 = 1, \quad j_2 = 2, \quad j_3 = 4$$

Indexmenge für die Basisvektoren $S = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,2,4\} = \{3,5\}$

$$\text{Basisvektoren} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungmenge $\mathscr{L}^{\mathrm{hom}} = \{\lambda_3 v_3 + \lambda_5 v_5 \mid \lambda_3, \lambda_5 \in \mathbb{R}\}$

Lösung eines inhomogenen LGS

Satz (7.5)

Sei $\tilde{A} = (A\ b) \in \mathscr{M}_{m\times(n+1),K}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS und $\mathscr{L} \subseteq K^n$ dessen Lösungsmenge. Wir setzen voraus, dass $\tilde{A}$ in normierter ZSF vorliegt, mit den Kennzahlen r und $j_1, ..., j_r$.

(i) Ist $j_r = n+1$, dann gilt $\mathscr{L} = \varnothing$.

(ii) Sei nun $j_r \le n$. Wir definieren einen Vektor $w \in K^n$ durch $w = \sum_{k=1}^{r} b_k e_{j_k}$. Dann gilt $w \in \mathscr{L}$.

Der Lösungsvektor w kommt dadurch zu Stande, dass man die Einträge der letzten Spalte b von $\tilde{A}$ auf die Positionen $j_1, ..., j_r$ des Vektors w verteilt.

Beispiel für die Bestimmung einer speziellen Lösung

Betrachte das LGS bestehend aus

$$x_1 - 4x_3 + 5x_5 = -2$$
$$x_2 + 2x_3 = 7$$
$$x_4 = 5$$

erweiterte Koeffizientenmatrix in $M_{3\times 6,\mathbb{R}}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Kennzahlen der normierten ZSF:

$r = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 4$

spezielle Lösung: Schreibe die Einträge von $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ an die Stellen 1, 2 und 4.

d.h. $w = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \end{array}$

Konstanz der Lösungsmenge bei Zeilenumformungen

Proposition (7.6)

Sei K ein Körper, und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $A \in \mathscr{M}_{m \times n,K}$ und $b \in K^m$. Dann gilt $\mathscr{L}_{A,b} = \mathscr{L}_{TA,Tb}$ für jede Matrix $T \in \mathrm{GL}_m(K)$. Mit anderen Worten, die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn man beide Seiten der Gleichung $Ax = b$ von links mit einer invertierbaren Matrix multipliziert.

Proposition (7.7)

Seien A, B, C, D Matrizen über K.

(i) Stimmt die Spaltenzahl von A und B mit der Zeilenzahl von C überein, dann gilt

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} C \quad = \quad \begin{pmatrix} AC \\ BC \end{pmatrix}.$$

(ii) Stimmt die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B und C überein, dann gilt

$$A \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} AB & AC \end{pmatrix}.$$

(iii) Stimmt die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von C und die Spaltenzahl von B mit der Zeilenzahl von D überein, dann gilt

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad = \quad AC + BD.$$

Beispiel für eine Matrix in Blockschreibe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0^{(2\times 3)} \\ 0^{(2\times 2)} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}, \mathbb{R}$$

konkretes Beispiel für Prop 7.7 (iii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(A\ B)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \\ 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186 & 200 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$96 + 70 + 24 + 10$

$$\begin{matrix} 15 & 16 \end{matrix}$$

$$96+70+24+10$$

$$AC+BD=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & 14\\ 15 & 16\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}31 & 34\\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}155 & 166\\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}186 & 200\\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}$$

Allgemeine Regel für Blockmatrizen

Proposition (7.8)

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}$, seien $A^{(i,j)}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ und $B^{(j,k)}$ für $1 \leq j \leq n$ und $1 \leq k \leq r$ Matrizen mit der Eigenschaft, dass die Spaltenzahl von $A^{(i,j)}$ jeweils mit der Zeilenzahl von $B^{(j,k)}$ übereinstimmt, für alle i, j, k. Außerdem setzen wir voraus, dass die Zeilenzahlen von $A^{(i,j)}$ für festes i und die Spaltenzahlen von $B^{(j,k)}$ für festes k jeweils gleich sind. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} A^{(1,1)} & \cdots & A^{(1,n)} \\ \vdots & & \vdots \\ A^{(m,1)} & \cdots & A^{(m,n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{(1,1)} & \cdots & B^{(1,r)} \\ \vdots & & \vdots \\ B^{(n,1)} & \cdots & B^{(n,r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{(1,1)} & \cdots & C^{(1,r)} \\ \vdots & & \vdots \\ C^{(m,1)} & \cdots & C^{(m,r)} \end{pmatrix}$$

mit $C^{(i,k)} = \sum_{j=1}^{n} A^{(i,j)} B^{(j,k)}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq k \leq r$.

Definition der Elementarmatrizen

Definition (7.9)

Eine Matrix aus $\mathscr{M}_{m,K}$ der Form

$$\mathrm{M}_{k,\lambda} = E^{(m)} + (\lambda - 1)B_{kk}^{(m \times m)}$$

mit $k \in \{1, ..., m\}$ und $\lambda \in K^\times$ oder der Form

$$\mathrm{A}_{k,\ell,\lambda} = E^{(m)} + \lambda B_{\ell k}^{(m \times m)}$$

mit $k, \ell \in \{1, ..., m\}$ und $\lambda \in K$ wird Elementarmatrix genannt.

Beispiele für Elementarmatrizen:

$$M_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$k=3,\ \lambda = 2,\ m=3$

allgemeine Blockgestalt

$$\begin{pmatrix} E^{(k-1)} & 0^{((k-1)\times(1))} & 0^{((k-1)\times(m-k))} \\ 0 & \boxed{\lambda} & 0^{((1)\times(m-k))} \\ 0 & 0^{((m-k)\times(1))} & E^{(m-k)} \end{pmatrix}$$

$$A_{3,2,-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$k=3,\ l=2,\ \lambda=-1$

Blockgestalt:

$$\begin{pmatrix} E^{(l-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & E^{(k-l-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E^{(m-k)} \end{pmatrix}$$

Wirkung der Elementarmatrizen

Proposition (7.10)

Sei $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$.

(i) Sei $\lambda \in K^\times$ und $k \in \{1, ..., m\}$. Multipliziert man die Matrix A von links mit der Elementarmatrix $\mathrm{M}_{k,\lambda}$, so bewirkt dies eine Multiplikation der k-ten Zeile mit dem Wert λ.

(ii) Seien $k, \ell \in \{1, ..., m\}$ mit $k \neq \ell$ und $\lambda \in K$. Multipliziert man die Matrix A mit der Elementarmatrix $\mathrm{A}_{k,\ell,\lambda}$, dann wird das λ-fache der k-ten Zeile zur ℓ-ten Zeile von A addiert.

Die in der Proposition beschriebenen Umformungen werden elementare Zeilenumformungen genannt. Aus Proposition 7.6 folgt, dass sich die Lösungsmenge eines LGS durch elementare Zeilenumformungen nicht ändert.

konkretes Beispiel für Prop. 7.10:

$$M_{3,2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\18&20&22&24\end{pmatrix}$$

$$A_{3,2,-1}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\-4&-4&-4&-4\\9&10&11&12\end{pmatrix}$$

Operation: Addition des (-1)-fachen der 3-ten Zeile zur zweiten

Zeilenvertauschung durch elementare Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} a_{k\bullet} \\ a_{\ell\bullet} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{A}_{k,\ell,1}} \begin{pmatrix} a_{k\bullet} \\ a_{k\bullet} + a_{\ell\bullet} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{M}_{k,-1}} \begin{pmatrix} -a_{k\bullet} \\ a_{k\bullet} + a_{\ell\bullet} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{A}_{\ell,k,1}} \begin{pmatrix} a_{\ell\bullet} \\ a_{k\bullet} + a_{\ell\bullet} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{A}_{k,\ell,-1}} \begin{pmatrix} a_{\ell\bullet} \\ a_{k\bullet} \end{pmatrix}$$

Umformung von Matrizen auf normierte ZSF

Lemma (7.11)

Sei $A \in \mathscr{M}_{m\times 1,K}$ eine Matrix, die aus einer einzigen Spalte besteht, also eine Matrix der Form $A = {}^{\mathrm{t}}(a_1\ a_2\ \dots\ a_m)$. Sind nicht alle Einträge von A gleich Null, dann gibt es ein Produkt $E \in \mathscr{M}_{m,K}$ von Elementarmatrizen mit $EA = {}^{\mathrm{t}}(1_K\ 0_K\ 0_K\ \dots\ 0_K)$.

Satz (7.12)

Jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf normierte ZSF gebracht werden. Eine äquivalente Formulierung dieser Aussage lautet: Es gibt ein Produkt $E \in \mathscr{M}_{m,K}$ von Elementarmatrizen, so dass EA in normierter ZSF vorliegt.

Beispiel für Lemma 7.11:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \xmapsto{M_{1,-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \xmapsto{A_{1,2,-4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \xmapsto{A_{1,3,-5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A_{k,l,\lambda}$ = addiere das λ-fache der k-ten Zeile zur l-ten

also: $$A_{1,3,-5} \cdot A_{1,2,-4} \cdot M_{1,-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformung von Matrizen auf normierte ZSF

Vorgehensweise:

- Falls die erste Spalte nur Nulleinträge hat, streiche diese und setze das Verfahren mit dem Rest der Matrix fort.
- Ansonsten tausche einen beliebigen Eintrag ungleich 0 nach oben.
- Sorge durch Zeilenumformungen dafür, dass alle übrigen Einträge der Spalte zu Null werden.
- Streiche die erste Zeile und die erste Spalte, setze das Verfahren mit der restlichen Matrix fort.

Beispiel zur Anwendung des Gaußverfahrens

Beispiel für die Anwendung des Gauß'schen Eliminationsverf.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

normierte Zeilenstufenform

Kennzahlen $r = 3$,

$j_1 = 2$, $j_2 = 4$, $j_3 = 5$