Definition der linearen Gleichungssysteme (LGS)

Definition (6.19)

Sei K ein Körper, und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein lineares Gleichungssystem über K bestehend aus m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, ..., x_n$ ist ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

wobei $a_{ij} \in K$ und $b_i \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ ist. Gilt $b_i = 0$ für $1 \leq i \leq m$, dann spricht man von einem homogenen, ansonsten von einem inhomogenen LGS.

Definition (6.20)

- Die Matrix $A = (a_{ij})_{m \times n, K}$ in Definition 6.19 wird Koeffizientenmatrix des LGS genannt.
- Die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times (n+1), K}$ gegeben durch $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ und $\tilde{a}_{i,n+1} = b_i$ für $1 \leq i \leq m$ heißt erweiterte Koeffizientenmatrix.
- Bezeichnet x die $n \times 1$-Matrix mit den Einträgen $x_1, ..., x_n$, dann kann das lineare Gleichungssystem in der Form $Ax = b$ dargestellt werden.

Weitere Grundbegriffe (Forts.)

Definition (6.20)

- Die Menge

$$\mathscr{L} \quad = \quad \mathscr{L}_{A,b} \quad = \quad \{c \in K^n \mid Ac = b\}$$

  bezeichnet man als Lösungsmenge, deren Elemente als Lösungen des linearen Gleichungssystems.
- Ist $\mathscr{L}_{A,b} \neq \varnothing$, dann bezeichnet man $Ax = b$ als lösbar. Besteht $\mathscr{L}_{A,b}$ aus einem einzigen Element, dann spricht man von eindeutiger Lösbarkeit.

Erstes Beispiel

lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & + & 2z & = & 8 \\ -x & + & 2y & + & 5z & = & -3 \\ & & 7y & - & 2z & = & -23 \end{array}$$

Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & -23 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge

$$\mathscr{L}_{A,b} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Zweites Beispiel

lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 3z & = & -4 \\ 2x & - & 8y & + & 7z & = & 11 \\ 5x & - & 3y & + & 4z & = & 7 \end{array}$$

Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 2 & -8 & 7 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 & -4 \\ 2 & -8 & 7 & 11 \\ 5 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge

$$\mathscr{L}_{A,b} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -27 \\ -34 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Struktur der Lösungsmenge eines LGS

Satz (6.21)

Seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ und $b \in K^m$.

- Dann ist $\mathscr{L}^{\mathrm{hom}}_{A,b} = \mathscr{L}_{A,0}$ ein Untervektorraum des K^n.
- Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar und ist $c \in K^n$ eine Lösung, dann gilt $\mathscr{L}_{A,b} = c + \mathscr{L}^{\mathrm{hom}}_{A,b}$. Die Lösungsmenge $\mathscr{L}_{A,b} \subseteq K^n$ ist also ein affiner Unterraum des K^n.

Beweis von Satz 6.21

- Die homogene Lösungsmenge $\mathcal{L}_{A,b}^{hom}$ ist nach Def. der <u>Kern</u> der linearen Abb. $\phi_A : K^n \to K^m, v \mapsto Av$ und somit ein Untervektorraum des K^n.
- geg. $c \in \mathcal{L}_{A,b}$, d.h. $Ac = b$

<u>Beh</u>: $\mathcal{L}_{A,b} = c + \mathcal{L}_{A,b}^{hom}$ $\quad (\mathcal{L}_{A,b}^{hom} = \mathcal{L}_{A,0_{K^m}})$

„$\supseteq$" Sei $v \in c + \mathcal{L}_{A,b}^{hom} \Rightarrow \exists\, w \in \mathcal{L}_{A,b}^{hom}$ mit $v = c + w$

$w \in \mathcal{L}_{A,b}^{hom} \Rightarrow Aw = 0_{K^m} \Rightarrow Av = A(c+w) =$

$Ac + Aw = b + 0_{K^m} = b \Rightarrow v \in \mathcal{L}_{A,b}$

„$\subseteq$" Sei $v \in \mathcal{L}_{A,b}$, d.h. $Av = b$. Sei $w = v - c$.

$\Rightarrow Aw = A(v-c) = Av - Ac = b - b = 0_{K^m}$

$\Rightarrow w \in \mathcal{L}_{A,b}^{hom} \Rightarrow v = c + w \in c + \mathcal{L}_{A,b}^{hom}$ $\square$

Ein Vektorraum bestehend aus Abbildungen

- Sei K ein Körper, X eine Menge und V ein K-Vektorraum.
- Sei $\mathrm{Abb}(X, V)$ die Menge der Abbildungen $X \to V$.
- Wir definieren auf $\mathrm{Abb}(X, V)$ eine Verknüpfung $+$ durch

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

  für alle $x \in X$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{Abb}(X, V)$.
- Außerdem definieren wir eine Abbildung

$$\cdot : K \times \mathrm{Abb}(X, V) \to \mathrm{Abb}(X, V)$$

  durch $(\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ für $x \in X$, $\lambda \in K$ und $\varphi \in \mathrm{Abb}(X, V)$.

Proposition (6.22)

Das Tripel $(\mathrm{Abb}(X, V), +, \cdot\,)$ ist ein K-Vektorraum.

Beweis von Prop. 6.22

geg.: X Menge, K Körper, V K-Vektorraum, $\mathrm{Abb}(X,V)$ = Menge der Abb. $X \to V$

Nach Def. von $+ : \mathrm{Abb}(X,V) \times \mathrm{Abb}(X,V) \to \mathrm{Abb}(X,V)$ gilt $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{Abb}(X,V)$ und $x \in X$.

Nach Def. von $\cdot : K \times \mathrm{Abb}(X,V) \to \mathrm{Abb}(X,V)$ gilt $(\lambda \cdot_A \varphi)(x) = \lambda \cdot_V \varphi(x)$ für alle $\lambda \in K$, $\varphi \in \mathrm{Abb}(X,V)$ und $x \in X$.

Sei $A = \mathrm{Abb}(X,V)$. Zu überprüfen:

(i) $(A, +)$ ist abelsche Gruppe

(ii) Für alle $\lambda, \mu \in K$ und $\varphi, \psi \in A$

gilt (a) $(\lambda + \mu) \cdot \varphi = \lambda \varphi + \mu \cdot \varphi$

(b) $\lambda (\varphi + \psi) = \lambda \cdot \varphi + \lambda \psi$

(c) $\lambda \cdot (\mu \cdot \varphi) = (\lambda \mu) \cdot \varphi$

(d) $1_K \cdot \varphi = \varphi$

zu (i) zu überprüfen (1) Assoziativität und Kommutativität

(2) Existenz eines Neutralelements (= Nullvektor von A)

(3) Existenz eines Inversen (= Negativen) für jedes $\varphi \in A$.

<u>zu (1)</u> Seien $\varphi, \phi, \psi \in A$. z.zg.:

$(\varphi +_A \phi) +_A \psi = \varphi +_A (\phi +_A \psi)$ Sei $x \in X$.

$((\varphi +_A \phi) +_A \psi)(x) = (\varphi +_A \phi)(x) +_V \psi(x) =$

$= (\varphi(x) +_V \phi(x)) +_V \psi(x) \underset{\text{Assoziativität von } +_V \text{ auf } V}{=} \varphi(x) +_V (\phi(x) +_V \psi(x))$

$= \varphi(x) +_V (\phi +_A \psi)(x) = (\varphi +_A (\phi +_A \psi))(x)$

Genauso führt man die Kommutativität von $+_A$ auf die Kommutativität von $+_V$ zurück.

<u>zu (2)</u> Definieren $0_A \in A$ durch $0_A(x) = 0_V \ \forall x \in X$.

Sei $\varphi \in A$. z.zg.: $\varphi +_A 0_A = \varphi$, $0_A +_A \varphi = \varphi$

Sei $x \in X$. $(\varphi +_A 0_A)(x) = \varphi(x) +_V 0_A(x) =$

A

und

at

Null-

gativen)

$\varphi(x) +_V 0_V = \varphi(x)$. $\Rightarrow \varphi +_A 0_A = \varphi$, und auf Grund der Kommutativität folgt $0_A +_A \varphi = \varphi +_A 0_A = \varphi$.

<u>zu (3)</u> Sei $\varphi \in A$. Definiere $-\varphi \in A$ durch $(-\varphi)(x) = -\varphi(x) \ \forall x \in X$. zu überprüfen:

$\varphi +_A (-\varphi) = 0_A$, $(-\varphi) +_A \varphi = 0_A$. Sei $x \in X$.

$(\varphi +_A (-\varphi))(x) = \varphi(x) +_V (-\varphi)(x) = \varphi(x) +_V (-\varphi(x))$
$= 0_V = 0_A(x)$. $\Rightarrow \varphi +_A (-\varphi) = 0_A$, und genauso wie unter (2) folgt auch $(-\varphi) + \varphi = 0_A$.

Die Rechenregeln unter (ii) werden nach demselben Schema überprüft. Beispiel (ii)(b):
Seien $\lambda \in K$ und $\varphi, \psi \in A$.

z.zg.: $\lambda \cdot_A (\varphi +_A \psi) = \lambda \cdot_A \varphi +_A \lambda \cdot_A \psi$ Sei $x \in X$.

$(\lambda \cdot_A (\varphi +_A \psi))(x) = \lambda \cdot_V (\varphi +_A \psi)(x) = \lambda \cdot_V \big(\varphi(x) +_V \psi(x)\big)$

$= \lambda \cdot_V \varphi(x) +_V \lambda \cdot_V \psi(x) = (\lambda \cdot_A \varphi)(x) +_V (\lambda \cdot_A \psi)(x)$

[V Vektorraum $= (\lambda \cdot_A \varphi +_A \lambda \cdot_A \psi)(x)$ $\square$

Satz (6.23)

Sei K ein Körper, und seien V und W zwei K-Vektorräume. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge der linearen Abbildungen $V \to W$. Für vorgegebene $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \in K$ seien die Abbildungen $\varphi + \psi : V \to W$ und $\lambda \cdot \varphi : V \to W$ definiert durch

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$

und

$$(\lambda \cdot \varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$$

für alle $v \in V$. Dann ist $(\mathrm{Hom}_K(V, W), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

Beweis von Satz 6.23:

In Satz 6.22 wurde gezeigt, dass $(\mathrm{Abb}(V,W), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist. Überprüfe nun: Die Teilmenge $\mathrm{Hom}_K(V,W) \subseteq \mathrm{Abb}(V,W)$ ist ein Untervektorraum.

zu überprüfen (0) $0_{\mathrm{Abb}(V,W)} \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$

(1) $\forall \lambda \in K,\ \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$: $\varphi + \psi,\ \lambda\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$

zu (0) Seien $v, v' \in V$ und $\mu \in K$. Dann gilt $0_{\mathrm{Abb}(V,W)}(v+v') =$
$0_W = 0_W + 0_W = 0_{\mathrm{Abb}(V,W)}(v) + 0_{\mathrm{Abb}(V,W)}(v')$ und
$0_{\mathrm{Abb}(V,W)}(\mu v) = 0_W = \mu 0_W = \mu\, 0_{\mathrm{Abb}(V,W)}(v)$.

zu (1) Seien $v, v' \in V$. $(\varphi+\psi)(v+v') = \varphi(v+v') + \psi(v+v') \overset{\varphi,\psi \text{ linear}}{=}$
$\varphi(v) + \varphi(v') + \psi(v) + \psi(v') = \varphi(v) + \psi(v) + \varphi(v') + \psi(v')$
$= (\varphi+\psi)(v) + (\varphi+\psi)(v')$ Rest: siehe Skript $\square$

Definition (7.1)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ befindet sich in Zeilenstufenform (kurz ZSF), wenn $A = 0^{(m\times n)}$ gilt oder folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt ein $r \in \{1, ..., m\}$ und $j_1, ..., j_r \in \{1, ..., n\}$ mit $j_1 < j_2 < ... < j_r$, so dass

(i) $a_{ij_i} \neq 0_K$ für $1 \leq i \leq r$ und

(ii) $a_{ij} = 0_K$ für $j < j_i$ oder $i > r$

erfüllt ist. Man nennt r den Zeilenrang einer solchen Matrix. Das Tupel $(r, j_1, ..., j_r)$ bezeichnen wir insgesamt als die Kennzahlen der ZSF.

Die Positionen (i, j_i) mit $1 \leq i \leq r$ in der Matrix werden Zeilenköpfe genannt.

Definition der normierten ZSF

Definition (7.2)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ befindet sich in normierter ZSF, wenn $A = 0^{(m\times n)}$ gilt oder wenn sie in ZSF mit den Kennzahlen $(r, j_1, ..., j_r)$ vorliegt und außerdem die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Es gilt $a_{ij_i} = 1_K$ für $1 \le i \le r$ und $a_{kj_i} = 0_K$ für $1 \le i \le r$ und $1 \le k < i$.

Beispiele für Matrizen in ZSF

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform,
Kennzahlen $r = 4$, $j_1 = 2$, $j_2 = 3$, $j_3 = 4$, $j_4 = 6$
(aber keine normierte Zeilenstufenform)

Beispiele für Matrizen in ZSF

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

normierte Zeilenstufenform,
Kennzahlen $r = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 4$.

Beispiele für Matrizen in ZSF: Einheitsmatrix

$$E^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

normierte Zeilenstufenform,
Kennzahlen $r = 4$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$, $j_4 = 4$

Bestimmung homogener Lösungsmengen

Sei $\mathscr{L}^{\text{hom}} \subseteq K^n$ die Lösungsmenge des homogenen LGS mit Koeffizientenmatrix $A \in \mathscr{M}_{m \times n, K}$ in normierter ZSF, also des Systems $Ax = 0$. Seien r und $j_1, \ldots, j_r$ die Kennzahlen der ZSF. Wir setzen $S = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$ und definieren für jedes $\ell \in S$ den Vektor

$$v_\ell \quad = \quad e_\ell - \sum_{k=1}^{r} a_{k\ell} e_{j_k}.$$

Der Vektor v_ℓ kommt dadurch zu Stande, dass der Wert 1 an der Stelle ℓ eingetragen und die negativen Spalteneinträge $-a_{k\ell}$ für $1 \leq k \leq r$ auf die Positionen $j_1, \ldots, j_r$ verteilt werden.

Bestimmung homogener Lösungsmengen (Forts.)

Satz (7.4)

Sei $Ax = 0$ ein homogenes Gleichungssystem mit Matrix A in normierter ZSF wie oben, und sei $\mathscr{L}^{\text{hom}} \subseteq K^n$ die Lösungsmenge.

(i) Im Fall $S = \varnothing$ gilt $\mathscr{L}^{\text{hom}} = \{ 0_{K^n} \}$.

(ii) Ist S nichtleer, dann ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathscr{L}^{\text{hom}} \quad = \quad \left\{ \sum_{\ell \in S} \lambda_\ell v_\ell \;\middle|\; \lambda_\ell \in K \;\forall\; \ell \in S \right\}.$$

Beispiele für die Bestimmung von Lösungsmengen

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$x = 0, \quad y + 2z = 0$$

Koeffizientenmatrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kennzahlen der normierten ZSF

$$r = 2, \;\; j_1 = 1, \;\; j_2 = 2$$

Indexmenge für die Basisvektoren $S = \{1, 2, 3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$

$$\text{Basisvektor} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungmenge $\mathscr{L}^{\mathrm{hom}} = \{\lambda_3 v_3 \mid \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

Beispiele für die Bestimmung von Lösungsmengen

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$x = 0, \quad z = 0$$

Koeffizientenmatrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kennzahlen der normierten ZSF

$$r = 2, \;\; j_1 = 1, \;\; j_2 = 3$$

Indexmenge für die Basisvektoren $S = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3\} = \{2\}$

$$\text{Basisvektor} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungmenge $\mathscr{L}^{\mathrm{hom}} = \{\lambda_2 v_2 \mid \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

Beispiele für die Bestimmung von Lösungsmengen

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$x_1 - 4x_3 + 5x_5 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kennzahlen der normierten ZSF

$$r = 3, \quad j_1 = 1, \quad j_2 = 2, \quad j_3 = 4$$

Indexmenge für die Basisvektoren $S = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,2,4\} = \{3,5\}$

$$\text{Basisvektoren} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungmenge $\mathscr{L}^{\mathrm{hom}} = \{\lambda_3 v_3 + \lambda_5 v_5 \mid \lambda_3, \lambda_5 \in \mathbb{R}\}$

weiteres Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2, \ j_1 = 2, \ j_2 = 3$

$S = \{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow -a_{21} \\ \leftarrow -a_{31} \end{matrix}$$