Die komplexen Zahlen

In einem der folgenden Beispiele greifen wir auf die komplexen Zahlen zurück. Wichtig ist für uns momentan nur, dass es sich dabei um einen Körper $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften handelt:

- Es gilt $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$.
- Es existiert ein Element $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.
- Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Diese Informationen reichen aus , um in $\mathbb{C}$ rechnen zu können. Die Summe zweier komplexer Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) ist beispielsweise gegeben durch

$$\begin{aligned} z + w &= (a + ib) + (c + id) = a + ib + c + d \\ &= a + c + ib + id = (a + c) + i(b + d) \quad , \end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen (Forts.)

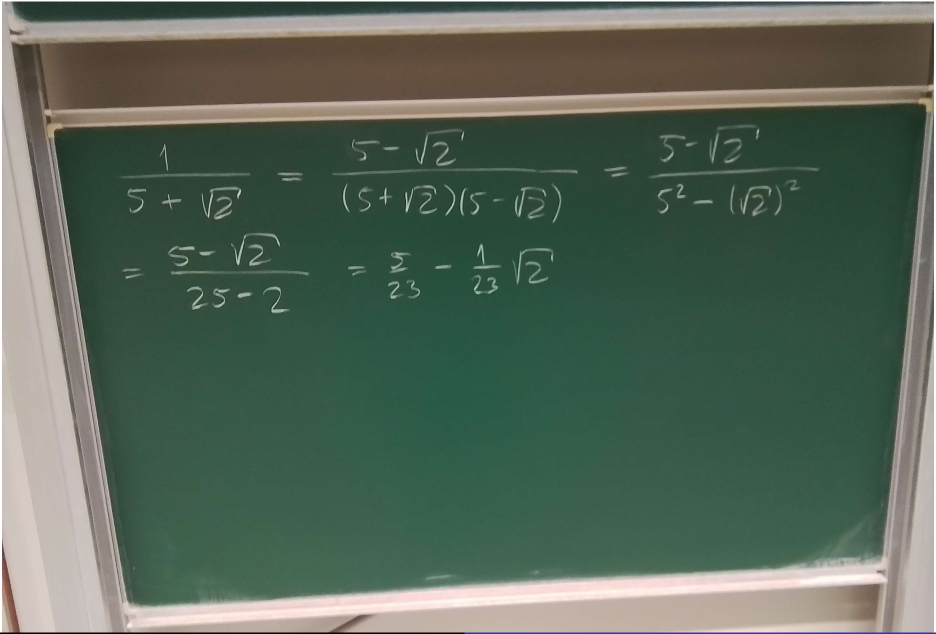
und das Produkt ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z \cdot w \quad &= \quad (a + ib) \cdot (c + id) \quad = \\ a \cdot c + (ib) \cdot c + a \cdot (id) + (ib) \cdot (id) \quad &= \\ ac + i(bc) + i(ad) + i^2 bd \quad &= \\ ac + i(bc + ad) + (-1)bd \quad &= \quad (ac - bd) + i(bc + ad). \end{aligned}$$

Beispiel:

$$(2 + 3i) \cdot (1 - 2i) \quad = \quad 8 - i$$

Beseitigung einer Irrationalität im Nenner



Die komplexen Zahlen (Forts.)

Ist $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, dann erhält man den Kehrtwert von z durch

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2 - i^2 b^2} \\ &= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \cdot \frac{(-b)}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\frac{1}{3+4i} = \tfrac{3}{25} + i(-\tfrac{4}{25})$$

Definition der Untervektorräume

Definition (6.4)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ wird Untervektorraum von V genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $0_V \in U$

(ii) $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$

(iii) $\lambda \cdot v \in U$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$

Beispiele für Untervektorräume

(i) Ist V ein beliebiger K-Vektorraum, dann sind $\{0_V\}$ und V Untervektorräume von V.

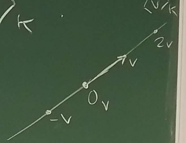
(ii) Für jedes $v \in V$ ist $\langle v \rangle_K = \{\lambda v \mid \lambda \in K\}$ ein Untervektorraum. Im Fall $v \neq 0_V$ bezeichnet man ihn als lineare Gerade.

(iii) Für beliebige v, w ist auch

$$\langle v, w \rangle_K \quad = \quad \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in K\}$$

ein Untervektorraum. Ist $v \neq 0_V$ und $w \notin \langle v \rangle_K$, dann nennt man $\langle v, w \rangle_K$ eine lineare Ebene.

Nachweis der Untervektorraum-Eig. von $\langle v\rangle_K$.



zu überprüfen: (1) $0_V \in \langle v\rangle_K$

(2) $\forall w, w' \in \langle v\rangle_K \ \forall \mu \in K: \ w+w' \in \langle v\rangle_K$

und $\mu w \in \langle v\rangle_K$

Nach Def. ist $\langle v\rangle_K = \{\lambda v \mid \lambda \in K\}$.

<u>zu (1)</u> Es gilt $0_V = 0_K \cdot v \Rightarrow 0_V \in \langle v\rangle_K$

<u>zu (2)</u> Seien $w, w' \in \langle v\rangle_K$ und $\mu \in K$.

$w, w' \in \langle v\rangle_K \Rightarrow \exists \lambda, \lambda' \in K$ mit $w = \lambda \cdot v$, $w' = \lambda' v$.

$\Rightarrow w + w' = \lambda \cdot v + \lambda' v = (\lambda + \lambda') v \xRightarrow{\lambda+\lambda' \in K} w + w' \in \langle v\rangle_K$

$\mu w = \mu(\lambda \cdot v) = (\mu\lambda) v \xRightarrow{\mu\lambda \in K} \mu w \in \langle v\rangle_K$

Definition der affinen Unterräume

Definition (6.6)

Eine Teilmenge $A \subseteq V$ wird affiner Unterraum von V genannt, wenn entweder $A = \varnothing$ gilt oder ein Untervektorraum U und ein Vektor $v \in V$ existieren, so dass

$$A \quad = \quad v + U \quad = \quad \{v + u \mid u \in U\} \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Beispiele für affine Unterräume

(i) Seien $u, v \in V$. Dann ist $u + \langle v \rangle_K = \{u + \lambda v \mid \lambda \in K\}$ ein affiner Unterraum. Im Fall $v \neq 0_V$ bezeichnet man ihn als affine Gerade.

(ii) Für beliebige $u, v, w \in V$ ist durch $u + \langle v, w \rangle_K = \{u + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in K\}$ ein affiner Unterraum gegeben. Ist $v \neq 0_V$ und w kein skalares Vielfaches von v (also $w \neq \lambda v$ für alle $\lambda \in K$), dann nennt man $u + \langle v, w \rangle_K$ eine affine Ebene.

konkretes Beispiel für eine affine Ebene:

$K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = e_1$, $w = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = e_2$

$$U = \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda v + \mu \cdot w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$
$$= \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix} + U = \left\{\begin{pmatrix}2+\lambda\\5+\mu\\9\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$ ist ein

affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$

Struktur der affinen Unterräume

Proposition (6.7)

Sei V ein K-Vektorraum und $\varnothing \neq A \subseteq V$ ein affiner Unterraum.

(i) Es gibt genau einen Untervektorraum U von V, so dass die Gleichung $A = v + U$ für ein $v \in V$ erfüllt ist.

(ii) Für jeden Vektor $w \in A$ erfüllt der Untervektorraum U aus Teil (i) die Gleichung $A = w + U$.

Wir nennen U den zu A gehörenden Untervektorraum und bezeichnen ihn mit $\mathscr{L}(A)$.

„$\subseteq$" Sei $v' \in v+U \Rightarrow \exists u \in U$ mit $v' = v+u$

Beweis von Prop. 6.7:

zu ii) Zu zeigen ist nur die Eindeutigkeit von U.
Seien U' ein weiterer Untervektorraum und $v' \in V$ ein weiterer Vektor mit $v+U = A = v'+U'$.

Zu zeigen: $U = U'$ $\quad v' = v' + 0_V,\ 0_V \in U' \Rightarrow v' \in v'+U'$

$\Rightarrow v' \in v+U \Rightarrow \exists u_0 \in U$ mit $v' = v+u_0$

Nachweis von $U' \subseteq U$: Sei $u \in U' \Rightarrow v'+u \in A$

$\Rightarrow v'+u \in v+U \Rightarrow \exists u'' \in U$ mit $v'+u = v+u''$

$\Rightarrow u = (v-v') + u'' = \underbrace{(-u_0)}_{\in U} + \underbrace{u''}_{\in U} \in U$

Nachweis von $U \subseteq U'$: analog, vertausche die Rollen von U und U'.

zu (ii) Sei $w \in A$. z.zg.: $A = w + U$

gleichbedeutend: $v + U = w + U$

$w \in A \Rightarrow \exists u_0 \in U$ mit $w = v + u_0 \Leftrightarrow v = w + (-u_0)$

„$\subseteq$" Sei $v' \in v + U \Rightarrow \exists u \in U$ mit $v' = v + u$

$\Rightarrow v' = w + \underbrace{(-u_0) + u}_{\in U} \Rightarrow v' \in w + U$

„$\supseteq$" Sei $v' \in w + U \Rightarrow \exists u \in U$ mit $v' = w + u$.

$\Rightarrow v' = (v + u_0) + u = v + \underbrace{(u_0 + u)}_{\in U} \Rightarrow v' \in v + U$

$\square$

Definition der linearen Abbildungen

Definition (6.8)

Seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ K-Vektorräume. Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt K-lineare Abbildung oder Homomorphismus von K-Vektorräumen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $\phi(v +_V w) = \phi(v) +_W \phi(w)$ für alle $v, w \in V$

(ii) $\phi(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W \phi(v)$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in K$

Häufig wird (etwas ungenau) statt von einer K-linearen auch einfach von einer linearen Abbildung gesprochen.

Das Matrix-Vektor-Produkt als lineare Abbildung

Proposition (6.11)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathscr{M}_{m \times n, K}$. Dann ist durch

$$\phi_A : K^n \to K^m \quad , \quad v \mapsto Av$$

eine lineare Abbildung gegeben.

Beispiel für ein Matrix-Vektor-Produkt:

$K = \mathbb{R}$, $m = 2$, $n = 3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Nach Prop 6.11 ist $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto Av$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

wichtig Regel: Die Bilder der Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ usw. sind immer die Spalten der Matrix.

Beweis von Prop 6.11: Seien $v, v' \in K^n$ und $\lambda \in K$.
Auf Grund der Rechenregeln für Matrizen gilt
$A(v+v') = Av + Av'$ und $A(\lambda v) = \lambda(Av)$.
Daraus folgt $\phi_A(v +_{K^n} v') = A(v+v') = Av + Av' = \phi_A(v) +_{K^m} \phi_A(v')$ und $\phi_A(\lambda \cdot_{K^n} v) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda \cdot_{K^m} \phi(v)$

Rechenregeln für linearen Abbildungen

Lemma (6.9)

Ist $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\phi(0_V) = 0_W$, $\phi(-v) = -\phi(v)$ und $\phi(v - w) = \phi(v) - \phi(w)$ für alle $v, w \in V$.

Lemma (6.10)

Seien V, W K-Vektorräume, $n \in \mathbb{N}$, außerdem $v_1, ..., v_n \in V$ und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \phi(v_k).$$

Beweis von Lemma 6.9:

geg: K-Vektorräume V, W

$\phi: V \to W$ K-lineare Abb., $v, w \in V$

z. zg: (i) $\phi(0_V) = 0_W$ (ii) $\phi(-v) = -\phi(v)$

(iii) $\phi(v-w) = \phi(v) - \phi(w)$

<u>zu (i)</u> $\phi(0_V) = \phi(0_K \cdot 0_V) = 0_K \cdot \underbrace{\phi(0_V)}_{\in W}$

$= 0_W$

<u>zu (ii)</u> $\phi(-v) = \phi((-1_K)\, v) = (-1_K) \cdot \phi(v)$

$= -\phi(v)$

zu (iii) $\phi(v-w) = \phi(v +_V (-w)) =$

$\phi(v) +_W \phi(-w) \overset{(ii)}{=} \phi(v) +_W (-\phi(w))$

$= \phi(v) - \phi(w)$

$\square$

Jnd

Sei

Notation: $\sum_{k=1}^{n} v_k$ bedeutet $v_1 + v_2 + \dots + v_n$,

wobei $v_1, \dots, v_n$ Elemente eines K-Vektorraums V

Beweis von Lemma 6.10:

geg: V, W K-Vektorräume, $\phi: V \to W$ eine K-lineare Abbildung. z.zg:

Ist $n \in \mathbb{N}$, und sind $v_1, \dots, v_n \in V$, dann gilt

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \phi(v_k) \quad (*)$$

Ind-anfang: Beweis von $(*)$ für $n = 1$

Sei $v_1 \in V$. Dann gilt $\phi\left(\sum_{k=1}^{1} v_k\right) = \phi(v_1) = \sum_{k=1}^{1} \phi(v_k)$

Ind-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze die Aussage (*) für n voraus (Induktionsvoraussetzung)

Seien $v_1, \dots, v_{n+1} \in V$. z.zg.: $\phi\left(\sum_{k=1}^{n+1} v_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \phi(v_k)$

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n+1} v_k\right) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} v_k +_V v_{n+1}\right) =$$

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) +_W \phi(v_{n+1}) \overset{\text{Ind-V.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \phi(v_k) +_W \phi(v_{n+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \phi(v_k)$$

$\square$