§ 6. Vektorräume, lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme

zur Wiederholung:

Definition

- Eine abelsche Halbgruppe ist ein Paar $(A, +)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge A und einer kommutativen und assoziativen Verknüpfung $+$ auf A.
- Man bezeichnet das Paar als abelsches Monoid, wenn in der Halbgruppe ein Neutralelement existiert, also ein Element 0_A, so dass $0_A + a = a$ und $a + 0_A = a$ für alle $a \in A$ gilt.
- Ein abelsches Monoid $(A, +)$ wird abelsche Gruppe genannt, wenn jedes Element a des Monoids invertierbar ist. Das bedeutet, dass jeweils ein Element $-a \in A$ existiert, so dass $a + (-a) = 0_A$ und $(-a) + a = 0_A$ erfüllt ist.

Die komplexen Zahlen

In einem der folgenden Beispiele greifen wir auf die komplexen Zahlen zurück. Wichtig ist für uns momentan nur, dass es sich dabei um einen Körper $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften handelt:

- Es gilt $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$.
- Es existiert ein Element $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.
- Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Diese Informationen reichen aus , um in $\mathbb{C}$ rechnen zu können. Die Summe zweier komplexer Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) ist beispielsweise gegeben durch

$$\begin{aligned} z + w &= (a + ib) + (c + id) = a + ib + c + d \\ &= a + c + ib + id = (a + c) + i(b + d) \quad , \end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen (Forts.)

und das Produkt ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
z \cdot w \quad = \quad (a+ib)\cdot(c+id) \quad = \\
a \cdot c + (ib)\cdot c + a\cdot(id) + (ib)\cdot(id) \quad = \\
ac + i(bc) + i(ad) + i^2 bd \quad = \\
ac + i(bc+ad) + (-1)bd \quad = \quad (ac-bd) + i(bc+ad).
\end{aligned}
$$

Definition der Vektorräume

Definition (6.1)

Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge V und Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : K \times V \to V$ genannt Vektoraddition und skalare Multplikation, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Das Paar $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) Für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gelten die Rechenregeln

- (a) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$
- (b) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$
- (c) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
- (d) $1_K \cdot v = v$

Die Elemente der Menge V werden Vektoren genannt.

Beispiele für K-Vektorräume

- das Tripel $(K^n, +, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N})$ mit
$$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$
als Vektoraddition und
$$\lambda \cdot (a_1, ..., a_n) = (\lambda a_1, ..., \lambda a_n)$$
als skalarer Multiplikation Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein K-Vektorraum.
- das Tripel $(\{0_K\}, +, \cdot)$, mit den Abbildungen $+$ und $\cdot$ gegeben durch $0_K + 0_K = 0_K$ und $\lambda \cdot 0_K = 0_K$ für alle $\lambda \in K$
- das Tripel $(\mathscr{M}_{m\times n,K}, +, \cdot)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ wobei $+$ die Addition von Matrizen und $\cdot$ durch $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ gegeben ist
- Jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ besitzt auch eine Struktur als $\mathbb{R}$-Vektorraum, gegeben durch $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$, wobei die Abbildung $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times V \to V$ durch Einschränkung der Abbildung $\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$ auf $\mathbb{R} \times V$ zu Stande kommt.

Beh.: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $(K^n, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

zu überprüfen: (i) $(K^n, +)$ ist abelsche Gruppe
(ii) Es gelten die Rechenregeln
(a) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ (✓).
(b) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
(c) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$. (d) $1_K \cdot v = v$
für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in K^n$

zu (i) Gültigkeit von Kommutativ- und Assoziativgesetz:
Seien $v, w \in K^n$, wobei $v = (a_1, \dots, a_n)$, $w = (b_1, \dots, b_n)$.
Es gilt $v + w = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) =$

$(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) = (b_1+a_1, b_2+a_2, \dots, b_n+a_n)$

da + kommutativ auf K

$= (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n)$

$= w + v$ Sei nun $u \in K^n$ ein weiterer Vektor, $u = (c_1, \dots, c_n)$.

$(u+v)+w = ((c_1, \dots, c_n) + (a_1, \dots, a_n)) + (b_1, \dots, b_n) =$

$\dots = u + (v+w)$ überprüfe weiter

$0_{K^n} = (0_K, \dots, 0_K)$ ist ein Neutralelement in $(K^n, +)$

und $-v = (-a_1, \dots, -a_n)$ ist Inverses von v in $(K^n, +)$.

Zu (ii) Seien $v, w \in K^n$ wie oben, außerdem $\lambda, \mu \in K$.

zu (a) $(\lambda+\mu)\cdot v = (\lambda+\mu)\cdot(a_1, \dots, a_n) = ((\lambda+\mu)a_1, \dots, (\lambda+\mu)a_n)$

$= (\lambda a_1 + \mu a_1, \dots, \lambda a_n + \mu a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) + (\mu a_1, \dots, \mu a_n)$

verwende das Distributivgesetz im Körper K $= \lambda(a_1, \dots, a_n) + \mu(a_1, \dots, a_n)$

$= \lambda v + \mu v$

zu (b) basiert ebenfalls auf dem Distributivgesetz von K (Details als Übung)

zu (c) basiert auf der Assoziativität von $(K, \cdot)$

zu (d) $1_K \cdot v = 1_K \cdot (a_1, \dots, a_n) = (1_K \cdot a_1, \dots, 1_K \cdot a_n)$

$= (a_1, \dots, a_n)$

auf Grund der Rolle von 1_K als Neutralelement von $(K, \cdot)$

Komplexe Zahlen ($\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$)

$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$

$(3+2i)\cdot(1-i) = 3+2i-3i+2i\cdot(-i)$

$= 3 - i - 2\cdot i^2 = 3 - i - 2\cdot(-1) = 5 - i$

Beh.: Die Menge $\mathbb{C}$ bildet mit den Abb.

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(a+ib)+(c+id) \mapsto (a+c)+i(b+d)$

und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(\lambda, a+ib) \mapsto \lambda a + i\lambda b$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Zu überprüfen

(i) $(\mathbb{C},+)$ ist eine abelsche Gruppe

(ist erfüllt, da $\mathbb{C}$ ein Körper ist)

(ii) Für bel. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $a+ib,\ c+id \in \mathbb{C}$ gelten die Gleichungen

(a) $(\mu+\lambda)\cdot(a+ib) = \mu\cdot(a+ib) + \lambda\cdot(a+ib)$

(b) $\lambda\cdot((a+ib)+(c+id)) = \lambda\cdot(a+ib) + \lambda\cdot(c+id)$

(c) $\lambda\cdot(\mu\cdot(a+ib)) = (\lambda\mu)\cdot(a+ib)$

(d) $1\cdot(a+ib) = a+ib$

Teil (a), (b) folgen aus dem Distributivgesetz des Körpers $\mathbb{C}$, Teil (c) aus dessen Assoziativgesetz, und (d) ist die Eigenschaft des Einselements von $\mathbb{C}$.

Rechenregeln in einem K-Vektorraum

Lemma (6.3)

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Dann gilt für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ die Äquivalenz

$$\lambda \cdot v = 0_V \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0_K \text{ oder } v = 0_V \quad ,$$

außerdem $(-1_K) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.

Beweis von Lemma 6.3 $\quad [0_K \in K,\ 0_V \in V]$

geg: K-Vektorraum $(V, +, \cdot)$, $\lambda \in K$, $v \in V$

z.zg: (i) $\lambda v = 0_V \Longrightarrow \lambda = 0_K$ oder $v = 0_V$

(ii) $(-1_K) \cdot v = -v$

zu (i) „$\Longleftarrow$" zeige: $0_K \cdot v = 0_V$, $\lambda\, 0_V = 0_V$

$$0_K \cdot v = (0_K + 0_K)\, v \overset{(ii)(a)}{=} 0_K \cdot v + 0_K \cdot v \Longrightarrow$$

$$0_K \cdot v + (-0_K \cdot v) = 0_K \cdot v + 0_K \cdot v + (-0_K \cdot v) \Longrightarrow$$

$$0_V = 0_K \cdot v + 0_V \Longrightarrow 0_V = 0_K \cdot v$$

$$\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) \overset{(ii)(b)}{=} \lambda\, 0_V + \lambda \cdot 0_V \Longrightarrow$$

$$\lambda \cdot 0_V + (-\lambda \cdot 0_V) = \lambda\, 0_V + \lambda\, 0_V + (-\lambda \cdot 0_V) \Longrightarrow$$

$$0_V = \lambda \cdot 0_V + 0_V \Rightarrow 0_V = \lambda \cdot 0_V$$

„$\Rightarrow$" Vor: $\lambda \cdot v = 0_V$ z.zg.: $\lambda = 0_K$ oder $v = 0_V$

Ang. $\lambda \neq 0_K \Rightarrow \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot 0_V \overset{(ii)(c)}{\underset{s.o.}{\Longrightarrow}} (\lambda \lambda^{-1}) \cdot v = 0_V$

$\Rightarrow 1_K \cdot v = 0_V \overset{(ii)(d)}{\Longrightarrow} v = 0_V$

zu (ii) Überprüfe, dass $(-1_K) \cdot v$ das Inverse von v in $(V, +)$ ist. Daraus folgt $(-1_K) \cdot v = -v$.

$(-1_K) \cdot v + v \overset{(ii)(d)}{=} (-1_K) \cdot v + 1_K \cdot v \overset{(ii)(a)}{=} ((-1_K) + 1_K) \cdot v$

$= 0_K v \overset{s.o.}{=} 0_V \Rightarrow (-1_K) v$ ist das Inverse von v in $(V, +)$.

$\square$

Definition der Untervektorräume

Definition (6.4)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ wird Untervektorraum von V genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $0_V \in U$

(ii) $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$

(iii) $\lambda \cdot v \in U$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$

Untervektorräume sind Vektorräume

Satz (6.5)

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Definieren wir Abbildungen $+_U : U \times U \to V$ und $\cdot_U : K \times U \to V$ durch

$$v +_U w = v + w \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot_U v = \lambda \cdot v$$

für $v, w \in U$ und $\lambda \in K$, dann ist durch $(U, +_U, \cdot_U)$ ein K-Vektorraum gegeben.

Beweis von Satz 6.5:

geg: K-Vektorraum $(V, +, \cdot)$

$U \subseteq V$ Teilmenge von V mit den Eigenschaften (i) $0_V \in U$

(ii) $\forall v, w \in U: v + w \in U$

(iii) $\forall \lambda \in K$ und $v \in U: \lambda \cdot v \in U$

Definiere $+_U : U \times U \to V, \ (v, w) \mapsto v + w$

$\cdot_U : K \times U \to V, \ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

Die Bed. (ii) besagt, dass U bzgl. $+_U$ abgeschlossen, und $+_U$ somit eine <u>Verknüpfung auf U</u> ist.

Die Bed. (iii) besagt, dass für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$ das Element $\lambda \cdot_U v$ in U liegt.
Also ist $\cdot_U$ eine Abb. $K \times U \to U$

<u>Beh.:</u> $(U, +_U, \cdot_U)$ ist ein K-Vektorraum

zu überprüfen: (i) $(U, +_U)$ ist abelsche Gruppe

(ii) Für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in U$ gilt

(a) $(\lambda + \mu) \cdot_U v = \lambda \cdot_U v + \mu \cdot_U v$

(b) $\lambda \cdot_U (v +_U w) = \lambda \cdot_U v +_U \lambda \cdot_U w$

(c) $\lambda \cdot_U (\mu \cdot_U v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot_U v$

(d) $1_K \cdot_U v = v$

zu (a) $(\lambda + \mu) \cdot_U v = (\lambda + \mu) \cdot v \overset{V\ K\text{-Vektorraum}}{=}$
$\uparrow$ nach Def. von $\cdot_U$

$\lambda \cdot v + \mu \cdot v = \lambda \cdot_U v +_U \mu \cdot_U v$
$\uparrow$ nach von $+_U$ und $\cdot_U$

Genauso können (b), (c), (d) auf die Vektorraum-Eigenschaften von $(V, +, \cdot)$ zurückgeführt werden.

Beweis von Satz 6.5 (Abschluss)

zu (i)

- Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz in $(U, +_U)$ führt man wie auf der vorherigen Tafel auf das Assoziativ- und das Kommutativgesetz in $(V, +)$ zurück.
- Nach Voraussetzung liegt 0_V in U, und es gilt $v +_U 0_V = v + 0_V = v$ und $0_V +_U v = v +_U 0_V = v$ für alle $v \in U$. Also ist 0_V in $(U, +_U)$ ein Neutralelement.
- Für jedes $v \in U$ ist nach Voraussetzung auch $(-1_K) \cdot v$ in U enthalten, und nach Lemma 6.3 gilt $(-1_K) \cdot v = -v$. Die Gleichungen $v +_U (-v) = v + (-v) = 0_V$ und $(-v) +_U v = v +_U (-v) = 0_V$ zeigen, dass v in $(U, +_U)$ invertierbar ist, mit $-v$ als inversem Element.