Eigenschaften von Abbildungen

Definition (4.6)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Wenn für alle x_1, x_2 aus $f(x_1) = f(x_2)$ jeweils $x_1 = x_2$ folgt, dann nennt man die Abbildung injektiv.

(ii) Wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, dann wird f surjektiv genannt.

(iii) Eine Abbildung f, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, bezeichnet man als bijektiv.

Erhaltung der Eigenschaften unter Komposition

Satz (4.7)

Die Komposition zweier injektiver (bzw. surjektiver, bijektiver) Abbildungen ist injektiv (bzw. surjektiv, bijektiv).

Charakterisierung injektiver, surjektiver und bijektiver Abbildungen

Satz (4.8)

Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Es ist f genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ existiert.

(ii) Sie ist genau dann surjektiv, wenn es ein $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.

(iii) Sie ist bijektiv genau dann, wenn ein $g : Y \to X$ mit den Eigenschaften $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ existiert. Die Abbildung g mit diesen beiden Eigenschaften ist dann eindeutig bestimmt. Man nennt sie die Umkehrabbildung von f und bezeichnet sie mit f^{-1}.

Hinweis: Ist $V \subseteq Y$ eine Teilmenge, dann bezeichnet $f^{-1}(V)$ die Urbildmenge von V unter f, unabhängig davon, ob f eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzt oder nicht.

Beweis von Satz 4.8 (iii)

geg.: Abb $f: X \to Y$

<u>Beh.</u>: f bijektiv $\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Abbildung $g: Y \to X$ mit $g \circ f \overset{(1)}{=} id_X$ <u>und</u> $f \circ g \overset{(2)}{=} id_Y$.

„$\Longleftarrow$" Aus der Existenz einer Abb g mit Eig. (1) folgt wegen (i) die Injektivität von f.

ebenso: g erfüllt (2) $\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$ f surjektiv

f injektiv $\wedge$ f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv

„$\Rightarrow$" f bijektiv $\Rightarrow$ f injektiv $\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $\exists g: Y \to X$
mit $g \circ f = id_X$

ebenso: f bijektiv $\Rightarrow$ f surjektiv $\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$ $\exists h: Y \to X$ mit $f \circ h = id_Y$

Beh: $g = h$

Bew: $g = g \circ id_Y = g \circ f \circ h = id_X \circ h = h$

zur Eindeutigkeit: Ang. g_1 ist eine weitere Abb. mit
$g_1 \circ f = id_X$ und $f \circ g_1 = id_Y$.
$g \circ f = id_X \wedge f \circ g_1 = id_Y \overset{s.o.}{\Longrightarrow} g = g_1$ $\square$

[Bew. von $id_X \circ h = h$ zu überprüfen: $(id_X \circ h)(y) = h(y)\ \forall y \in Y$
Sei also $y \in Y$. $(id_X \circ h)(y) = id_X(h(y)) \underset{id_X(x) = x}{\overset{\forall x \in X:}{=}} h(y)$]

Mächtigkeit von Mengen, Unendlichkeit

Im Folgenden bezeichnet $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Außerdem setzen wir $M_0 = \varnothing$.

Definition (4.9)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Man sagt, eine Menge A besteht aus n Elementen oder hat die Mächtigkeit n, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : M_n \to A$ existiert. Wir schreiben dann $|A| = n$.

Definition (4.10)

Eine Menge A ist endlich, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|A| = n$ existiert. Ansonsten bezeichnen wir die Menge A als unendlich.

Wohldefiniertheit der endlichen Mächtigkeit

Wir müssen sicherstellen, dass unsere Definition der Mächtigkeit einer endlichen Menge eindeutig ist, dass also nicht $|A| = m$ und $|A| = n$ für zwei verschiedene Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dies erfordert ein wenig Aufwand.

Lemma (4.11)

Sei A eine beliebige Menge, und seien $a, b \in A$ zwei verschiedene Elemente. Dann ist die Abbildung $\tau_{ab} : A \to A$ gegeben durch

$$\tau_{ab}(x) \quad = \quad \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \\ x & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{eine Bijektion.}$$

(Die Abbildung τ_{ab} vertauscht die beiden Elemente a und b miteinander, alle übrigen Elemente werden auf sich selbst abgebildet.)

Beweis von Lemma 4.11

geg: Menge A, $a, b \in A$, $b \neq a$

$$\tau_{ab} : A \to A,\ x \mapsto \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beh:</u> τ_{ab} ist bijektiv

Injektivität: Seien $x, y \in A$ mit
$\tau_{ab}(x) = \tau_{ab}(y)$.

z.zg.: $x = y$

1. <u>Fall</u>: $x, y \notin \{a, b\}$

$\Rightarrow x = \tau_{ab}(x) = \tau_{ab}(y) = y$

2. Fall: $x \in \{a, b\}$

Dann gilt auch $\tau_{ab}(x) = \tau_{ab}(y) \in \{a, b\}$

somit auch $y \in \{a, b\}$

Ist $x = a$, dann folgt $b = \tau_{ab}(x) = \tau_{ab}(y)$

$\Rightarrow y = a$. ebenso: $x = b \Rightarrow y = b$

In jedem Fall gilt $x = y$

3. Fall: $y \in \{a, b\}$ analog zum 2. Fall

Surjektivität: Sei $z \in A$. z.zg.:

$\exists x \in A$ mit $\tau_{ab}(x) = z$.

1. Fall: $z = a \Rightarrow \tau_{ab}(b) = a$
2. Fall: $z = b \Rightarrow \tau_{ab}(a) = b$
3. Fall: $z \notin \{a, b\} \Rightarrow \tau_{ab}(z) = z$

$\square$

Wohldefiniertheit der endlichen Mächtigkeit (Forts.)

Proposition (4.12)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist jede injektive Abbildung $M_n \to M_n$ auch surjektiv.

Aus dieser Proposition folgt nun tatsächlich die Eindeutigkeit von $|A|$ für eine endliche Menge A, denn:

- Angenommen, es gilt zugleich $|A| = m$ und $|A| = n$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $m < n$.
- Dann gibt es Bijektionen $\varphi : M_m \to A$ und $\psi : M_n \to A$.
- Die Abbildung $\alpha = \varphi^{-1} \circ \psi$ ist dann eine Bijektion von $M_n \to M_m$. Wegen $M_m \subseteq M_n$ ist α zugleich eine injektive Abbildung $M_n \to M_n$.
- Wegen $\alpha(M_n) = M_m \subsetneq M_n$ ist $\alpha : M_n \to M_n$ aber nicht surjektiv. Das steht im Widerspruch zu Proposition 4.12!

Beweis von Proposition 4.12

zu zeigen für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
Ist $\psi : M_n \to M_n$ eine injektive Abbildung, dann ist ψ auch surjektiv.

- Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n.
- Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Aussage offensichtlich, denn die Abbildung zwischen leeren Mengen ist nach Definition injektiv und surjektiv.
- Für den Induktionsschritt sei nun eine injektive Abbildung $\psi : M_{n+1} \to M_{n+1}$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, dass ψ surjektiv ist.
- Zunächst betrachten wir den Fall $\psi(n+1) = n+1$. Aus der Injektivität folgt, dass dann $\psi(M_n) \subseteq M_n$ gelten muss. Somit ist $\psi|_{M_n}$ eine injektive Abbildung $M_n \to M_n$.
- Auf Grund der Induktionsvoraussetzung ist diese auch surjektiv.

Beweis von Proposition 4.12 (Forts.)

- Es gilt also $\psi(M_n) = M_n$. Zusammen mit $\psi(n+1) = n+1$ folgt daraus die Surjektivität von ψ.
- Nun betrachten wir den Fall $\psi(n+1) \leq n$. Setzen wir $k = \psi(n+1)$ und $\phi = \tau_{k,n+1} \circ \psi$, dann ist ϕ eine injektive Abbildung mit $\phi(n+1) = n+1$.
- Wie wir im 1. Fall gezeigt haben, folgt aus der Injektivität von ϕ die Surjektivität dieser Abbildung. Mit ϕ ist auch die Abbildung $\psi = \tau_{k,n+1}^{-1} \circ \phi$ surjektiv.

Mengen gleicher Mächtigkeit

Proposition (4.13)

Zwei endliche Mengen A, B haben genau dann dieselbe Mächtigkeit, wenn eine Bijektion $A \to B$ existiert.

Prop. 4.13

geg. endliche Mengen A, B

Beh.: $|A| = |B| \iff \exists$ Bijektion $A \to B$

„$\Rightarrow$": Sei $n = |A| = |B| \in \mathbb{N}_0$

$|A| = n \Rightarrow \exists$ Bijektion $\varphi : M_n \to A$

$|B| = n \Rightarrow \exists$ Bij. $\psi : M_n \to B$

$\Rightarrow \psi \circ \varphi^{-1}$ ist Bijektion $A \to B$

„$\Leftarrow$": A endliche Menge $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0$ und eine Bij.

$\varphi : M_n \to A$. (Es ist dann $n = |A|$.)

Vor. $\Rightarrow \exists$ Bijektion $\psi : A \to B$

Dann ist $\psi \circ \varphi$ ist eine Bij. $M_n \to B$

$\Rightarrow |B| = n = |A|$

Proposition (4.14)

Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ existiert.

Beweis der Richtung „$\Leftarrow$“

- Angenommen, es gibt eine solche Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to A$, obwohl $n = |A|$ endlich ist. Dann gibt es eine Bijektion $\varphi : M_n \to A$.
- Durch $\alpha = \varphi^{-1} \circ (\psi|_{M_{n+1}})$ ist eine injektive Abbildung $M_{n+1} \to M_n$ definiert.
- Aufgefasst als Abbildung $M_{n+1} \to M_{n+1}$ ist α injektiv, aber nicht surjektiv. Erneut erhalten wir einen Widerspruch zu Proposition 4.12!

Charakterisierung der unendlichen Mengen (Forts.)

Beweis der Richtung „$\Rightarrow$“

- Nach Voraussetzung ist A unendlich. Wir definieren durch Rekursion eine injektive Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to A$. Das bedeutet: Der Wert $\psi(n+1)$ wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils in Abhängigkeit von den Werten $\psi(0), \psi(1), ..., \psi(n)$ definiert.
- Als uendliche Menge ist A nicht leer. Es existiert also ein $a \in A$. Wir definieren $\psi(1) = a$.

Charakterisierung der unendlichen Mengen (Forts.)

- Angenommen, $\psi(k)$ wurde für $1 \leq k \leq n$ bereits definiert. Dann ist $\psi|_{M_n}$ laut Annahme eine injektive Abbildung $M_n \to A$.
- Nehmen wir an, $\psi|_{M_n}$ ist auch surjektiv. Dann wäre $\psi|_{M_n}$ eine Bijektion $M_n \to A$. Es wäre dann $|A| = n$ im Widerspruch zur Unendlichkeit von A.
- So aber existiert ein $b \in A \setminus \psi(M_n)$. Wir definieren $\psi(n+1) = b$. Man überprüft nun, dass auch $\psi|_{M_{n+1}}$ noch injektiv ist.
- Aus der Injektivität von $\psi|_{M_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass auch $\psi : \mathbb{N} \to A$ injektiv ist. Denn nehmen wir an, es gäbe $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $\psi(m) = \psi(n)$. Dann wäre bereits $\psi|_{M_n}$ nicht injektiv.

Rechenregeln für Mächtigkeiten

Satz (4.15)

(i) Sind A und B endliche disjunkte Mengen, ist also $A \cap B = \varnothing$, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(ii) Ist B endlich und $A \subseteq B$, dann gilt $|A| \leq |B|$ und $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

(iii) Sind A und B beliebige endliche Mengen, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ und $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(iv) Für jede endliche Menge A gilt $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Ist A eine endliche Menge, dann ist also $\mathscr{P}(A)$ und jede Teilmenge von A endlich.

Beweis von Satz 4.15

zu (i) geg: endliche Mengen A, B, $A \cap B = \emptyset$

Sei $m = |A|$, $n = |B|$ $(m, n \in \mathbb{N}_0)$

zu zeigen: $|A \cup B| = m + n$

$m = |A| \Rightarrow \exists$ Bijektion $\varphi : M_m \to A$

$n = |B| \Rightarrow \exists$ Bij. $\psi : M_n \to B$

Wir definieren nun $\alpha : M_{m+n} \to A \cup B$

durch $k \mapsto \begin{cases} \varphi(k) & \text{falls } k \leq m \\ \psi(k-m) & \text{falls } k > m \end{cases}$

2

an

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

ψ in

$\Rightarrow$

Surjekti

z.zg:

1 Fall:

mit

z.zg.: α ist bijektiv

Injektivität: Seien $k, l \in M_{m+n}$ mit

$\alpha(k) = \alpha(l)$ z.zg.: $k = l$

<u>1. Fall</u>: $\alpha(k) \in A \Rightarrow k \leq m$

ebenso: $\alpha(l) \in A \Rightarrow l \leq m$

Nach Def. von α gilt dann $\alpha(k) = \varphi(k)$,

$\alpha(l) = \varphi(l) \Rightarrow \varphi(k) = \alpha(k) = \alpha(l) = \varphi(l)$

$\xrightarrow{\varphi \text{ injektiv}} k = l$

2. **Fall**: $\alpha(k) \in B$. Dann gilt

auch $\alpha(l) \in B$ und $k, l > m$.

$\Longrightarrow \alpha(k) = \psi(k-m), \ \alpha(l) = \psi(l-m)$

$\Longrightarrow \psi(k-m) = \alpha(k) = \alpha(l) = \psi(l-m)$

$\overset{\psi \text{ inj.}}{\Longrightarrow} k - m = l - m \Rightarrow k = l$

Surjektivität: Sei $c \in A \cup B$.

z.zg.: $\exists k \in M_{m+n}$ mit $\alpha(k) = c$.

1. **Fall**: $c \in A$. φ surjektiv $\rightarrow \exists k \in M_m$ mit $\varphi(k) = c$. $\Rightarrow \alpha(k) = \varphi(k) = c$.

(k)
e(l)'

2. Fall: $c \in B$ ψ surjektiv $\Rightarrow \exists k \in M_n$ mit $\psi(k) = c$ $\Rightarrow \alpha(m+k) = \psi((m+k)-m)$
$= \psi(k) = c$

zu (iv) z.zg: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jede Menge A mit $|A| = n$ gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Ind.-anf.: geg.: Menge A mit $|A| = 0$
$\Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$

Ind.-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, A eine Menge mit $|A| = n+1$. z.zg: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{n+1}$

$3!\,2!$ $\quad 2!$

Sei $a \in A$ bel. gewählt und $B = A \setminus \{a\}$.

$\Rightarrow |B| = |A| - 1 = (n+1) - 1 = n \xrightarrow{\text{Ind. V}} |\mathcal{P}(B)| = 2^n$

Betrachte die Mengen $S = \mathcal{P}(B) = \{C \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin C\}$ und $T = \{C \in \mathcal{P}(A) \mid a \in C\}$. Es ist leicht zu sehen, dass $C \mapsto C \cup \{a\}$ eine Abb. $S \xrightarrow{\Phi} T$ definiert, und dass $\Psi : T \to S$, $D \mapsto D \setminus \{a\}$ eine Umkehrabb. ist.

$\Rightarrow \Phi$ ist eine Bijektion zwischen S und T.

$\Rightarrow |T| = |S| = |\mathcal{P}(B)| = 2^n$

Außerdem gilt offenbar $\mathcal{P}(A) = S \cup T$ und

… $\cup \{a\}$ eine Abb. $\mathcal{S} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{T}$ definiert, und dass $\Psi : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$, $D \mapsto D \setminus \{a\}$ eine Umkehrabb. ist.

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset \quad \text{Teil (i)} \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|$$
$$= 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \qquad \square$$

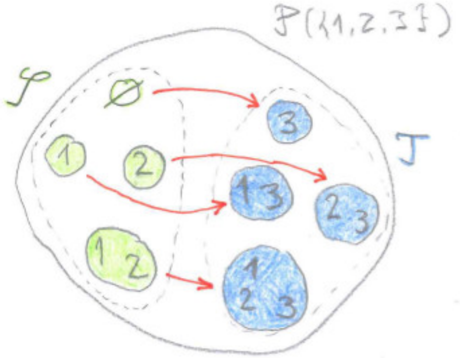
Bsp. für einen Binomialkoeff.:

Nach Def. gilt $\binom{5}{3} = |\mathcal{P}_3(M_5)|$.

$$\mathcal{P}_3(M_5) = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\},$$
$$\{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{3,4,5\}\} \Rightarrow \binom{5}{3} = |\mathcal{P}_3(M_5)| = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot 5 = \frac{1}{2}\, 4 \cdot 5 = 10$$

Illustration des Induktionsschritts in Satz 4.15 (iv)



Definition der Binomialkoeffizienten

Definition (4.16)

Für jede Menge B und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathscr{P}_k(B)$ jeweils die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von B, also

$$\mathscr{P}_k(B) \quad = \quad \left\{ A \in \mathscr{P}(B) \;\middle|\; |A| = k \right\}.$$

Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\binom{n}{k} = |\mathscr{P}_k(M_n)|$ und bezeichnen diese Zahl als den Binomialkoeffizienten von n über k.

Einige Binomialkoeffizienten lassen sich direkt angeben.

- $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{1} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k > n$