Definition (4.1)

Seien X, Y Mengen. Eine Relation f zwischen X und Y wird Abbildung genannt, wenn für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ existiert. In Formelschreibweise:

(i) $\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in f$

(ii) $\forall x \in X : \forall y, y' \in Y : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Dabei nennt man X den Definitions- und Y den Wertebereich der Abbildung.

Bild- und Urbildmengen

Definition (4.4)

Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$.

(i) Die Teilmenge $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subseteq Y$ wird die Bildmenge von U unter der Abbildung f genannt. Es handelt sich um die Elemente von Y, die man dadurch erhält, dass man f auf ein Element aus U anwendet.

(ii) Die Teilmenge $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subseteq X$ wird die Urbildmenge von V unter f genannt. Sie besteht aus genau den Elementen von X, die nach V abgebildet werden.

Beziehung zwischen Bild- und Urbildmengen

Proposition (4.5)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$. Dann gilt

(i) $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ (ii) $U \subseteq f^{-1}(f(U))$

Beweis von Prop. 4.5 (ii)

geg.: $f : X \to Y$, $U \subseteq X$

z.zg.: $U \subseteq f^{-1}(f(U))$

Sei $x \in U$. z.zg.: $x \in f^{-1}(f(U))$

Dies ist gleichbedeutend mit $f(x) \in f(U)$

Aus $x \in U$ folgt $f(x) \in f(U)$, nach Def. der Bildmenge $f(U)$. $\square$

Eigenschaften von Abbildungen

Definition (4.6)

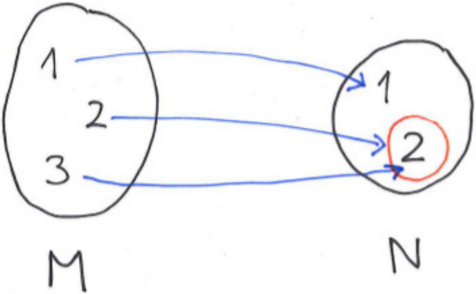
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Wenn für alle x_1, x_2 aus $f(x_1) = f(x_2)$ jeweils $x_1 = x_2$ folgt, dann nennt man die Abbildung injektiv.

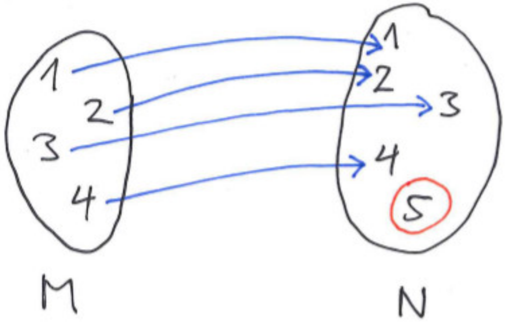
(ii) Wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, dann wird f surjektiv genannt.

(iii) Eine Abbildung f, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, bezeichnet man als bijektiv.

Beispiel für eine surjektive, nicht injektive Abbildung



Beispiel für eine injektive, nicht surjektive Abbildung



Charakterisierung einer Abbildung durch Urbilder

Die drei soeben definierten Eigenschaften von Abbildungen lassen sich auch mit Hilfe der Urbildmengen charakterisieren. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann...

- injektiv, wenn $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ höchstens ein Element enthält,
- surjektiv, wenn $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ mindestens ein Element enthält,
- bijektiv, wenn $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ genau ein Element enthält.

weitere Beispiele:

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

weder injektiv noch surjektiv

- nicht injektiv, da $1 \neq -1$ und $f(1) = 1 = f(-1)$
- nicht surjektiv, da kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 = -1$ existiert

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$ ist bijektiv, also injektiv und surjektiv

Nachweis der Injektivität:

z.zg: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. z.zg $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow$

$x_1 + 1 - 1 = x_2 + 1 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

Nachweis der Surjektivität:

z.zg: $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

Sei $y \in \mathbb{R}$. z.zg: $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$

Sei $x = y - 1$. $f(x) = x + 1 = (y - 1) + 1 = y$

ist

und

Bem: Sei $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

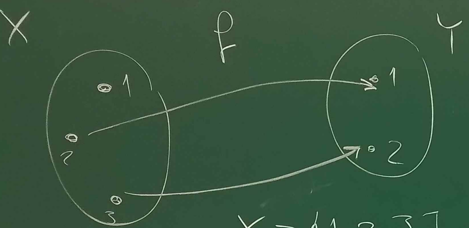
Die Abbildung $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ ist surjektiv (im Gegensatz zu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$)

denn: Sei $y \in \mathbb{R}_+$. Setze $x = \sqrt{y}$.

Dann gilt $\tilde{f}(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

Bem: Die Fkt. $f^*: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist injektiv, denn: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $f^*(x_1) = f^*(x_2)$. $\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow}$

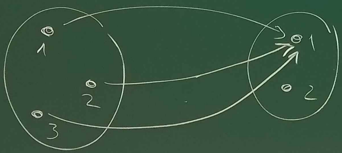
$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \overset{x_1, x_2 \geq 0}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$



keine Abbildung zwischen X und Y

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$

$f = \{(2,1), (3,2)\}$



ist Abbildung, aber weder injektiv noch surjektiv.

Erhaltung der Eigenschaften unter Komposition

Satz (4.7)

Die Komposition zweier injektiver (bzw. surjektiver, bijektiver) Abbildungen ist injektiv (bzw. surjektiv, bijektiv).

$4.7(ii)$: $g \circ f$ surjektiv

Beweis von Satz 4.7, Teil (ii) und (iii)

zu (ii) geg.: Mengen A, B, C, Abbildungen

$f: A \to B$, $g: B \to C$

Voraussetzung: f und g sind surjektiv

z.zg.: $g \circ f: A \to C$ ist surjektiv

z.zg.: $\forall z \in C: \exists x \in A: (g \circ f)(x) = z$

Sei $z \in C$. z.zg.: $\exists x \in A: (g \circ f)(x) = z$

$z \in C$, $g: B \to C$ ist surjektiv $\Rightarrow$

Sei $z \in C$. z.zg.: $\exists x \in A: (g \circ f)(x) = z$

$z \in C$, $g: B \to C$ ist surjektiv $\Rightarrow$

$\exists y \in B$ mit $g(y) = z$

$y \in B$, $f: A \to B$ ist surjektiv $\Rightarrow \exists x \in A$ mit $f(x) = y$

Wir erhalten $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

zu (iii) Setze nun voraus, dass $f: A \to B$ und $g: B \to C$ beide bijektiv sind z.zg.: $g \circ f: A \to C$ ist bijektiv

f bijektiv $\Rightarrow$ f injektiv und f surjektiv

g bijektiv $\Rightarrow$ g injektiv und g surjektiv

f und g beide injektiv $\overset{4.7(i)}{\Longrightarrow}$ $g \circ f$ injektiv

f und g beide surjektiv $\underset{4.7(ii)}{\Longrightarrow}$ $g \circ f$ surjektiv

$g \circ f$ injektiv und $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$

$g \circ f$ bijektiv $\square$

Def. der identischen Abbildung auf einer Menge X: $id_X : X \to X, \ x \mapsto x$

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \ x \mapsto x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \ x \mapsto |x|$

$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x$

$f \circ g = id_{\mathbb{R}_+}$

2. Fal

Setz

Für je

$(g \circ f$

Es folg

zu (ii) z

f surj

„$\Leftarrow$" Se

z.zg. f

$\forall y \in Y$:

Charakterisierung injektiver, surjektiver und bijektiver Abbildungen

Satz (4.8)

Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Es ist f genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ existiert.

(ii) Sie ist genau dann surjektiv, wenn es ein $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.

(iii) Sie ist bijektiv genau dann, wenn ein $g : Y \to X$ mit den Eigenschaften $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ existiert. ´Die Abbildung g mit diesen beiden Eigenschaften ist dann eindeutig bestimmt. Man nennt sie die Umkehrabbildung von f und bezeichnet sie mit f^{-1}.

Hinweis: Ist $V \subseteq Y$ eine Teilmenge, dann bezeichnet $f^{-1}(V)$ die Urbildmenge von V unter f, unabhängig davon, ob f eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzt oder nicht.

Beweis von Satz 4.8:

Seien $X, Y \neq \emptyset$ Mengen, $f: X \to Y$ eine Abb.

zu (i) z.zg: f injektiv $\Leftrightarrow \exists\, g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$

„$\Leftarrow$" Setze die Existenz von g voraus.

z.zg: f ist injektiv. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Zu zeigen ist dann $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow id_X(x_1) = id_X(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

„$\Rightarrow$

Defini…

Wähle …

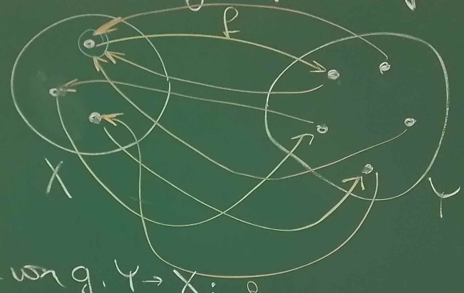
Untersc…

1. Fall

eindeuti…

Abb.
X mit
X
B.
X mit
$x_1 = x_2$.
$(_2))$
$(x_1) = id_X(x_2)$

„$\Rightarrow$" Voraussetzung: f ist injektiv



Definition von $g: Y \to X$:
Wähle ein $x_0 \in X$. Sei $y \in Y$.
Unterscheide zwei Fälle:
1. <u>Fall</u> $\exists\, x \in X$ mit $y = f(x)$ (Dieses x ist dann eindeutig) Setze dann $g(y) = x$.

$\square$

2. <u>Fall</u>: Es gibt kein $x \in X$ mit $f(x) = y$

Setze dann $g(y) = x_0$.

Für jedes $x \in X$ gilt dann nach Def

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \underset{\substack{\uparrow\\ y = f(x) \text{ erfüllt} \\ \text{die Bed. vom 1. Fall}}}{=} x = id_X(x).$$

Es folgt $g \circ f = id_X$.

zu (ii) z.zg.:

f surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\exists g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$.

„$\Longleftarrow$": Setze die Existenz von g voraus.

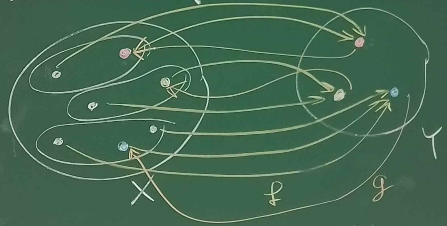
z.zg.: f ist surjektiv, d.h.

$\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$

Sei $y \in Y$. Setze $x = g(y)$. Dann gilt $f(x)$

$= f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y$

„$\Longrightarrow$" Voraussetzung: f ist surjektiv



Definition von g: Da f surjektiv, ist $f^{-1}(\{y\})$

Definition von g: Da f surjektiv, ist $f^{-1}(\{y\})$

für jedes $y \in Y$ nichtleer. Für jedes $y \in Y$ sei $x_y \in X$ ein bel. Element aus $f^{-1}(\{y\})$. Es gilt $f(x_y) = y$.

Definiere nun $g: Y \to X$, $y \mapsto x_y$

Für jedes $y \in Y$ gilt dann

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y = \mathrm{id}_Y(y).$$

Also ist $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.