Eigenschaften von Relationen

Definition (3.2)

Sei X eine Menge. Eine Relation R auf X heißt

(i) reflexiv, falls xRx für alle $x \in R$,

(ii) symmetrisch, falls $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in R$,

(iii) anti-symmetrisch, falls $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in R$,

(iv) transitiv, falls $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in R$ gilt.

Ordnungsrelationen

Definition (3.3)

Sei X eine Menge.

(i) Eine Halbordnung auf X ist eine reflexive, anti-symmetrische und transitive Relation.

(ii) Bezeichnet $\leq$ eine Halbordnung auf X, so nennt man zwei Elemente $x, y \in X$ vergleichbar bezüglich $\leq$, wenn die Bedingung $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ erfüllt ist.

(iii) Eine Halbordnung auf X wird Totalordnung genannt, wenn je zwei Elemente aus X miteinander vergleichbar sind.

Größte, kleinste, maximale und minimale Elemente

Definition (3.4)

Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung und $A \subseteq X$.

(i) Man nennt $a \in A$ ein größtes (bzw. kleinstes) Element der Menge A, wenn $a \geq b$ (bzw. $a \leq b$) für alle $b \in A$ gilt.

(ii) Ein Element $a \in A$ wird maximales (bzw. minimales) Element der Menge A genannt, wenn kein $b \in A$ mit $b > a$ (bzw. $b < a$) existiert.

Neben „größtes Element“ und „kleinstes Element“ sind auch die Bezeichnungen „Maximum“ und „Minimum“ gebräuchlich. Das Maximum einer Teilmenge $A \subseteq X$ wird mit $\max(A)$ bezeichnet, das Minimum mit $\min(A)$.

Beziehung zwischen diesen Begriffen

Proposition (3.5)

Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung und $A \subseteq X$.

(i) Es gibt höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element in A.

(ii) Das größte (bzw. kleinste) Element von A, sofern es existiert, ist zugleich das einzige maximale (bzw. minimale) Element von A.

(iii) Ist $(X, \leq)$ eine Totalordnung, dann sind die Begriffe „größtes Element“ und „maximales Element“ (bzw. „kleinstes Element“ und „minimales Element“) gleichbedeutend.

In einer Totalordnung $(X, \leq)$ besitzt jede endliche Teilmenge ein Minimum und ein Maximum (Beweis durch vollständige Induktion).

Definition von Supremum und Infimum

Definition (3.6)

Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung und $A \subseteq X$.

(i) Ein Element $s \in X$ wird obere Schranke (bzw. untere Schranke) von A genannt, wenn $s \geq a$ (bzw. $s \leq a$) für alle $a \in A$ gilt.

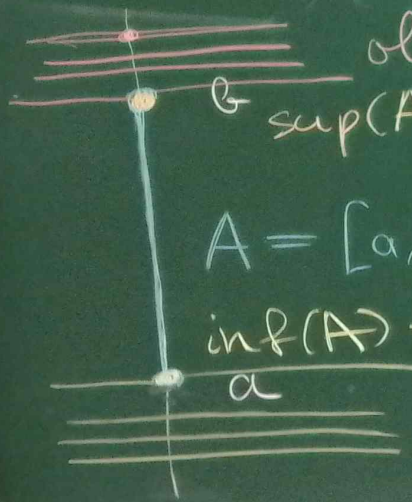
(ii) Wir bezeichnen mit $\mathscr{S}^+(A)$ bzw. $\mathscr{S}^-(A)$ die Menge aller oberen bzw. unteren Schranken von A.

(iii) Das kleinste Element von $\mathscr{S}^+(A)$, sofern es existiert, wird das Supremum von A genannt und mit $\sup(A)$ bezeichet. Ebenso nennt man das größte Element von $\mathscr{S}^-(A)$ das Infimum $\inf(A)$ von A.

Ist die Menge A nichtleer, gilt aber $\mathscr{S}^+(A) = \varnothing$, dann setzt man $\sup(A) = +\infty$. Ebenso wird $\inf(A)$ im Fall $A \neq \varnothing$ und $\mathscr{S}^-(A) = \varnothing$ auf den Wert $-\infty$ gesetzt.

$a < b \Rightarrow a \leq b$ ist für jede Halbordnung richtig, denn: $a < b$ bedeutet $(a \overset{A}{\leq} b) \wedge (a \overset{B}{\neq} b)$ und für bel. Aussagen A, B gilt immer

$A \wedge B \Rightarrow A$



Beispiel: endliche offene Intervalle

Proposition (3.7)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. (Eine solche Teilmenge nennt man ein endliches offenes Intervall.)

(i) Die Menge besitzt weder maximale noch minimale Elemente, also erst recht weder ein größtes noch ein kleinstes Element.

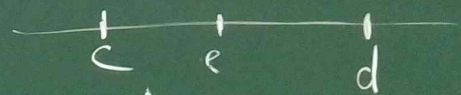
(ii) Es gilt $\mathscr{S}^+(I) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$ und $\mathscr{S}^-(I) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.

(iii) Es gilt $\sup(I) = b$ und $\inf(I) = a$.

untere Schranken

$\Sigma^-(A)$

Beweis von Prop. 3.7:



vorweg: Sind $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$, und ist $e = \frac{1}{2}(c+d)$, dann gilt $c < e < d$. (Bew. wird nachgeliefert)

zu (i) Ang. $c \in]a, b[$ ist ein maximales Element

Sei $d = \frac{1}{2}(c+b)$. Dann gilt $c < d < b$

und wegen $c \in]a, b[$ auch $a < c$

$\Rightarrow a < d < b \Rightarrow d \in]a, b[$

Die Ungleichung $d > c$ zeigt also, dass c kein maximales Element von $]a, b[$ ist.

Beweis für „kein minimales Element": analog

zu (ii) zeige nun $S^+(]a,b[) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$

„⊇" Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq b$. z.z.:
$x \in S^+(]a,b[)$, d.h. $x \geq c \ \forall c \in]a,b[$.

Sei $c \in]a,b[$. $c < b$ und $b \leq x$
$\Rightarrow c < x \Rightarrow c \leq x$.

„⊆" Sei $x \in S^+(]a,b[)$, ang. es
gilt nicht $x \geq b \Rightarrow x < b$
Definiere $x_1 = x$ falls $x \geq a$, setze
sonst $x_1 = a \Rightarrow x_1 \geq x$
Definiere $c = \frac{1}{2}(x_1 + b) \overset{s.o.}{\Rightarrow} x_1 < c < b$

geg.
zu (i)
z.z.
dafür z
(I) a
(II) a
s

Aus a =
(1) a ≥ b

außerdem $x_1 \geq a \Rightarrow a < c < b \Rightarrow$
$c \in]a, b[$ Wegen $c > x_1 \geq x$ kann
x keine obere Schranke von $]a, b[$ sein $\lightning$
also: $x \geq b$
Beweis für $S^-(]a, b[)$ analog

zu (iii) zeige nur $b = \sup(]a, b[)$

Nach Def von $\sup(]a, b[)$ gilt
$\sup(]a, b[) = \min S^+(]a, b[)$ Nach Teil (i)
genügt es also z.zg: $b = \min\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$.
b liegt in der Menge, da $b \geq b$
Für jedes x aus der Menge gilt $x \geq b$ (nach Def.) $\Rightarrow b$ ist kleinstes Element der Menge. $\square$

Beziehung zwischen Maximum und Supremum

Satz (3.8)

Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung und $A \subseteq X$.

(i) Das Maximum (bzw. Minimum) von A, sofern es existiert, ist zugleich das Supremum (bzw. Infimum) von A.

(ii) Existiert das Supremum (bzw. Infimum) von A, und ist es in A enthalten, so ist es zugleich das Maximum (bzw. Minimum) von A.

$x \geq b$

Beweis von Satz 3.8

geg.: $(X, \leq)$ Halbordnung, $A \subseteq X$.

zu (i) Vor.: a ist Maximum von A

Zzg.: $a = \sup(A)$

dafür zu überprüfen:

(I) $a \in \mathcal{S}^+(A)$

(II) a ist kleinste obere Schranke, d.h. ist $s \in \mathcal{S}^+(A)$, dann folgt $s \geq a$.

Aus $a = \max(A)$ folgt

(1) $a \geq b \; \forall b \in A$ (2) $a \in A$

setze

$a < c < b$

Aussage (I) folgt direkt aus (1)

zu (II) Sei $s \in S^+(A)$ z.zg: $s \geq a$.

Ang. $s < a$. Wegen $a \in A$ kann s dann keine obere Schranke von A sein ↯

zu (ii) Vor.: $s = \sup(A)$ existiert und ist in A enthalten.

$s \in \sup(A) \Rightarrow s \in S^+(A) \rightarrow s \geq b \; \forall b \in A$

außerdem n. Vor. $s \in A$

Beides zusammen zeigt, dass $s = \max(A)$ ist

□

Definition der Verbände

Definition (3.9)

Eine Halbordnung $(X, \leq)$, in der jede zweielementige Teilmenge $\{a, b\} \subseteq X$ ein Infimum und ein Supremum besitzt, bezeichnet man als Verband. Man verwendet die Bezeichnungen $a \vee b = \sup\{a, b\}$ und $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

Beispiele für Verbände

(i) Jede Totalordnung $(X, \leq)$ ist ein Verband, mit $a \vee b = \max\{a, b\}$ und $a \wedge b = \min\{a, b\}$ für alle $a, b \in X$.

(ii) Die natürliche Zahlen mit der Teilerrelation bilden einen Verband. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt jeweils $m \vee n = \mathrm{kgV}(m, n)$ und $m \wedge n = \mathrm{ggT}(m, n)$.

(iii) Ist X eine beliebige Menge, dann ist $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ ein Verband. Für alle $A, B \in \mathscr{P}(X)$ gilt jeweils $A \vee B = A \cup B$ und $A \wedge B = A \cap B$.

(iv) Schränkt man die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ auf die Teilmenge $X = \{1, 2, ..., 10\}$ ein, so erhält man eine Halbordnung, die kein Verband mehr ist.

(v) Ebenso geht die Verbandsstruktur verloren, wenn man die Teilerrelation auf die Menge $\mathbb{N} \setminus \{56\}$ einschränkt.

Äquivalenzrelationen

Definition (3.10)

Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X wird Äquivalenzrelation genannt, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele für Äquivalenzrelationen

(i) $X =$ Menge der Schüler einer Schule
$x \sim y \Leftrightarrow$ „x geht in dieselbe Klasse wie y“

(ii) $X = \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ a hat dieselbe Parität wie b
(d.h. a, b sind entweder beide gerade oder ungerade)

(iii) A endliche Menge, $X = \mathscr{P}(A)$, $P \sim Q \Leftrightarrow |P| = |Q|$
(wobei $|P|$ die Elementezahl von P bezeichnet)

Die Kongruenzrelationen

Notation: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$m \mid n \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} : n = km \;\Leftrightarrow\; „m \text{ ist Teiler von } n“$$

Definition (3.11)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Relation $\equiv_n$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch die Festlegung

$$a \equiv_n b \quad \Leftrightarrow \quad n \mid (a - b) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}.$$

Die Relation $\equiv_n$ wird als Kongruenzrelation modulo n bezeichnet. Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_n b$ werden auch kongruent modulo n genannt.

An Stelle von $a \equiv_n b$ sind auch die Schreibweisen $a \equiv b \mod n$ und $a \equiv b\,(n)$ gebräuchlich.

Die Kongruenzrelation als Äquivalenzrelation

Satz (3.12)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Beispiele für Kongruenzrelationen

Es gilt $1 \equiv_4 5$ (denn $4 \mid (1-5)$), $2 \equiv_4 10$ (denn $4 \mid (2-10)$), $-7 \equiv_4 5$ (denn $4 \mid (-7-5)$)

aber nicht $7 \equiv_4 5$ (denn 4 teilt nicht $7-5$)

Zwei Zahlen a, b sind genau dann kongruent modulo n, wenn bei Division durch n dasselbe Rest übrig bleibt.

Beispiel: $67 \equiv_4 23$, denn

$67 = 16 \cdot 4 + \underline{3}$, $23 = 5 \cdot 4 + \underline{3}$

ebenso: $-7 = (-2)\cdot 4 + 1$, $5 = 1\cdot 4 + 1$ $\Big\} \Rightarrow -7 \equiv_4 5$

Nachweis, dass $\equiv_n$ auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation ist zu überprüfen: $\equiv_n$ ist (i) reflexiv (ii) symm. (iii) transitiv.

zu (i) Sei $a \in \mathbb{Z}$. z.zg.: $a \equiv_n a$ Dies ist erfüllt, denn n ein Teiler von $a - a = 0$. (Es ist $0 = 0 \cdot n$.)

zu (ii) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_n b$. z.zg.: $b \equiv_n a$.

$a \equiv_n b \Rightarrow n \mid (a-b) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k \cdot n$

$\Rightarrow b - a = (-k) \cdot n \Rightarrow n \mid (b-a) \Rightarrow b \equiv_n a$

zu (iii) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_n b$, $b \equiv_n c$.

zu zeigen: $a \equiv_n c$.

$a \equiv_n b \Rightarrow n \mid (a-b) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a-b = kn$

$b \equiv_n c \Rightarrow n \mid (b-c) \Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} : b-c = ln$

$a-b = kn, \; b-c = ln \Rightarrow a-c =$

$(a-b) + (b-c) = kn + ln = (k+l)n$

$\Rightarrow n \mid (a-c) \Rightarrow a \equiv_n c.$ $\square$

Zerlegungen einer Menge

Definition (3.13)

Als Zerlegung einer Menge X bezeichnen wir eine Teilmenge $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{P}(X)$ mit den Eigenschaften

(i) $A \neq \varnothing$ für alle $A \in \mathscr{Z}$

(ii) Für jedes $x \in X$ existiert ein $A \in \mathscr{Z}$ mit $x \in A$.

(iii) Für alle $A, B \in \mathscr{Z}$ folgt aus $A \cap B \neq \varnothing$ jeweils $A = B$.

Beispiele für Zerlegungen von $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$Z_1 = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5\}\}$

$Z_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$

keine Zerlegung: $\{\{1, 2, \underline{3}\}, \{\underline{3}, 4, 5\}\}$

Die Äquivalenzklasse eines Elements

Definition (3.14)

Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$. Dann nennt man die Teilmenge

$$[x]_\sim \quad = \quad \{y \in X \mid x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse des Elements x bezüglich $\sim$.

Proposition (3.15)

Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für alle $x, y \in X$ folgt aus $y \in [x]_\sim$ stets $[x]_\sim = [y]_\sim$. Die Äquivalenzklassen von $\sim$ bilden also eine Zerlegung der Menge X.

Beweis von Prop. 3.15:

geg. X Menge, $\sim$ Äquivalenzrelation

(1) Seien $x, y \in X$ mit $y \in [x]_\sim$. z.zg.: $[x]_\sim = [y]_\sim$

„$\subseteq$" Sei $z \in [x]_\sim$ zzg.: $z \in [y]_\sim$

$z \in [x]_\sim \Rightarrow x \sim z$, $y \in [x]_\sim \Rightarrow x \sim y$

$x \sim y \overset{\sim \text{ symm.}}{\Rightarrow} y \sim x$

$y \sim x$ und $x \sim z \overset{\sim \text{ transitiv}}{\Rightarrow} y \sim z \Rightarrow z \in [y]_\sim$

„$\supseteq$" Sei $z \in [y]_\sim$ zzg.: $z \in [x]_\sim$

$z \in [y]_\sim \Rightarrow y \sim z$ s.o. $\Rightarrow x \sim y$

$x \sim y$ und $y \sim z$ $\xrightarrow{\sim \text{ transitiv}}$ $x \sim z$

$\Rightarrow z \in [x]_\sim$

(2) Zeige: $Z = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$ ist eine Zerlegung von X:

- $A \in Z \Rightarrow A = [x]_\sim$ für ein $x \in X$
- Wegen $x \sim x$ gilt $x \in [x]_\sim$ und somit $A \neq \emptyset$.
- Jedes $x \in X$ liegt in einem $A \in Z$, nämlich in $A = [x]_\sim$.
- Seien $A, B \in Z$ mit $A \cap B \neq \emptyset$.

  z.zg.: $A = B$

  Nach Def. von Z gibt es $x, y \in X$

mit $A = [x]_\sim$ und $B = [y]_\sim$

Wegen $A \cap B \neq \emptyset$ gibt es ein $z \in X$ mit

$z \in [x]_\sim$ und $z \in [y]_\sim$

$z \in [x]_\sim \Rightarrow [x]_\sim = [z]_\sim$

$z \in [y]_\sim \Rightarrow [y]_\sim = [z]_\sim$

also: $A = [x]_\sim = [z]_\sim = [y]_\sim = B$. □

Die Äquivalenzrelation geg. durch eine Zerlegung

Proposition (3.16)

Sei X eine Menge und $\mathscr{Z}$ eine Zerlegung von X. Dann ist durch die Festlegung

$$x \sim_{\mathscr{Z}} y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, A \in \mathscr{Z} : (x \in A) \wedge (y \in A) \quad \forall\, x, y \in X$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Definition der Kongruenzklassen

Proposition (3.17)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Äquivalenzklasse $[a]_n$ von a bezüglich der Relation $\equiv_n$ gegeben durch die Menge

$$a + n\mathbb{Z} \quad = \quad \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Man nennt $[a]_n$ auch die Kongruenz- oder Restklasse der Zahl a modulo n.

Übereinstimmung von Kongruenzklassen

Wenden wir Proposition (3.15) auf die Relation $\equiv_n$ an, so erhalten wir

Folgerung (3.18)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt die Äquivalenz

$$a \equiv_n b \quad \Leftrightarrow \quad b \in a + n\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z}.$$

Beispiel: In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gilt

$$\ldots = -8 + 5\mathbb{Z} = -3 + 5\mathbb{Z} = 2 + 5\mathbb{Z} = 7 + 5\mathbb{Z} = \ldots$$

Die Menge der Kongruenzklassen

Proposition (3.19)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Menge der Kongruenzklassen modulo n. Dann besitzt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau n verschiedene Elemente, nämlich $r + n\mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < n$.

Statt mit $[a]_n$ oder $a + n\mathbb{Z}$ bezeichnet man die Restklasse von a auch mit $\bar{a}$, sofern n aus dem Kontext heraus bekannt ist. Nach Proposition (3.19) ist die Menge $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ beispielsweise gegeben durch

$$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \quad = \quad \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}.$$