Definition der Aussage

Definition

Unter einer Aussage verstehen wir einen (sprachlich oder in mathematischer Notation formulierten) Satz, von dem auf sinnvolle und objektive Weise gesagt werden kann, dass er wahr oder falsch ist.

Beispiele für Aussagen

- Heute ist Dienstag. (wahr, jedenfalls am 15.10.2024)
- $1 + 1 = 2$ wahr
- Es existiert eine größte natürliche Zahl. falsch
- Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°. wahr
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig. wahr
- Jede gerade Zahl größer als zwei kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden. ???

Aussagen - Gegenbeispiele

Folgende Sätze sind keine Aussagen.

- Hallo!
- Mach endlich Deine Hausaufgaben!
- 10^{100} ist eine große Zahl
- Die Kreiszahl π ist ungefähr gleich $3,14$.
- $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$
- $a^2 + b^2 = c^2$

Im letzten Satz müssen a, b und c durch den Kontext definiert sein, damit jeweils eine Aussage vorliegt.

Die Verwendung von Bezeichnungen ohne Kontext sind ein **extrem häufiger** Anfängerfehler beim mathematischen Formulieren!

Aussagenschemata

Definition

Einen Satz, der einen oder mehrere Parameter enthält, und der nach Ersetzung dieser Parameter durch gewisse mathematische Objekte zu einer Aussage wird, nennen wir ein Aussagenschema.

Beispiel:

$\varphi(x) =$ „$x^2 - 1 < 0$“

$\varphi(5) =$ „$5^2 - 1 < 0$“ **falsch**
$\varphi(0) =$ „$0^2 - 1 < 0$“ **wahr**

$\psi(x) =$ „x **ist eine Primzahl.**“

$\psi(4) =$ „4 **ist eine Primzahl**“ **falsch**
$\psi(2) =$ „2 **ist eine Primzahl**“ **wahr**

Parameterbelegungen für Aussagenschemata

Nicht jede Parameterbelegung ist sinnvoll.

Beispiel:

$\varphi(x) =$ „$x^2 - 1 < 0$"

Einsetzen von $\{1, 2, 3\}$ in x liefert

$$\{1, 2, 3\}^2 - 1 < 0 \qquad \textbf{???}$$

Keine sinnvolle Aussage, man kann nicht über wahr oder falsch entscheiden!

Verknüpfung von Aussagen: Konjunktion

Gegebene Aussagen können umgangssprachlich oder durch bestimmte Symbole ($\vee$, $\wedge$) zu neuen Aussagen verknüpft werden. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist dann durch die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen festgelegt. Die Festlegung erfolgt durch sogenannte Wahrheitstabellen.

Konjunktion $\varphi \wedge \psi$ „Es gilt φ und ψ."

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
w	*w*	*w*
w	*f*	*f*
f	*w*	*f*
f	*f*	*f*

Wichtig: Eine Aussage kann nicht „halbwahr" sein, sie ist entweder wahr oder falsch.

Verknüpfung von Aussagen: Disjunktion

Disjunktion $\varphi \vee \psi$ „Es gilt φ oder ψ."

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
w	*w*	*w*
w	*f*	*w*
f	*w*	*w*
f	*f*	*f*

Verknüpfung von Aussagen: Negation

Negation $\neg\varphi$ „φ gilt nicht.“ / „φ ist falsch.“

φ	$\neg\varphi$
w	f
f	w

„Es ist falsch, dass $1 + 1 = 3$ ist.“ wahr

„Es gilt nicht $1 + 1 = 2$.“ falsch

Verknüpfung von Aussagen: Implikation

Implikation $\varphi \Rightarrow \psi$

„Aus φ folgt ψ."
„Wenn φ gilt, dann gilt auch ψ."
„φ ist eine hinreichende Bedingung für ψ."
„ψ ist eine notwendige Bedingung für φ."

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
w	*w*	*w*
w	*f*	*f*
f	*w*	*w*
f	*f*	*w*

Wichtig: Die Aussagen φ und ψ brauchen nicht kausal miteinander zusammenhängen.

Beispiele zur Implikation

- Die Aussage „Wenn heute Samstag ist, dann ist heute Wochenende.“ ist an jedem Tag der Woche korrekt.

- Die Aussage „Wenn heute Wochenende ist, dann ist heute Samstag.“ ist an jedem Wochentag außer Sonntag richtig.

- Für jede reelle Zahl a kann man die Aussage

  $$„a^2 = 1 \Rightarrow a = 1“$$

  betrachten. Im Fall $a \neq -1$ ist sie wahr, im Fall $a = -1$ falsch.

- Die umgekehrte Implikation „$a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$“ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ wahr, auch für $a = -1$.

(Reaktion auf Zuhörerfragen)

Formulierung:

ψ_1 und ψ_2 sind notwendige Bedingungen für φ bedeutet: $(\varphi \Rightarrow \psi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi_2)$

ψ_1 und ψ_2 ist eine notwendige Bedingung für φ bedeutet: $\varphi \Rightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2)$

Die Äquivalenz $a = 1 \Longleftrightarrow a^2 = 1$ ist für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ wahr

Verknüpfung von Aussagen: Äquivalenz

Äquivalenz $\varphi \Leftrightarrow \psi$

„Es gilt φ genau dann, wenn ψ gilt.“
„φ ist hinreichende und zugleich notwendige Bedingung für ψ.“

φ	ψ	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
w	*w*	*w*
w	*f*	*f*
f	*w*	*f*
f	*f*	*w*

Achtung: Beim Arbeiten mit Implikationen und Äquivalenzen ist es sehr wichtig, die zusammengesetzten Aussagen

$$\varphi \Rightarrow \psi \quad , \quad \psi \Rightarrow \varphi \qquad \text{und} \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi$$

sorgfältig auseinanderzuhalten, sonst kommt es zu Fehlern!

Verwendung mehrerer Verknüpfungen

Um Klammern zu sparen, ordnet man den Verknüpfungssymbolen unterschiedliche Bindungsstärke zu, und zwar in absteigender Reihenfolge

$$\neg \quad , \quad \wedge \quad , \quad \vee \quad , \quad \Rightarrow \quad , \quad \Leftrightarrow$$

genau wie bei der Regel „Punktrechung vor Strichrechnung“.

Beispiel:

$$\neg\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \varphi \Leftrightarrow \psi$$

ist gleichbedeutend mit

$$(((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \psi$$

Tautologien

Definition

Eine wahre zusammengesetzte Aussage, die wahr bleibt, wenn man ihre Teilaussagen durch beliebige andere Aussagen ersetzt, bezeichnen wir als Tautologie.

Beispiele:

- „Wenn dat so is, dann is dat so."
- „Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist."

Beispiel für eine Tautologie

Nachweis der Tautologie-Eigenschaft:

Betrachte die Einzelaussagen

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{„Der Hahn kräht auf dem Mist."} \\ \psi &= \text{„Das Wetter ändert sich."} \\ \neg\psi &= \text{„Das Wetter bleibt wie es ist."} \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Aussage hat also die Form

$$\phi \quad = \quad \varphi \Rightarrow \psi \vee \neg\psi .$$

Damit ergibt sich die Wahrheit der Gesamtaussage aus der Wahrheitstabelle

φ	ψ	$\neg\psi$	$\psi \vee \neg\psi$	ϕ
w	*w*	*f*	*w*	*w*
w	*f*	*w*	*w*	*w*
f	*w*	*f*	*w*	*w*
f	*f*	*w*	*w*	*w*

Logische Schlüsse

Definition

Wir sagen, die Aussage ψ folgt aus den Aussagen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ durch einen logischen Schluss, wenn die Implikation

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi \qquad \text{eine Tautologie ist.}$$

Beispiele für häufig verwendete logische Schlüsse

Modus Ponens $\quad \varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$

„Wenn φ gilt und aus φ die Aussage ψ folgt, dann gilt ψ."

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$	$\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$
w	w	w	w	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
f	f	w	f	w

Beweis durch Kontraposition $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

„Aus φ folgt ψ genau dann, wenn aus $\neg\psi$ die Aussage $\neg\varphi$ folgt.“

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$
w	*w*	*f*	*f*	*w*	*w*	*w*
w	*f*	*f*	*w*	*f*	*f*	*w*
f	*w*	*w*	*f*	*w*	*w*	*w*
f	*f*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*

Widerspruch

Beweis durch Widerspruch $(\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \varphi$

"Wenn aus $\neg\varphi$ ein Widerspruch folgt (nämlich eine Aussage ϕ und zugleich auch ihr Gegenteil $\neg\phi$), dann ist φ wahr."

φ	ϕ	$\neg\varphi$	$\neg\phi$	$\phi \wedge \neg\phi$	$\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi$	$(\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \varphi$
w	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*	*w*
w	*f*	*f*	*w*	*f*	*w*	*w*
f	*w*	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*
f	*f*	*w*	*w*	*f*	*f*	*w*

Ringschluss

Satz vom Ringschluss

$$(\varphi \Rightarrow \phi) \wedge (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \phi) \wedge (\phi \Leftrightarrow \psi) \wedge (\psi \Leftrightarrow \varphi)$$

„Wenn aus φ die Aussage ϕ und aus ϕ die Aussage ψ und aus ψ wieder die Aussage φ folgt, dann sind die drei Aussagen φ, ϕ und ψ äquivalent."

setze $A = \varphi \Rightarrow \phi$, $B = \phi \Rightarrow \psi$, $C = \psi \Rightarrow \varphi$, $D = \varphi \Leftrightarrow \phi$, $E = \phi \Leftrightarrow \psi$ und $F = \psi \Leftrightarrow \varphi$

φ	ϕ	ψ	A	B	C	D	E	F	$A \wedge B \wedge C$	$D \wedge E \wedge F$	$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D \wedge E \wedge F$
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	f	f	w	w	f	w	f	f	f	w
f	w	w	w	w	f	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	f	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	f	w	f	f	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w	w	w	w	w

Nahezu alle in der heutigen Mathematik verwendeten Konzepte lassen sich auf den Begriff der *Menge* zurückführen.

Definition (2.1)

(„naive Mengendefinition“ nach Cantor)

„Eine Menge ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente dieser Menge genannt werden – zu einem Ganzen.“

Allgemein übliche Notation der Mengenlehre

$x \in M$	Das Objekt x ist Element der Menge M.
$x \notin M$	Das Objekt x ist *kein* Element der Menge M.
$M \subseteq N$	Jedes Element x von M ist auch ein Element von N.
$M = N$	Es gilt $x \in M \Leftrightarrow x \in N$ für alle Objekte x.
$M \supseteq N$	gleichbedeutend mit $N \subseteq M$
$M \subsetneq N$	$M \subseteq N \wedge \neg(M = N)$
$M \supsetneq N$	gleichbedeutend mit $N \subsetneq N$
$\varnothing$	die leere Menge

Die Menge $\varnothing$ ist eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft $x \notin \varnothing$ für alle Objekte x.

Anmerkungen

- In der Literatur wird auch das Symbol „$\subset$" verwendet, aber die Bedeutung ist nicht einheitlich. Manchmal ist „$\subsetneq$", manchmal aber auch „$\subseteq$" gemeint. Deshalb muss man immer nachsehen, wie das Symbol in der entsprechenden Quelle verwendet wird.
- Anstelle von $\varnothing$ ist auch $\{\,\}$ als Symbol für die leere Menge gebräuchlich.
- Man beachte, dass $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ gleichermaßen wahre Aussagen sind. Die Aussage $\{1, 2, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ ist falsch.
- Die Aussagen $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ sind wiederum beide wahr.

Wie lassen sich Mengen definieren?

(1) Umgangssprachlich

„Sei P die Menge aller Primzahlen.“

(2) Durch Aufzählung

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ oder kürzer $M = \{1, 2, ..., 7\}$

(3) Durch eine definierende Bedingung
Ist $\varphi(x)$ ein Aussagenschema und M eine Menge, dann besteht die Menge

$$N \quad = \quad \{c \in M \mid \varphi(c)\}$$

aus genau denjenigen Elementen c einer Grundmenge M, für die $\varphi(c)$ eine wahre Aussage ist.

$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$ (wahr)

$\{1,2\} \subsetneq \{1,2,\underline{\underline{3}}\}$ (wahr)

---

unklar: $\{1,4,\dots,64\}$

könnte bedeuten $\{1,4,9,16,25,36,49,64\}$

oder $\{1,4,16,64\}$.

erlaubt: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$

Beispiele für die Verwendung definierender Bedingungen

- $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x + 1 = 3 \} = \{ 2 \}$
- $P = \{ p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl} \}$
  $= \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots \}$

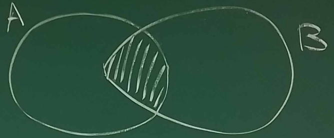
Häufig verwendete Mengenoperationen

(i)	**Durchschnitt**	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
(ii)	**Vereinigung**	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
(iii)	**Differenz**	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
(iv)	**Potenzmengen**	$\mathscr{P}(A) = \{B \text{ Menge } \mid B \subseteq A\}$
(v)	**kartesisches Produkt**	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Venn-Diagramme zur Veranschaulichung der Mengenoperationen

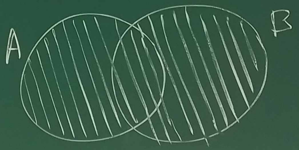
Durchschnitt

$A \cap B$



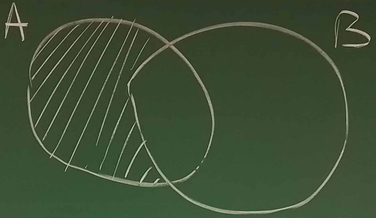
Vereinigung

$A \cup B$



Vereinigung

Differenz



$A \setminus B$

Annahme: $A \subseteq B$

Frage: Wie sehen $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ aus?

$A \cap B = A$, $A \cup B = B$, $A \setminus B = \emptyset$

Exkurs: Die Russell-Antinomie

(nicht im Skript enthalten, nicht prüfungsrelevant)

Wenn es (wie nach Cantor) tatsächlich möglich ist, beliebige Objekte zu einer Menge zumsammenzufassen, dann sollte es auch möglich sein, die folgende Menge zu bilden:

$$R \quad = \quad \{X \text{ Menge } \mid X \notin X\}.$$

Wenn diese Menge R (bestehend aus allen Mengen M mit $M \notin M$) tatsächlich existiert, dann dürfen wir auch fragen, ob $R \in R$ gilt.

1. Fall: $R \in R$ ist wahr
Dies bedeutet, dass R selbst die definierende Bedingung der Menge R ($X \notin X$) nicht erfüllt. Aber dann folgt aus der Definition, dass R nicht in R enthalten ist (denn R enthält ja genau die Mengen, die die definierende Bedingung erfüllen). Wir erhalten also $R \notin R$, im Widerspruch zur Fallannahme $R \in R$.

Exkurs: Die Russell-Antinomie (Forts.)

2. Fall: $R \in R$ ist falsch
In dieser Situation erfüllt R seine eigene definierende Bedingung. Analog zum 1. Fall kommen wir diesmal zum Ergebnis, dass R in R liegt (weil R ja alle Mengen enthält, die die definierende Bedingung erfüllen). Aber $R \in R$ steht im Widerspruch zur Annahme $\neg(R \in R)$.

Allein die Annahme, dass R existiert, hat also zu einem Widerspruch geführt. Wir sehen nun, in welcher Hinsicht die Cantorsche Mengendefinition „naiv“ ist: Wenn man für die Mengenbildung vollkommenden beliebige Zusammenfassungen erlaut, erhält man logische Widersprüche. Um das zu vermeiden, hat man in der Mathematik strenge Regeln dafür aufgestellt, welche Mengenbildungen tatsächlich „erlaubt“ sind: die sogenannten ZFC-Axiome. Wir werden uns damit aber nicht belasten, weil Probleme wie hier vorgestellte Russell-Antinomie in der mathematischen Praxis so gut wie nie auftreten.