Überblick über die Vorlesungsthemen

Die Vorlesung setzt sich zusammen aus den Themengebieten Lineare Algebra und Analysis.

Themen der Linearen Algebra

- mathematische Logik, Beweistechniken
- Grundlagen der Mengenlehre
- algebraische Grundstrukturen (Gruppen, Ringe, Körper)
- Matrizenrechnung und Lösung linearer Gleichungssysteme
- abstrakte Vektorräume, Dimensionsbegriff
- Koordinatensysteme

Überblick über die Vorlesungsthemen

Anwendungen der Linearen Algebra

- Geometrie (Winkel-, Flächen- und Abstandsberechnungen, Beschreibung von Symmetrieoperationen, Klassifikation geometrischer Strukturen)
- Grundlage für die mehrdimensionale Analysis und die Differenzialgeometrie
- Verfahren der Numerik (z.B. Interpolation)
- Theorie der Differenzialgleichungen, Funktionalanalysis
- Physik (klassische Mechanik, Quantenmechanik, Relativitätstheorie)
- Chemie, Elektrotechnik, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Überblick über die Vorlesungsthemen

Themen der Analysis

- Eigenschaften reeller Zahlen, Aufbau des Zahlensystems
- Konvergenz von Folgen und Reihen
- Stetigkeit und Funktionsgrenzwerte
- Differenzierbarkeit, Extremwertbestimmung
- Integralrechnung

Alltagslogik

Gespräch bei einer Verkehrskontrolle: „Wer Alkohol getrunken hat, fährt Schlangenlinien. Sie sind Schlangenlinien gefahren. Also haben Sie bestimmt einiges getrunken."

Klingt vernünftig, aber ... kein formal korrekter logischer Schluss!

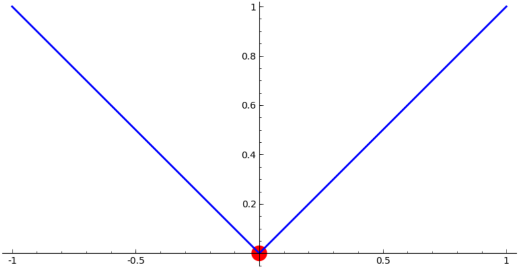
Übertragung der Schlussweise auf die Mathematik:

„Differenzierbare Funktionen sind stetig. Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist stetig. Also ist die Betragsfunktion auch differenzierbar." (falsch)

„Hat eine Funktion f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ ein Maximum, dann ist $f'(a) = 0$. Die Funktion $f(x) = x^3$ hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2$, also gilt $f'(0) = 0$. Folglich hat dieses f bei 0 ein Maximum." (falsch)

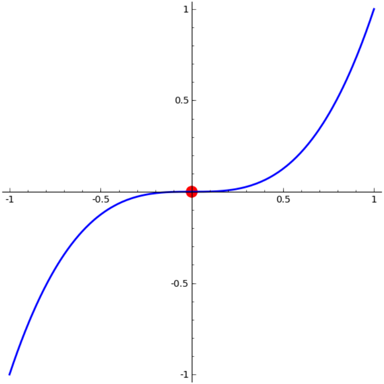
Widerlegung der beiden Aussagen

$f : x \mapsto |x|$



nicht differenzierbar in $x = 0$

$f : x \mapsto x^3$



kein Maximum in $x = 0$

Definition der Aussage

Frage:

Wie kann man sicher sein, ob ein logischer Schluss mathematisch zulässig ist?

Definition

Unter einer Aussage verstehen wir einen (sprachlich oder in mathematischer Notation formulierten) Satz, von dem auf sinnvolle und objektive Weise gesagt werden kann, dass er wahr oder falsch ist.

Beispiele für Aussagen

- Heute ist Dienstag. (wahr, jedenfalls am 15.10.2024)
- $1 + 1 = 2$ wahr
- Es existiert eine größte natürliche Zahl. falsch
- Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°. wahr
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig. wahr
- Jede gerade Zahl größer als zwei kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden. ???

Aussagen - Gegenbeispiele

Folgende Sätze sind keine Aussagen.

- Hallo!
- Mach endlich Deine Hausaufgaben!
- 10^{100} ist eine große Zahl
- Die Kreiszahl π ist ungefähr gleich $3,14$.
- $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$
- $a^2 + b^2 = c^2$

Im letzten Satz müssen a, b und c durch den Kontext definiert sein, damit jeweils eine Aussage vorliegt.

Die Verwendung von Bezeichnungen ohne Kontext sind ein **extrem häufiger** Anfängerfehler beim mathematischen Formulieren!

Aussagenschemata

Definition

Einen Satz, der einen oder mehrere Parameter enthält, und der nach Ersetzung dieser Parameter durch gewisse mathematische Objekte zu einer Aussage wird, nennen wir ein Aussagenschema.

Beispiel:

$\varphi(x) =$ „$x^2 - 1 < 0$“

$\varphi(5) =$ „$5^2 - 1 < 0$“ **falsch**
$\varphi(0) =$ „$0^2 - 1 < 0$“ **wahr**

$\psi(x) =$ „x **ist eine Primzahl.**“

$\psi(4) =$ „4 **ist eine Primzahl**“ **falsch**
$\psi(2) =$ „2 **ist eine Primzahl**“ **wahr**

Parameterbelegungen für Aussagenschemata

Nicht jede Parameterbelegung ist sinnvoll.

Beispiel:

$\varphi(x) =$ „$x^2 - 1 < 0$“

Einsetzen von $\{1, 2, 3\}$ in x liefert

$$\{1, 2, 3\}^2 - 1 < 0 \qquad \textbf{???}$$

Keine sinnvolle Aussage, man kann nicht über wahr oder falsch entscheiden!