LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
18.02.2025

Analysis und Lineare Algebra I

(Studiengang Wirtschaftspädagogik)

Klausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$3^{n+1} \quad \geq \quad n^2 + 1 \qquad \text{gilt.}$$

Hinweis: Der Beweis muss durch vollständige Induktion geführt werden. Es ist unzulässig, einen direkten Beweis anzugeben.

Name: _____

Aufgabe 2. (2+5+3 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_7$ mit 7 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \bar{4}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{3}x_3 & = & \bar{1} \\ \bar{2}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{4}x_3 & = & \bar{5} \\ \bar{2}x_1 & & & + & \bar{6}x_3 & = & \bar{3}. \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems an.

(b) Formen Sie diese Matrix auf normierte Zeilenstufenform um.

(c) Geben Sie die sieben Elemente der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

Name: _____

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Seien nun X und Y beliebige Mengen, $g : X \to Y$ eine injektive Abbildung und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $g^{-1}(g(A)) = A$ gilt.

Name: _____

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die folgende Teilmenge.

$$A \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 3 \;\wedge\; 2x - z = 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einen Untervektorraum U des $\mathbb{R}^3$ an, so dass die Gleichung $v + U = A$ erfüllt ist.

(c) Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tatsächlich ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: In Teil (b) braucht die Gleichung $v + U = A$ nicht überprüft werden, es genügt die Angabe von v und U.

Name: _____

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_5)$ über dem Körper $\mathbb{F}_5$ mit fünf Elementen.

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Name: _____

Aufgabe 6. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten die folgende Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$A \quad = \quad \left\{ \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

(a) Weisen Sie nach, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\inf(A) = \frac{1}{2}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sup(A) = 1$ gilt.

Name: _____

Aufgabe 7. (4+6 Punkte)

(a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass $\lim_n a_n = +\infty$, $\lim_n b_n = 0$ gilt und die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert (jeweils mit Nachweis).

(b) Sei nun $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n d_n = -\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n^2 + 1} \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.}$$

In Teil (b) ist die Verwendung von Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte unzulässig. Arbeiten Sie direkt mit der Definition des Konvergenzbegriffs bzw. der uneigentlichen Konvergenz.

Name: _____

Aufgabe 8. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie das jeweils verwendete Konvergenzkriterium an, und kontrollieren Sie jeweils, dass die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt sind.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{8n+5}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2+7}$