Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
16.04.2025

Analysis und Lineare Algebra I

(Studiengang Wirtschaftspädagogik)

Nachschreibklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \quad = \quad \frac{n}{2n+1} \qquad \text{gilt.}$$

Name: ____________________

Aufgabe 2. (2+5+3 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$ mit 11 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & \bar{3}x_2 & - & x_3 & = & \bar{3} \\ -x_1 & - & \bar{3}x_2 & - & x_3 & = & \bar{1} \\ -\bar{2}x_1 & + & \bar{5}x_2 & & & = & -\bar{2}. \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems an.

(b) Formen Sie diese Matrix auf normierte Zeilenstufenform um.

(c) Geben Sie Vektoren $u, v \in \mathbb{F}_{11}^3$ an mit der Eigenschaft, dass $\mathscr{L} = \{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}_{11}\}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Seien nun X und Y beliebige Mengen, $g : X \to Y$ eine injektive Abbildung und $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$ gilt.

Name: ____

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^2$, außerdem $U = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + w^2 = 0\}$ und

$$W = \{(x + iy, u + iv) \in \mathbb{C}^2 \mid x, y, u, v \in \mathbb{R}\ ,\ x + u = 0\}.$$

In Aufgabenteil (a) und (b) betrachten wir V als $\mathbb{C}$-Vektorraum, mit der herkömmlichen komponentenweisen Vektoraddition und skalaren Multiplikation.

(a) Zeigen Sie, dass U kein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass W ebenfalls kein Untervektorraum von V ist.

(c) Nun betrachten wir V als $\mathbb{R}$-Vektorraum, indem wir den Definitionsbereich der herkömmlichen skalaren Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ einschränken. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum dieses $\mathbb{R}$-Vektorraums ist.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 & -i \\ 1 & 0 & -1 \\ i+1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten die folgende Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$A = \left\{ 2^{-n} + 3^{-n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

(a) Weisen Sie nach, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Bestimmen Sie das Supremum von A (mit Nachweis).

(c) Zeigen Sie, dass $\inf(A) = 0$ gilt.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (4+6 Punkte)

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\lim_n a_n = -\infty$ und $\lim_n b_n = +\infty$ gilt. Konvergiert dann die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer gegen den Wert 0? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel an. Weisen Sie ggf. nach, dass Ihr Gegenbeispiel die Aussage tatsächlich widerlegt.

(b) Sei nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit $\lim_n c_n = +\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n + 1} \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.}$$

In Teil (b) ist die Verwendung von Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte unzulässig. Arbeiten Sie direkt mit der Definition des Konvergenzbegriffs bzw. der uneigentlichen Konvergenz.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie das jeweils verwendete Konvergenzkriterium an, und kontrollieren Sie jeweils, dass die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt sind.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n^2+3n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+3)!}$