Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
16.04.2025

Analysis und Lineare Algebra I

(Lehramt Gymnasium)

Nachschreibklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \qquad \text{gilt.}$$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)} = \tfrac{1}{3} = \frac{1}{1\cdot 1+1}.$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Gleichung für n vorausgesetzt. Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} =$$

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.$$

Name: ____

Aufgabe 2. (2+5+3 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$ mit 11 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & \bar{3}x_2 & - & x_3 & = & \bar{3} \\ -x_1 & - & \bar{3}x_2 & - & x_3 & = & \bar{1} \\ -\bar{2}x_1 & + & \bar{5}x_2 & & & = & -\bar{2}. \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems an.

(b) Formen Sie diese Matrix auf normierte Zeilenstufenform um.

(c) Geben Sie Vektoren $u, v \in \mathbb{F}_{11}^3$ an mit der Eigenschaft, dass $\mathscr{L} = \{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}_{11}\}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist.

Lösung:

zu (a)

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & -\bar{1} & \bar{3} \\ -\bar{1} & -\bar{3} & -\bar{1} & \bar{1} \\ -\bar{2} & \bar{5} & \bar{0} & -\bar{2} \end{pmatrix}$$

zu (b)

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & -\bar{1} & \bar{3} \\ -\bar{1} & -\bar{3} & -\bar{1} & \bar{1} \\ -\bar{2} & \bar{5} & \bar{0} & -\bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & -\bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{4} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & -\bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

zu (c) Die Matrix in normierter ZSF hat die Kennzahlen $r = 2$, $j_1 = 1$ und $j_2 = 3$. Die letzte Spalte der Matrix liefert die spezielle Lösung $u = (\bar{1}, \bar{0}, -\bar{2}) = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{9})$. Die zweite Spalte liefert den homogenen Lösungsvektor $v = b_2 = (-\bar{3}, \bar{1}, \bar{0}) = (\bar{8}, \bar{1}, \bar{0})$.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Seien nun X und Y beliebige Mengen, $g : X \to Y$ eine injektive Abbildung und $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$ gilt.

Lösung:

zu (a) Zum Nachweis der Injektivität seien $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = f(u,v)$ vorgegeben. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u-v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (y=v) \wedge (x-y=u-v)$$

$$\Rightarrow \quad (y=v) \wedge (x-v=u-v) \quad \Rightarrow \quad (y=v) \wedge (x=u) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Für den Nachweis der Surjektivität sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (a,b)$ existiert. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$f\begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (y=a) \wedge (x-y=b)$$

$$\Rightarrow \quad (y=a) \wedge (x-a=b) \quad \Rightarrow \quad (x=a+b) \wedge (y=a).$$

Es gilt also $f(a+b,a) = (a,b)$.

zu (b) „$\subseteq$" Sei $y \in g(A \cap B)$. Dann existiert ein $x \in A \cap B$ mit $y = g(x)$. Aus $x \in A \cap B$ folgt $x \in A$ und damit $y = g(x) \in g(A)$. Ebenso erhält man $x \in B$ und $y = g(x) \in g(B)$. Insgesamt gilt also $y \in g(A) \cap g(B)$.

„$\supseteq$" Sei $y \in g(A) \cap g(B)$. Wegen $y \in g(A)$ existiert ein $a \in A$ mit $y = g(a)$. Wegen $y \in g(B)$ existiert auch ein $b \in B$ mit $y = g(b)$. Aus $g(a) = y = g(b)$ und der Injektivität von g folgt $a = b$. Daraus wiederum folgt $a \in A \cap B$ und $y = g(a) \in g(A \cap B)$.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^2$, außerdem $U = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + w^2 = 0\}$ und

$$W = \{(x+iy, u+iv) \in \mathbb{C}^2 \mid x,y,u,v \in \mathbb{R}\ ,\ x+u = 0\}.$$

In Aufgabenteil (a) und (b) betrachten wir V als $\mathbb{C}$-Vektorraum, mit der herkömmlichen komponentenweisen Vektoraddition und skalaren Multiplikation.

(a) Zeigen Sie, dass U kein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass W ebenfalls kein Untervektorraum von V ist.

(c) Nun betrachten wir V als $\mathbb{R}$-Vektorraum, indem wir den Definitionsbereich der herkömmlichen skalaren Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ einschränken. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum dieses $\mathbb{R}$-Vektorraums ist.

Lösung:

zu (a) Wegen $i^2 + 1^2 = (-1)+1 = 0$ ist $(i,1)$ in U enthalten. Ebenso ist $(-i,1)$ wegen $(-i)^2+1^2 = (-1)+1 = 0$ ein Element von U. Wäre U ein Untervektorraum, dann müsste auch der Vektor $(i,1)+(-i,1) = (0,2)$ in U liegen. Aber dies ist wegen $0^2 + 2^2 = 4 \neq 0$ nicht der Fall.

zu (b) Das Element $(i,i) = (0+1\cdot i, 0+1\cdot i)$ ist wegen $0+0 = 0$ in W enthalten. Wäre W ein Untervektorraum, dann müsste auch das Element $(-i)\cdot(i,i) = (1,1) = (1+0\cdot i, 1+0\cdot i)$ in W liegen. Aber dies ist wegen $1+1 = 2 \neq 0$ nicht der Fall.

zu (c) Der Nullvektor ist wegen $(0,0) = (0+0\cdot i, 0+0\cdot i)$ und $0+0 = 0$ in W enthalten. Seien $w, w' \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $w + w' \in W$ und $\lambda w \in W$. Wegen $v, w \in W$ gibt es $x,y,u,v \in \mathbb{R}$ und $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $w = (x+iy, u+iv)$, $w' = (a+ib, c+id)$ und $x+u = a+c = 0$. Dann ist

$$w + w' = ((x+a)+i(y+b), (u+c)+i(v+d)) \quad ,$$

und wegen $(x+a)+(u+c) = (x+u)+(a+c) = 0+0 = 0$ ist $w+w'$ in W enthalten. Weiter gilt

$$\lambda w = (\lambda x + i\lambda y, \lambda u + i\lambda v) \quad ,$$

und wegen $\lambda x + \lambda u = \lambda(x+u) = \lambda \cdot 0 = 0$ gilt auch $\lambda w \in W$.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie das jeweils verwendete Konvergenzkriterium an, und kontrollieren Sie jeweils, dass die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt sind.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n^2+3n+1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3)!}$

Lösung:

zu (a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2+3\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{2+3\cdot 0} = 0 \quad ,$$

und wegen $n+1 \geq n \Rightarrow 2(n+1)+3 \geq 2n+3 \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)+3} \leq \frac{1}{2n+3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(\frac{1}{2n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Die angegebene Reihe konvergiert somit auf Grund des Leibniz-Kriteriums.

zu (b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die harmische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert, damit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{n} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\frac{3n-1}{2n^2+3n+1} \leq \frac{3n}{2n^2+3n+1} \leq \frac{3n}{2n^2} = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Also folgt die Divergenz der gegebenen Reihe aus dem Minorantenkriterium.

zu (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{n^2}{(n+3)!}$. Es gilt jeweils

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^2}{(n+4)!} \cdot \frac{(n+3)!}{n^2} = (1+\tfrac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n+4} = (1+\tfrac{1}{n})^2 \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1+4\cdot\frac{1}{n}}.$$

Aus $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ und den Grenzwertsätzen folgt $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = (1+0)^2 \cdot \frac{0}{1+4\cdot 0} = 0$. Wegen $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 0$ kann das Quotientenkriterium angewendet werden, das die Konvergenz der Reihe (sogar die absolute Konvergenz) liefert.

Name: ____

Aufgabe 6. (4+6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -x & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt -1 stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f auch im Punkt 1 stetig ist.

In beiden Aufgabenteilen ist es unzulässig, Aussagen über links- oder rechtsseitige Grenzwerte oder links- oder rechtsseitige Stetigkeit zu verwenden. Arbeiten Sie entweder direkt mit der Definition des Stetigkeitsbegriffs oder mit dem ε-δ-Kriterium.

Lösung:

zu (a) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = -1$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = f(-1)$, wobei $f(-1) = -(-1) = 1$ ist. Wegen $\lim_n x_n = -1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - (-1)| < 1$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt $-2 < x_n < 0$ für alle $n \geq N$ und somit auch $f(x_n) = -x_n$ für alle $n \geq N$. Mit wiederum erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} (-x_n) \quad = \quad -(-1) \quad = \quad 1.$$

zu (b) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = 1$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = f(1)$, wobei $f(1) = \frac{2 \cdot 1+1}{1+2} = 1$ ist. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ existiert.

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist als Polynomfunktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Daraus folgt $\lim_n g(x_n) = g(1) = 1^2 = 1$, und insbesondere existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|g(x_n) - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq \mathbb{N}_1$. Die Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$ ist als rationale Funktion ebenfalls auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Es gilt also $\lim_n h(x_n) = h(1) = 1$, und insbesondere finden wir ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|h(x_n) - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$.

Sei nun $N = \max\{N_1, N_2\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Im Fall $x_n < 1$ gilt $f(x_n) = g(x_n)$, und wegen $n \geq N_1$ erhalten wir $|f(x_n) - 1| = |g(x_n) - 1| < \varepsilon$. Im Fall $x_n \geq 1$ gilt $f(x_n) = h(x_n)$, und aus $n \geq N_2$ folgt $|f(x_n) - 1| = |h(x_n) - 1| < \varepsilon$. Insgesamt ist $|f(x_n) - 1| < \varepsilon$ also für alle $n \geq N$ erfüllt.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 6, also

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -x & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass f auch im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar ist.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, sofern dieser existiert (mit Nachweis).

In dieser Aufgabe ist es unzulässig, Aussagen über links- oder rechtsseitige Grenzwerte oder links- bzw. rechtsseitige Differenzierbarkeit zu verwenden.

Lösung:

zu (a) Nehmen wir an, dass f im Nullpunkt differenzierbar ist, mit $c = f'(0)$. Dann gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = 0$ jeweils

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \quad = \quad c.$$

Wegen $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ gilt insbesondere

$$c \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{1}{n})^2 - 0^2}{\frac{1}{n} - 0} \quad = \quad = \quad \lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{n^2} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \quad = \quad 0$$

und wegen $\lim_n (-\frac{1}{n}) = 0$ andererseits

$$c \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(-\frac{1}{n}) - f(0)}{(-\frac{1}{n}) - 0} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} (-n) \cdot \frac{1}{n} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} (-1) \quad = \quad -1.$$

Der Widerspruch $-1 = c = 0$ zeigt, dass die Annahme falsch ist und f in 0 nicht differenzierbar ist.

zu (b) Nehmen wir an, dass f in 1 differenzierbar ist, mit $c = f'(1)$. Dann gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = 1$ jeweils

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} \quad = \quad c.$$

Wegen $\lim_n (1 - \frac{1}{n}) = 1$ gilt insbesondere

$$c \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(1 - \frac{1}{n}) - f(1)}{(1 - \frac{1}{n}) - 1} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^2 - 1^2}{(1 - \frac{1}{n}) - 1} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} (-n) \cdot ((\tfrac{1}{n})^2 - \tfrac{2}{n}) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} (-\tfrac{1}{n} + 2) \quad = \quad 2$$

und wegen $\lim_n (1 + \frac{1}{n}) = 1$ andererseits

$$\begin{aligned} c \quad &= \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(1 + \frac{1}{n}) - f(1)}{(1 + \frac{1}{n}) - 1} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} n \cdot \left(\frac{2 \cdot (1 + \frac{1}{n}) + 1}{(1 + \frac{1}{n}) + 2} - 1 \right) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} n \cdot \left(\frac{3n + 2}{3n + 1} - 1 \right) \\ &= \quad \lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{3n + 1} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{3n + 1} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} \quad = \quad \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Der Widerspruch $2 = c = \frac{1}{3}$ zeigt, dass die Annahme falsch ist und f in 1 nicht differenzierbar ist.

zu (c) Wir zeigen, dass der Grenzwert gleich 2 ist. Sei dazu $(x_n)_{n\in\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = +\infty$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = 2$. Wegen $\lim_n x_n = +\infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq 1$ und $f(x_n) = \frac{2x_n+1}{x_n+2}$ für alle $n \geq N$. Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ erhalten wir mit der l'Hospitalschen Regel

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n+1}{x_n+2} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+2} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1} \quad = \quad 2.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (6+4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei jeweils $\mathcal{Z}_n = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$, die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,1]$.

(a) Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Untersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}_n)$ und die Obersumme $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}_n)$.
Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie das Unter- und das Oberintegral von f und entscheiden Sie begründet, ob die Funktion f Riemann-integrierbar ist.

Lösung:

zu (a) Sei $x_k = \frac{k}{n}$ für $0 \leq k \leq n$ und $c_k = \inf f([x_k, x_{k+1}])$, $d_k = \sup f([x_k, x_{k+1}])$ für $0 \leq k < n$. Weil f monoton wachsend ist, gilt $c_k = f(x_k) = 2 \cdot \frac{k}{n} + 1$ und $d_k = f(x_{k+1}) = 2 \cdot \frac{k+1}{n} + 1$ für $0 \leq k < n$. Wir erhalten die Untersumme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2 \cdot \tfrac{k}{n} + 1) \cdot \tfrac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+n) \\ &= 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = 1 + \tfrac{2}{n^2} \cdot \tfrac{1}{2}(n-1)n = 2 - \tfrac{1}{n} \end{aligned}$$

und die Obersumme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} d_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2 \cdot \tfrac{k+1}{n} + 1) \cdot \tfrac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k+n) \\ &= 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \tfrac{2}{n^2} \cdot \tfrac{1}{2}n(n+1) = 2 + \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

zu (b) Laut Vorlesung gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$2 - \tfrac{1}{n} \leq \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}_n) \leq \int_{0\bigstar}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{0}^{1\bigstar} f(x)\,dx \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}_n) = 2 + \tfrac{1}{n}.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert $\int_{0\bigstar}^1 f(x)\,dx = \int_0^{1\bigstar} f(x)\,dx = 2$. Weil Unter- und Oberintegral übereinstimmen, ist die Funktion f Riemann-integrierbar, mit $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$.