LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
16.04.2025

# Analysis und Lineare Algebra I

**(Lehramt Gymnasium)**

## Nachschreibklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | | | |

*Hinweise:*

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

**Aufgabe 1.** (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \text{gilt.}$$

Name: ____________________

**Aufgabe 2.** (2+5+3 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$ mit 11 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & \bar{3}x_2 & - & x_3 & = & \bar{3} \\ -x_1 & - & \bar{3}x_2 & - & x_3 & = & \bar{1} \\ -\bar{2}x_1 & + & \bar{5}x_2 & & & = & -\bar{2}. \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems an.

(b) Formen Sie diese Matrix auf normierte Zeilenstufenform um.

(c) Geben Sie Vektoren $u, v \in \mathbb{F}_{11}^3$ an mit der Eigenschaft, dass $\mathscr{L} = \{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}_{11}\}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist.

Name: ______________________________

**Aufgabe 3.** (5+5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass $f$ bijektiv ist.

(b) Seien nun $X$ und $Y$ beliebige Mengen, $g : X \to Y$ eine injektive Abbildung und $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$ gilt.

Name: ______________________________

**Aufgabe 4.** (3+3+4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^2$, außerdem $U = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + w^2 = 0\}$ und

$$W = \{(x+iy, u+iv) \in \mathbb{C}^2 \mid x,y,u,v \in \mathbb{R}\ ,\ x+u=0\}.$$

In Aufgabenteil (a) und (b) betrachten wir $V$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, mit der herkömmlichen komponentenweisen Vektoraddition und skalaren Multiplikation.

(a) Zeigen Sie, dass $U$ kein Untervektorraum von $V$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $W$ ebenfalls kein Untervektorraum von $V$ ist.

(c) Nun betrachten wir $V$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, indem wir den Definitionsbereich der herkömmlichen skalaren Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ einschränken. Zeigen Sie, dass $W$ ein Untervektorraum dieses $\mathbb{R}$-Vektorraums ist.

Name: ____________________________________________

**Aufgabe 5.** (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie das jeweils verwendete Konvergenzkriterium an, und kontrollieren Sie jeweils, dass die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt sind.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n^2+3n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+3)!}$

Name: ____________________

**Aufgabe 6.** (4+6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ im Punkt $-1$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f$ auch im Punkt 1 stetig ist.

In beiden Aufgabenteilen ist es unzulässig, Aussagen über links- oder rechtsseitige Grenzwerte oder links- oder rechtsseitige Stetigkeit zu verwenden. Arbeiten Sie entweder direkt mit der Definition des Stetigkeitsbegriffs oder mit dem $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium.

Name: ______________________________

**Aufgabe 7.** (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 6, also

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -x & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f$ auch im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar ist.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, sofern dieser existiert (mit Nachweis).

In dieser Aufgabe ist es unzulässig, Aussagen über links- oder rechtsseitige Grenzwerte oder links- bzw. rechtsseitige Differenzierbarkeit zu verwenden.

Name: ____________________

**Aufgabe 8.** (6+4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei jeweils $\mathcal{Z}_n = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$, die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,1]$.

(a) Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Untersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}_n)$ und die Obersumme $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}_n)$.
*Hinweis:* Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie das Unter- und das Oberintegral von $f$ und entscheiden Sie begründet, ob die Funktion $f$ Riemann-integrierbar ist.