§ 17. Zerfällungskörper und normale Erweiterungen

Definition (17.1)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $f \in K[x]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zerfällt f über L in Linearfaktoren, und bezeichnen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Nullstellen von f in L , dann nennt man $K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ den **Zerfällungskörper** von f in L über dem Grundkörper K .

Satz (17.2)

Sei K ein Körper. Dann **existiert** zu jedem nicht-konstanten Polynom $f \in K[x]$ ein Zerfällungskörper von f über K .

Zerfällungskörper von Polynomengen

Definition (17.3)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, und $S \subseteq K[x]$ eine (möglicherweise unendliche) Menge von nicht-konstanten Polynomen, die über L alle in Linearfaktoren zerfallen. Weiter sei $N \subseteq L$ die Menge aller Nullstellen sämtlicher Polynome aus S in L , also

$$N = \{\alpha \in L \mid f(\alpha) = 0 \text{ für ein } f \in S\}.$$

Dann wird $K(N)$ als **Zerfällungskörper** von S über dem Grundkörper K bezeichnet.

Satz (17.4)

Ist K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine Menge nicht-konstanter Polynome, dann existiert ein Zerfällungskörper von S über K .

Definition des algebraischen Abschlusses

Definition (17.6)

Ein Körper K heißt **algebraisch abgeschlossen**, wenn jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ in K eine Nullstelle besitzt.

Definition (17.7)

Sei K ein Körper. Ein Erweiterungskörper L von K wird **algebraischer Abschluss** von K genannt, wenn $L|K$ algebraisch und L algebraisch abgeschlossen ist.

Folgerung (17.9)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $S_K \subseteq K[x]$ die Menge aller nicht-konstanten Polynome über K . Genau dann ist L ein algebraischer Abschluss von K , wenn L ein Zerfällungskörper von S_K ist.

Ein Fortsetzungssatz für Zerfällungskörper

Proposition (17.10)

Sei $L|K$ eine algebraische Erweiterung, $\tilde{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\phi : K \rightarrow \tilde{K}$ ein Homomorphismus von Körpern. Dann gibt es eine **Fortsetzung** ψ von ϕ auf den Körper L , also einen Homomorphismus $\psi : L \rightarrow \tilde{K}$ mit $\psi|_K = \phi$.

Eindeutigkeit der Zerfällungskörper

Satz (17.11)

Sei K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine Menge bestehend aus nicht-konstanten Polynomen. Sei $\phi : K \rightarrow \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern und $\tilde{S} = \{\phi(f) \mid f \in S\}$. Sei L ein Zerfällungskörper von S und $\tilde{L}$ ein Zerfällungskörper von $\tilde{S}$. Dann gibt es einen **Isomorphismus** $\psi : L \rightarrow \tilde{L}$ mit $\psi|_K = \phi$.

Folgerung (17.12)

Sei K ein Körper, und seien $L, \tilde{L}$ algebraische Abschlüsse von K . Dann existiert ein **K -Isomorphismus** zwischen L und $\tilde{L}$.

Beweis von Satz 17.11

geg. Isom $\phi: K \rightarrow \tilde{K}$ von Körpern, $S \subseteq K[x] \setminus K$,

$$\tilde{S} = \phi(S) = \{\phi(f) \mid f \in S\} \subseteq \tilde{K}[x] \setminus \tilde{K}$$

Sei $L \supseteq K$ ein Zerfällungskörper von S über K und
 $\tilde{L} \supseteq \tilde{K}$ ein Zerf.-korp. von $\tilde{S}$ über $\tilde{K}$.

Beh. Es gibt einen Isom $\psi: L \rightarrow \tilde{L}$ mit $\psi|_K = \phi$.

Sei L_1 ein algebraischer Abschluss von $\tilde{L}$. Da L_1 alg. absq.
ist, existiert nach Prop. 17.10 ein Körperhom.

$\psi: L \rightarrow L_1$ mit $\psi|_K = \phi$. z.zg.

$$(1) \quad \psi(L) \subseteq \tilde{L} \quad (2) \quad \psi(L) \supseteq \tilde{L}$$

(Ist das erfüllt, dann ist ψ ein Isom. zwischen L und $\tilde{L}$, wie angeg.)

zu (1) Sei $N = \{x \in L \mid f(x) = 0 \text{ für ein } f \in S\}$ und

$$\tilde{N} = \{\tilde{x} \in \tilde{L} \mid \tilde{f}(\tilde{x}) = 0 \text{ für ein } \tilde{f} \in \tilde{S}\}$$

Nach Def. des Zerfällungskörpers gilt $L = K(N)$, $\tilde{L} = \tilde{K}(\tilde{N})$

$$\begin{aligned} \text{Nach } \S 16 \text{ gilt } \psi(L) &= \psi(K(N)) = \psi(K)(\psi(N)) \\ &= \phi(K)(\psi(N)) = \tilde{K}(\psi(N)) \end{aligned}$$

$\triangle \psi|_K = \phi$ $\triangle \phi: K \rightarrow \tilde{K}$ Isom.

dass $\psi(N) \subseteq \tilde{N}$ erfüllt ist. Sei $x \in N$, z.zg. $\psi(x) \in \tilde{N}$
 $x \in N \Rightarrow \exists f \in S$ mit $f(x) = 0 \Rightarrow \tilde{f} = \phi(f) \in \tilde{S}$, und

$$\tilde{f}(\psi(\alpha)) = \phi(f)(\psi(\alpha)) = 0$$

$\Rightarrow \psi(\alpha)$ ist Nullstelle eines Nullstellen" $\uparrow \S 16$ „Nullst. auf

Polynoms aus $\tilde{S} \Rightarrow \psi(\alpha) \in \tilde{N}$

zu (2) Beh.: Jedes Polynom aus $\tilde{S}$ zerfällt über $\psi(L)$ in Linearfaktoren.

Sei $\tilde{f} \in \tilde{S} \Rightarrow \exists f \in S$ mit $\phi(f) = \tilde{f}$

L Zerf. körp. von S , $f \in S \Rightarrow \exists a \in K^x$

und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in N$ mit $f = a(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$

$\Rightarrow \tilde{f} = \phi(f) = \psi(f) = \psi(a)(x - \psi(\alpha_1)) \cdots$

$(x - \varphi(x_n))$ Da $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ in $\varphi(L)$ liegen, zerfällt $\tilde{f}$ über $\varphi(L)$ in Linearfaktoren

(Beh.) Aus der Beh. folgt $\tilde{N} \in \varphi(L)$.

außerdem: $\varphi(L) \supseteq \varphi(K) = \phi(K) = \tilde{K}$

also: $\varphi(L) \supseteq \tilde{K}$, $\varphi(L) \supseteq \tilde{N}$, $\varphi(L)$ ist

Teilkörper von L , $\Rightarrow \varphi(L) \supseteq \tilde{K}(\tilde{N}) = \tilde{L}$.

□

Definition (17.13)

Eine algebraische Körpererweiterung $L|K$ heißt **normal**, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $f \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom, das in L eine Nullstelle besitzt, dann zerfällt f über L in Linearfaktoren.

Proposition (17.14)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2. Dann ist $L|K$ normal.

Beweis von Prop. 17.14:

geg. Körpererw. $L|K$ mit $[L:K]=2$

z.zg. $L|K$ ist normal

Für den Nachweis sei $f \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom mit einer Nullstelle $\alpha \in L$. z.zg.

f zerfällt über L in Linearfaktoren

Beh. $\text{grad}(f) \leq 2$

Aus der Beh. die Aussage, denn: Im Fall

$\text{grad}(f) = 1$ ist dies offensichtlich. Betrachte

nun den Fall $\text{grad}(f) = 2$. $f(\alpha) = 0 \Rightarrow$
 $(x - \alpha) \mid f \text{ in } L[x] \Rightarrow \exists h \in L[x] \text{ mit } f \stackrel{(x)}{=} (x - \alpha) h$

Aus $\text{grad}(f) = 2$ folgt $\text{grad}(h) = 1$, also ist
(*) eine Zerlegung von f in Linearfaktoren.

Zeige nun die Beh. $\alpha \in L \Rightarrow K(\alpha)$ ist Zwischenkörper von $L|K$ Gradformel $\Rightarrow$

$$2 = [L:K] = [L:K(\alpha)] \cdot [K(\alpha):K]$$

$\Rightarrow [K(\alpha):K] \in \{1, 2\}$. Sei $\tilde{f}$ die Normierung des Polynoms $f \Rightarrow$ Auch $\tilde{f}$ ist irred., $\tilde{f}(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \tilde{f} = \mu_{\alpha, K} \Rightarrow \text{grad}(f) = [K(\alpha):K] \in \{1, 2\}$

□

Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist nicht normal, denn:

Sei $f = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Dieses Pol ist in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel (Eisenstein) und hat in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ die Nullstelle $\sqrt[3]{2}$.

Aber das Polynom zerfällt über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nicht in Linearfaktoren, statt dessen sind die irred. Faktoren über

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ geg. durch $f = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$.

(Nullst. in $\mathbb{C}$:

$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, liegen nicht
im Teilbep. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$)

Satz (17.15)

Sei K ein Körper, und seien $\tilde{K} \supseteq L \supseteq K$ Erweiterungen von K , wobei $L|K$ endlich und $\tilde{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $L|K$ ist normal.
- (ii) Es gibt ein nicht-konstantes Polynom $f \in K[x]$, so dass L der Zerfällungskörper von f über K ist.
- (iii) Es gilt $\text{Hom}_K(L, \tilde{K}) = \text{Aut}_K(L)$.

Beweis von Satz 17.15

geg.: endl. Erweiterung $L|K$, alg. alg. Erweiterungskörper $\tilde{K}$ von L

z.zg.: Äquivalenz der drei Aussagen

(i) $L|K$ ist normal

(ii) $\exists f \in K[x] \setminus K$, so dass L Zerf.-korp. von f über K ist

(iii) $\text{Hom}_K(L, \tilde{K}) = \text{Aut}_K(L)$

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Da $L|K$ endlich ist, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in L$ mit $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ (nehme für $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ zum Beispiel eine Basis von L als K -Vektorraum).

Setze $f_i = M_{\alpha_i, K}$ für $1 \leq i \leq r$ und $f = \prod_{i=1}^r f_i$.

Beh. L ist Zerfällungskörper von f über K .

Da die Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ alle Nullstellen von f sind und $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ gilt, wird L erst recht über K von der Menge aller Nullstellen des Polynoms f in L erzeugt.

nach z.zg. f zerfällt über L in Linearfaktoren

genügt f_i zerfällt über L in Linearfaktoren, für $1 \leq i \leq r$

Sei also $i \in \{1, \dots, r\}$. Das Pol. f_i ist in $K[x]$ irreduzibel (als Minimalpolynom) und hat in L eine Nullstelle, nämlich

α_i . $\xrightarrow{L/K \text{ normal}}$ f_i zerfällt über L in Linearfaktoren

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Vor: $\exists f \in K[x] \setminus K$, so dass L Zerfällungskörper von f über K ist.

z.zg.: $\text{Hom}_K(L, \tilde{K}) = \text{Aut}_K(L)$

" $\supseteq$ " ist klar, denn jedes $\sigma \in \text{Aut}_K(L)$ kann wegen $L \subseteq \tilde{K}$ als K -Hom. $L \rightarrow \tilde{K}$ aufgefasst werden.

" $\subseteq$ " Sei $\sigma \in \text{Hom}_K(L, \tilde{K})$. Da L Zerfällungskörper von f über K ist, gilt $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, wobei $N = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ die Menge der Nullstellen von f in L ist. Wegen Satz 13.3 ("Nullstellen auf Nullstellen") gilt $\sigma(\alpha_i) \in N$ für $1 \leq i \leq r$
 $\Rightarrow \sigma(N) \subseteq N \Rightarrow \sigma(L) = \sigma(K(N)) \subseteq K(\sigma(N))$

$\subseteq L \Rightarrow \exists \in \text{Hom}_K(L, L)$. Da $L|K$ algebraisch ist, gilt $\text{Hom}_K(L, L) = \text{Aut}_K(L)$, nach § 16.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Vor $\text{Hom}_K(L, \tilde{K}) = \text{Aut}_K(L)$

z.zg. $L|K$ ist normal. Sei $g \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom mit einer Nullstelle $\alpha \in L$. z.zg.

g zerfällt über L in Linearfaktoren. Da $\tilde{K}$ algebraisch abg. ist, zerfällt g in $\tilde{K}[x]$ in Linear-

Faktoren. Es seien $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \tilde{K}$ die Nullstellen von g in $\tilde{K}$. Es reicht zu zeigen, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ in L liegen. Sei $i \in \{1, \dots, r\}$.

Da g in $K[x]$ irreduzibel ist und α, α_i Nullstellen

won α_i in $\tilde{K}$ sind, existiert lt. Fortsetzungs-
satz ein $\sigma \in \text{Hom}_K(K(\alpha), \tilde{K})$ mit $\sigma(\alpha) = \alpha_i$.

Da $\tilde{K}$ alg. abg. ist, existiert nach Prop. 17.10
eine Fortsetzung $\tau \in \text{Hom}_K(L, \tilde{K})$ von σ .

Var. $\Rightarrow \tau \in \text{Aut}_K(L) \Rightarrow \alpha_i = \sigma(\alpha) = \tau(\alpha) \in L$.

□

wegen
oben.

llings-
($\alpha_1, \dots, \alpha_r$),

ellen

stellen

$\leq i \leq r$

$\in K(\alpha(N))$

Beispiel zur Äquivalenz „(i) $\Leftrightarrow$ (iii)“

Sei $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\bar{K} = \mathbb{C}$.

bereits gezeigt: $L|K$ ist nicht normal

Da die Aussagen (i) und (iii) aus Satz 17.3 äquivalent sind, muss also

$$\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) \neq \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{C})$$

gelten. bereits bekannt: Die Menge $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{C})$ ist dreielementig. Dagegen besteht $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ nur aus einem Element, nämlich $\text{id}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}$, denn: Wie bereits gezeigt, besteht $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{R})$ nur aus einem Element und jedes $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ liegt auch in $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{R})$.

Definition (17.16)

Sei $L|K$ eine normale Erweiterung und $\alpha \in L$. Dann werden die Nullstellen des Minimalpolynoms $\mu_{\alpha,K}$ in L die **Konjugierten** des Element α über K genannt.

alternative Charakterisierung:

Sei $L|K$ eine normale Erweiterung. Zwei Elemente α, β sind genau dann zueinander konjugiert (also β ein Konjugiertes von α), wenn ein $\sigma \in \text{Aut}_K(L)$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$ existiert.