§ 17. Zerfällungskörper und normale Erweiterungen

Definition (17.1)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $f \in K[x]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zerfällt f über L in Linearfaktoren, und bezeichnen $\alpha_1, ..., \alpha_r$ die Nullstellen von f in L, dann nennt man $K(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ den Zerfällungskörper von f in L über dem Grundkörper K.

Satz (17.2)

Sei K ein Körper. Dann existiert zu jedem nicht-konstanten Polynom $f \in K[x]$ ein Zerfällungskörper von f über K.

Beispiele zum Begriff des Zerfällungskörpers

(i) $K = \mathbb{Q}$, $f = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$

einzige Nullstelle in $\mathbb{R}$: $\sqrt[3]{2}$

zwei weitere Nullst. in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $\zeta\sqrt[3]{2}$, $\zeta^2\sqrt[3]{2}$

wobei $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ $\quad (\zeta^3 = 1)$

Also ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta\sqrt[3]{2}, \zeta^2\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$ der Zerfällungskörper von f in $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.

(ii) $K = \mathbb{Q}$, $g = (x^2-2)(x^2-3)(x-5)$

Nullstellen in $\mathbb{R}$: $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, 5

In $\mathbb{R}[x]$ gilt $g = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-5)$

Das Polynom zerfällt also über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren. Zerfällungskörper ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3},5) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$

(iii) $f = x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$. Die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ und $\mathbb{R}$ sind <u>keine</u> Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Die Zerlegung von f in irreduzible Faktoren über diesen Körpern ist $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4})$

(iv) Ebenso ist $\mathbb{C}$ kein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Das Polynom f zerfällt zwar über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, aber es gilt nicht $\mathbb{C} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta\sqrt[3]{2}, \zeta^2\sqrt[3]{2})$, d.h. $\mathbb{C}$ ist kein <u>minimaler</u> Erweiterungskörper mit dieser Eigenschaft.

Beweis von Satz 17.2:

geg: Körper K, $f \in K[x] \setminus K$

z.zg: Es gibt einen Zerfällungskörper von f über K.

Beweis durch vollst. Ind. über $n = \mathrm{grad}(f) \in \mathbb{N}$:

Ind-Anf.: $n = 1$ Dann ist f selbst ein lineares Polynom, und K selbst ist Zerfällungskörper von f über K.

$n \mapsto n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$, $f \in K[x]$ vom Grad $n+1$. Sei $f_1 \in K[x]$ ein irreduzibler Faktor von f bereits bekannt: Es gibt einen Erweiterungskörper M mit einer Nullstelle $\alpha \in M$ von f. Setze $L_1 = K(\alpha)$. $\Rightarrow \exists g \in L_1[x]$ mit $f = (x-\alpha)g$, wobei $\operatorname{grad}(g) = n$

Ind-V. $\Rightarrow$ Es gibt einen Zerfällungskörper L von g über L_1, d.h. $L = L_1(\alpha_2, \dots, \alpha_r)$ $(r \in \mathbb{N}_0)$, wobei $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ die Nullstellen von g in L sind $\Rightarrow L = K(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$.

mit g zerfällt auch $f = (x-\alpha)g$ über L in Linearfaktoren, und $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sind die Nullstellen von f in L. Also ist L Zerfällungskörper von f über K. $\square$

Zerfällungskörper von Polynommengen

Definition (17.3)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, und $S \subseteq K[x]$ eine (möglicherweise unendliche) Menge von nicht-konstanten Polynomen, die über L alle in Linearfaktoren zerfallen. Weiter sei $N \subseteq L$ die Menge aller Nullstellen sämtlicher Polynome aus S in L, also

$$N \quad = \quad \{\alpha \in L \mid f(\alpha) = 0 \text{ für ein } f \in S\}.$$

Dann wird $K(N)$ als Zerfällungskörper von S über dem Grundkörper K bezeichnet.

Satz (17.4)

Ist K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine Menge nicht-konstanter Polynome, dann existiert ein Zerfällungskörper von S über K.

zum Beweis von Satz 17.4: Zornsches Lemma

Definition (17.18)

Sei $(X, \preceq)$ eine Menge mit einer Halbordnung. Eine Teilmenge $T \subseteq X$ heißt Kette in X, wenn sie nichtleer ist und jeweils zwei Elemente $x, y \in T$ miteinander vergleichbar sind. Dies ist äquivalent dazu, dass die Einschränkung der Relation $\preceq$ auf T eine Totalordnung ist.

Ein Element $s \in X$ heißt obere Schranke einer Teilmenge $T \subseteq X$, wenn $s \succeq t$ für alle $t \in T$ gilt. Ein Element $x \in X$ wird maximal genannt, wenn kein $y \in X$ mit $y \succeq x$ und $y \neq x$ existiert.

Satz (Zornsches Lemma)

Sei X eine nichtleere Menge und $\preceq$ eine Halbordnung auf X mit der Eigenschaft, dass jede Kette in X eine obere Schranke in X besitzt. Dann existiert in X ein maximales Element.

zum Beweis von Satz 17.4 (Fortsetzung)

Sei K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine Menge nicht-konstanter Polynome. Unser Ziel ist der Nachweis der Existenz eines Zerfällungskörpers von S über K.

- Mit Hilfe der Mengenlehre zeigt man, dass eine Menge $\Omega \supseteq K$ existiert, die so groß ist, dass für keine algebraische Erweiterung $L|K$ eine surjektive Abbildung $L \to \Omega$ existiert.
- Es sei nun $\mathcal{F}$ die Menge aller Erweiterungskörper $(L, +_L, \cdot_L)$ von K mit $L \subseteq \Omega$ und der Eigenschaft, dass L Zerfällungskörper einer Teilmenge $T \subseteq S$ ist.
- Wir definieren eine Relation $\preceq$ auf $\mathcal{F}$, indem wir fordern, dass genau dann $(L_1, +_{L_1}, \cdot_{L_1}) \preceq (L_2, +_{L_2}, \cdot_{L_2})$ erfüllt ist, wenn L_1 ein Teilkörper von L_2 ist.

- Man überprüft nun, dass $(\mathcal{F}, \preceq)$ die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt. Demnach existiert ein maximales Element $\tilde{L} \in \mathcal{F}$.

- Die Annahme, dass in S ein Polynom f existiert, die über dem Körper $\tilde{L}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt, führt man zu einem Widerspruch mit der Maximalität von $\tilde{L}$, indem man einen Erweiterungskörper L_1 mit $\tilde{L} \subsetneq L_1 \subseteq \Omega$ konstruiert, über den f in Linearfaktoren zerfällt.

Zerfällungskörper als algebraische Erweiterungen

Proposition (17.5)

Sei K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine beliebige Menge nicht-konstanter Polynome. Dann ist jeder Zerfällungskörper von S über K eine algebraische Erweiterung von K.

Definition des algebraischen Abschlusses

Definition (17.6)

Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ in K eine Nullstelle besitzt.

Definition (17.7)

Sei K ein Körper. Ein Erweiterungskörper L von K wird algebraischer Abschluss von K genannt, wenn $L|K$ algebraisch und L algebraisch abgeschlossen ist.

Charakterisierung des algebraischen Abschlusses

Proposition (17.8)

Für jede Erweiterung $L|K$ sind die folgende Aussagen äquivalent.

(i) Der Körper L ist ein algebraischer Abschluss von K.

(ii) Die Erweiterung $L|K$ ist algebraisch, und jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ zerfällt über L in Linearfaktoren.

(iii) Die Erweiterung $L|K$ ist minimal mit der Eigenschaft, dass jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ über L in Linearfaktoren zerfällt. Es gibt also abgesehen von L selbst keinen Zwischenkörper von $L|K$ mit dieser Eigenschaft.

Beweis von Prop. 17.8

geg.: Körpererweiterung K

z.zg.: Äquivalenz der drei Aussagen

(i) L ist alg. Abschluss von K

(ii) $L|K$ ist algebraisch, jedes $f \in K[x] \setminus K$ zerfällt in Linearfaktoren

(iii) Die Erw. $L|K$ ist minimal mit der Eigenschaft, dass jedes $f \in K[x] \setminus K$ über L in Linearfaktoren zerfällt.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" L alg. Abschluss von K $\Rightarrow$ $L|K$ ist alg.

L algebraisch abg. $\Rightarrow$ Jedes Pol aus $L[x]\setminus L$ zerfällt in Linearfaktoren, damit erst recht jedes Pol aus $K[x]\setminus K$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Zu zeigen ist die Minimalitätsaussage.

Sei L_1 ein Zwischenkörper von $L|K$ mit der Eigenschaft, dass jedes Pol aus $K[x]\setminus K$ über L_1 in Linearfaktoren zerfällt, d.h. $K \subseteq L_1 \subseteq L$. Zu zeigen ist $L_1 = L$, genügt: $L \subseteq L_1$

Sei $\alpha \in L$ und $f = \mu_{\alpha,K} \in K[x]\setminus K$. Vor. $\Rightarrow$ f zerfällt über L_1 in Linearfaktoren $\Rightarrow$ Alle Nullstellen von f in L liegen bereits in L_1. also: $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in L_1$

„(iii) ⇒ (i)" Unter der Vor von (iii) ist z.zg:

(1) $L|K$ ist algebraisch

(2) L ist algebraisch abgeschlossen

<u>zu (1)</u> Sei $N = \{\alpha \in L \mid \exists f \in K[x] \setminus K$ mit $f(\alpha) = 0\}$ und $L_1 = K(N)$

(ist Zwischenkörper von $L|K$).

Beh: Jedes $f \in K[x] \setminus K$ zerfällt schon über L_1 in Linearfaktoren. denn.

Sei $f \in K[x] \setminus K$. Vor. ⇒ f zerfällt über L in Linearfaktoren. Die Nullst. von f in L

liegen alle in N, also auch in L_1 $\Rightarrow$
f zerfällt über L_1 in Linearfaktoren
$L_1 \subseteq L$, Minimalitätsbed. $\Rightarrow L = L_1 = K(N)$
Da alle Elemente aus N algebraisch über K sind, ist $L = K(N)$ eine algebraische Erweiterung.

zu (2) Sei $f \in L[x] \setminus L$. z.zg.: f besitzt in L eine Nullstelle. Sei L_1 ein Zerfällungskörper von f über L. f zerfällt über L_1 in Linearfaktoren $\Rightarrow \exists$ Nullstelle α von f in L_1. $L|K$ und $L(\alpha)|L$ sind algebraische Erweiterungen $\Rightarrow L(\alpha)|K$ ist algebraisch $\Rightarrow \alpha$ ist algebraisch über K

Sei $g = \mu_{\alpha,K} \in K[x] \setminus K$. Vor. $\Rightarrow$ g zerfällt über L in Linearfaktoren, insb. sind alle Nullst. von g in L enthalten. $g(\alpha) \Rightarrow \alpha \in L$

Also hat f in L eine Nullstelle. $\square$

Charakterisierung des algebraischen Abschlusses

Folgerung (17.9)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $S_K \subseteq K[x]$ die Menge aller nicht-konstanten Polynome über K. Genau dann ist L ein algebraischer Abschluss von K, wenn L ein Zerfällungskörper von S_K ist.

- Wegen Satz 17.4 ergibt sich aus Folgerung 17.9, dass jeder Körper K einen algebraischen Abschluss besitzt.
- Ist K ein Körper und $\tilde{L}$ ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von K, dann ist

$$\tilde{K} \quad = \quad \{\alpha \in \tilde{L} \mid \alpha \text{ algebraisch über } K\}$$

der eindeutig bestimmte algebraische Abschluss von K in $\tilde{L}$.

Ein Fortsetzungssatz für Zerfällungskörper

Proposition (17.10)

Sei $L|K$ eine algebraische Erweiterung, $\tilde{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\phi : K \to \tilde{K}$ ein Homomorphismus von Körpern. Dann gibt es eine Fortsetzung ψ von ϕ auf den Körper L, also einen Homomorphismus $\psi : L \to \tilde{K}$ mit $\psi|_K = \phi$.

Beweis von Prop. 17.10:

Zeige die Aussage zunächst nur für endliche Erw.

ggg: $L|K$ endl. Erw., $\tilde{K}$ algebraisch abgeschlossen,

$\phi: K \to \tilde{K}$ Körperhom.

<u>Beh.</u>: ϕ kann auf L fortgesetzt werden, d.h.

es gibt einen Körperhom. $\psi: L \to \tilde{K}$ mit $\psi|_K = \phi$

vollst. Induktion über $n = [L:K] \in \mathbb{N}$

Ind.-Anf. $n=1 \Rightarrow L = K$, setze $\psi = \phi$

Ind.-Schritt $n \mapsto n+1$: Vor. $L|K$ ist eine Erweiterung

vom Grad $n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow K \subsetneq L$. Sei $\alpha \in L \setminus K$.

Sei $f = \mu_{\alpha,K} \in K[x]$ und $\tilde{f} = \phi(f) \in \tilde{K}[x]$

$\tilde{K}$ ist alg. abgeschlossen $\Rightarrow \exists$ Nullstelle $\tilde{\alpha} \in \tilde{K}$ von $\tilde{f}$

Fortsetzungssatz § 16 $\Rightarrow \exists$ Fortsetzung $\psi_1 : K(\alpha) \to \tilde{K}$

mit $\psi_1(\alpha) = \tilde{\alpha}$

$K(\alpha)$ ist Zwischenkörper von $L|K$ Gradformel

$\Rightarrow [L:K] = [L:K(\alpha)] \cdot [K(\alpha):K]$ $\alpha \notin K \Rightarrow [K(\alpha):K] > 1$

$\Rightarrow [L:K(\alpha)] = \dfrac{[L:K]}{[K(\alpha):K]} < [L:K] = n+1 \Rightarrow [L:K(\alpha)] \leq n$

Ind-V., angewendet auf $\psi_1 \Rightarrow \exists$ Fortsetzung $\psi : L \to \tilde{K}$ von ψ_1

Wegen $\psi|_K = (\psi|_{K(\alpha)})|_K = \psi_1|_K = \phi$ ist ψ eine Fortsetzung von ϕ.

g:

schon

enn.

llt über

on f in L

Der Beweis im unendlichen Fall läuft wieder über das Zornsche Lemma. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{\psi : L_1 \to \tilde{K} \mid L_1 \text{ Zwischenkörper von } L|K,\ \psi \text{ Fortsetzung von } \phi\}$$

Definiere auf $\mathcal{F}$ die Relation $\leq$ durch

$\psi_1 \leq \psi_2 \Leftrightarrow \psi_2|_{L_1} = \psi_1$, falls

$\psi_1 : L_1 \to \tilde{K}$, $\psi_2 : L_2 \to \tilde{K}$

Überprüfe: $(\mathcal{F}, \leq)$ erfüllt die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas $\Rightarrow \exists$ max. Elt.

$\tilde{\psi} : \tilde{L} \to \tilde{K} \in \mathcal{F}$ Führe die Ann. $\tilde{L} \subsetneq L$ zum Widerspruch. $\square$