§ 7. Gruppenoperationen und Klassengleichung

Definition (7.1)

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Gruppenoperation von G auf X ist eine Abbildung $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ mit den Eigenschaften

$$\alpha(e_G, x) = x \qquad \text{und} \qquad \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$$

für alle $g, h \in G$ und $x \in X$, wobei e_G das Neutralelement der Gruppe bezeichnet.

An Stelle von $\alpha(g, x)$ verwendet man häufig auch die Infix-Schreibweise $g \cdot x$, wobei dann $\cdot$ das Symbol für die Gruppenoperation ist.

Die Bahnen einer Gruppenoperation

Definition (7.2)

Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ eine Gruppenoperation.

(i) Für jedes $x \in X$ nennt man $G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ die Bahn von x.

(ii) Gibt es ein $x \in X$ mit $G(x) = X$, dann ist die Gruppenoperation transitiv.

(iii) Die Elemente $x \in X$ mit $G(x) = \{x\}$ heißen Fixpunkte der Gruppenoperation.

(iv) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ wird als G-invariant bezeichnet, wenn für alle $g \in G$ und $y \in Y$ auch $g \cdot y \in Y$ gilt.

Zerlegung einer Menge in Bahnen

Proposition (7.3)

Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ eine Gruppenoperation. Dann gilt

(i) Die Menge $\mathcal{B} = \{G(x) \mid x \in X\}$ der Bahnen ist eine Zerlegung von X.

(ii) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist genau dann G-invariant, wenn Y eine Vereinigung von Bahnen der Operation ist.

Beweis von Prop. 7.3 geg. Gruppenop $\bullet : G \times X \to X$

zu (i) Die Bahnen bilden eine Zerlegung von X

Sei $\mathbb{B}$ die Menge der Bahnen der Operation, d.h.

$\mathbb{B} = \{ G(x) \mid x \in X \}$, wobei jeweils $G(x) = \{ g \bullet x \mid g \in G \}$

zu überprüfen: (i) $B \neq \emptyset \ \forall B \in \mathbb{B}$

(ii) $\forall x \in X \ \exists B \in \mathbb{B}$ mit $x \in B$

(iii) $\forall B, C \in \mathbb{B} : B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow B = C$

zu (i) Sei $B \in \mathbb{B}$.

Dann gilt $B = G(x)$ für ein $x \in X$. $x = e \bullet x \in G(x)$

$\Rightarrow x \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$

zu (ii) Sei $x \in X$. Setze $B = G(x)$. Dann ist $B \in \mathbb{B}$ und $x \in B$.

zu (iii) Zeige zuerst: Ist $B \in \mathcal{B}$ und $x \in B$, dann gilt $B = G(x)$

$B \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists z \in X$ mit $B = G(z)$. z.zg.: $G(z) = G(x)$

„$\subseteq$" $x \in G(z) \Rightarrow \exists g_0 \in G$ mit $x = g_0 \cdot z$

Sei nun $y \in G(z)$, z.zg.: $y \in G(x)$ $\quad y \in G(z) \Rightarrow$

$\exists g \in G$ mit $y = g \cdot z$ außerdem: $x = g_0 \cdot z \Rightarrow$

$g_0^{-1} \cdot x = g_0^{-1} \cdot (g_0 \cdot z) = (g_0^{-1} g_0) \cdot z = e \cdot z = z$

einsetzen $\Rightarrow y = g \cdot z = g \cdot (g_0^{-1} \cdot x) = (g g_0)^{-1} \cdot x \in G(x)$

„$\supseteq$" Sei $y \in G(x)$, z.zg.: $y \in G(z) \Rightarrow \exists h \in G$ mit $y = h \cdot x$

$\overset{s.o.}{\Longrightarrow} y = h \cdot (g_0 \cdot z) = (h g_0) \cdot z \in G(z)$

Seien nun $B, C \in \mathcal{B}$ mit $B \cap C \neq \emptyset$. Sei $x \in B \cap C$.

s.o. $\Rightarrow B = G(x) = C$.

Beispiel für eine Bahnzerlegung

Sei U die Untergruppe von S_7 erzeugt durch $\sigma = (12)(35)(467) \Rightarrow \operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}(2,2,3) = 6 \Rightarrow |U| = |\langle \sigma \rangle| = 6$, $U = \{id, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^5\}$. Betrachte die Operation von U auf $M_7 = \{1, 2, \dots, 7\}$ geg. durch $(\sigma, k) \mapsto \sigma(k)$.

Bestimme die Bahnen dieser Operation.

$U(1) = \{\sigma^0(1), \sigma^1(1), \sigma^2(1), \dots, \sigma^5(1)\}$

$= \{1, 2, 1, 2, 1, 2\} = \{1, 2\} = U(2)$

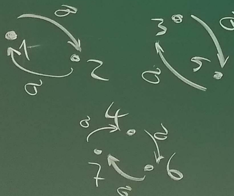
$U(3) = \{\sigma^0(3), \dots, \sigma^5(3)\} = \{3, 5\} = U(5)$

$U(4) = \{\sigma^0(4), \dots, \sigma^5(4)\} = \{4, 6, 7, 4, 6, 7\}$

$= \{4, 6, 7\} = U(6) = U(7)$

Menge der Bahnen insgesamt:

$B = \{\{1,2\}, \{3,5\}, \{4,6,7\}\}$



Man

(ii)

Der Stabilisator eines Elements

Satz (7.4)

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und $x \in X$. Dann ist die Teilmenge $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ eine Untergruppe von G. Man nennt sie den Stabilisator von x.

Beweis von Satz 7.4

geg. eine Gruppenoperation $\circ : G \times X \to X$

Sei $x \in X$. z.zg.: $G_x = \{g \in G \mid g \circ x = x\}$

ist eine Untergruppe von G.

zu überprüfen: (i) $e \in G_x$ (ii) $\forall g, h \in G_x : gh, g^{-1} \in G_x$

zu (i) $e \circ x = x \Rightarrow e \in G_x$

zu (ii) Seien $g, h \in G_x \Rightarrow g \circ x = x,\ h \circ x = x$

$\Rightarrow (gh) \circ x = g \circ (h \circ x) = g \circ x = x$

$\Rightarrow gh \in G_x$ außerdem:

$g^{-1} \circ x = g^{-1} \circ (g \circ x) = (g^{-1} g) \circ x = e \circ x = x$

$\Rightarrow g^{-1} \in G_x$ $\square$

Bsp:

(i) Betrachte die Operation von S_4 auf M_4.

Stabilisator von 3:

$$(S_4)_3 = \{ id, (12), (14), (24), (124), (142) \}$$

$$(S_4)_2 = \{ id, (13), (14), (34), (134), (143) \}$$

$$(S_4)_1 = \{ id, (23), (24), (34), (234), (243) \}$$

$$(S_4)_4 = \{ id, (12), (13), (23), (132), (132) \}$$

Man kann zeigen, dass alle vier Gruppen zu S_3 isomorph sind.

(ii) Im Beispiel von oben (Operation von U auf M_7) gilt $U_1 = U_2 = \langle d^2 \rangle = U_3 = U_5$,

$U_4 = U_6 = U_7 = \langle d^3 \rangle$

Stabilisatoren in der symmetrischen Gruppe

Proposition (7.5)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wie wir bereits festgestellt haben, existiert eine natürliche Gruppenoperation der symmetrischen Gruppe S_n auf der Menge M_n. Der Stabilisator $(S_n)_n$ ist eine zu S_{n-1} isomorphe Untergruppe von S_n.

Ebenso kann man zeigen, dass der Stabilisator $(S_n)_k$ für $1 \leq k < n$ isomorph zu S_{n-1} ist. Insgesamt sind in S_n also n zu S_{n-1} isomorphe Untergruppen enthalten.

Bahnlänge und Ordnung des Stabilsators

Satz (7.6)

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und sei $x \in X$. Dann gibt es eine Bijektion

$$\phi_x : G/G_x \to G(x)$$

mit $\phi_x(gG_x) = g \cdot x$ für alle $g \in G$. Ist insbesondere X endlich, dann ist auch der Index $(G : G_x)$ endlich, und es gilt $(G : G_x) = |G(x)|$.

Beweis von Satz 7.6:

Sei $\cdot : G \times X \to X$ die Gruppenoperation und $x \in X$.

zu zeigen: Es gibt eine Bijektion $\phi_x : G/_{G_x} \to G(x)$ mit $\phi_x(gG_x) = g \cdot x \quad \forall g \in G$.

Sei $R \subseteq G$ ein Repräsentantensystem von G/G_x

Für jedes $A \in G/G_x$ definiere $\phi_x(A) = g_0 \cdot x$, wobei g_0 den Repräsentanten von A in R bezeichnet.

zu überprüfen: Ist $A = gG_x$, dann gilt $\phi_x(A) = g \cdot x$.

Setze also $A = g \cdot G_x$ voraus, wobei $g \in G$ ist. Nach Def von $\phi_x(A)$ muss $g \cdot x = g_0 \cdot x$ gezeigt werden.

Es gilt $gG_x = A = g_0 G_x \Rightarrow g \in g_0 G_x \Rightarrow \exists h \in G_x$

mit $g = g_0 h \Rightarrow g \circ x = (g_0 h) \circ x = g_0 \circ (h \circ x) \underset{h \in G_x}{=} g_0 \circ x$

Damit ist die Existenz von ϕ_x als Abb. gezeigt.

Noch z.z.g.: $\phi_x : G/G_x \to G(x)$ ist eine Bijektion.

(1) Injektivität: Seien $g, g' \in G$ mit $\phi_x(gG_x) = \phi_x(g'G_x)$

z.z.g. $gG_x = g'G_x$ $\quad \phi_x(gG_x) = \phi(g'G_x) \Rightarrow g \circ x = g' \circ x$

$\Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ x) = g^{-1} \circ (g' \circ x) \Rightarrow (g^{-1}g) \circ x = (g^{-1}g') \circ x$

$\Rightarrow e \circ x = (g^{-1}g') \circ x \Rightarrow x = (g^{-1}g') \circ x \Rightarrow g^{-1} \cdot g' \in G_x$

$\Rightarrow g' \in gG_x \Rightarrow g'G_x = gG_x$

(2) Surjektivität: Sei $y \in G(x) \rightarrow \exists g \in G$ mit $y = g \circ x$

$\Rightarrow \phi_x(gG_x) = g \circ x = y$ $\square$

Beispiele für Gruppenoperationen

Definition (7.7)

Sei G eine Gruppe und $\mathcal{U}$ die Menge ihrer Untergruppen.

(i) Die Operation von G auf der Menge ihrer Elemente gegeben durch $g \cdot h = gh$ bezeichnet man als Operation durch Linkstranslation.

(ii) Die Operation von G auf der Menge ihrer Elemente gegeben durch $g \cdot h = ghg^{-1}$ wird Operation durch Konjugation genannt.

(iii) Die Operation von G auf $\mathcal{U}$ gegeben durch $g \cdot U = gUg^{-1}$ wird ebenfalls als Operation durch Konjugation bezeichnet.

Nachweis, dass die Operation durch Konjugation eine Gruppenop. ist:

Def. der Operation: $g \circ h = g h g^{-1}$

Seien $g_1, g_2 \in G$ und $h \in G$. zu überprüfen

(1) $e \circ h = h$ (2) $g_1 \circ (g_2 \circ h) = (g_1 g_2) \circ h$

zu (1) $e \circ h = e h e^{-1} = e h e = h$

zu (2) $g_1 \circ (g_2 \circ h) = g_1 \circ (g_2 h g_2^{-1}) =$

$g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) \circ h$

Gruppenoperationen und Homomorphismen nach $\mathrm{Per}(X)$

Satz (7.8)

Sei G eine Gruppe und X eine Menge.

(i) Ist $\alpha : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation, dann kann jedem $g \in G$ durch $\tau_g(x) = \alpha(g, x)$ ein Element aus $\mathrm{Per}(X)$ zugeordnet werden. Die Abbildung $G \to \mathrm{Per}(X)$, $g \mapsto \tau_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) Sei umgekehrt $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist durch $\alpha : G \times X \to X$ mit $\alpha(g, x) = \phi(g)(x)$ eine Gruppenoperation gegeben.

Beweis von Satz 7.8 geg.: Gruppe G, Menge X

zu (i) Sei $\alpha: G \times X \to X$ eine Gruppenop. zu überprüfen:

(1) $\forall g \in G: \tau_g: X \to X,\ x \mapsto \alpha(g,x)$ ist eine Bijektion

(2) $\phi: G \to \mathrm{Per}(X),\ g \mapsto \tau_g$ ist ein Homomorphismus

zu (1) Sei $g \in G$ genügt z.zg.: $\tau_{g^{-1}}$ ist Umkehrabb. von τ_g

Sei $x \in X$. $(\tau_{g^{-1}} \circ \tau_g)(x) = \tau_{g^{-1}}(\tau_g(x)) = \tau_{g^{-1}}(\alpha(g,x))$

$= \alpha(g^{-1}, \alpha(g,x)) = \alpha(g^{-1}g, x) = \alpha(e,x) = x$

überprüfe genauso: $(\tau_g \circ \tau_{g^{-1}})(x) = x$

zu (2) Seien $g, h \in G$. z.zg. $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$, gleichbed.: $\tau_{gh} = \tau_g \circ \tau_h$ Sei $x \in X$. $\Rightarrow \tau_{gh}(x) = \alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h,x)) = \alpha(g, \tau_h(x)) = \tau_g(\tau_h(x)) = (\tau_g \circ \tau_h)(x)$

zu (ii) Sei $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$ ein Gruppenhom.

z.zg.: $\alpha : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \phi(g)(x)$

ist eine Gruppenop. Seien $g, h \in G$, $x \in X$.

überprüfe: (1) $\alpha(e, x) = x$

(2) $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$

zu (1) $\alpha(e, x) = \phi(e)(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$

zu (2) $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(g, \phi(h)(x)) =$

$\phi(g)\big(\phi(h)(x)\big) = (\phi(g) \circ \phi(h))(x) =$

$\phi(gh)(x) = \alpha(gh, x)$ $\square$

Der Satz von Cayley

Satz (7.9)

Sei G eine Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen Monomorphismus $G \to S_n$. Mit anderen Worten, G ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

wichtiges Nebenergebnis des Beweises:

Operiert eine Gruppe G auf einer n-elementigen Mengen ($n \in \mathbb{N}$), dann liefert diese Operation auf natürliche Weise einen Homomorphismus $G \to S_n$.

Beweis des Satzes von Cayley.

geg.: $n \in \mathbb{N}$, G Gruppe mit $n = |G|$

z.zg.: Es gibt einen Monomorphismus $G \to S_n$.

Satz 7.8, angewendet auf die Operation durch Linkstranslation, liefert einen Hom.

$\phi : G \to \mathrm{Per}(G)$, geg. durch $\phi(g)(h) = g \circ h = gh \ \forall g, h \in G$. Dieser Hom. injektiv, denn: Sei $g \in \ker(\phi) \Rightarrow \phi(g) = id_G$

$\Rightarrow \phi(g)(e) = id_G(e) \Rightarrow ge = e \Rightarrow g = e$

($\Rightarrow$ Injektivität) Wegen $|G| = n$ existiert eine Bijektion $G \to M_n$ und damit ein Isomorphismus

$\iota: \mathrm{Per}(G) \to \mathrm{Per}(M_n) = S_n$

$\Rightarrow \psi = \iota \circ \phi$ ein Monomorphismus $G \to S_n$.

$\square$

Anwendung auf die Platonischen Körper

- Die Operation der Tetraedergruppe $\mathbb{T}$ auf der 4-elementigen Menge der Ecken des Tetraeders definiert einen Homomorphismus $\phi : \mathbb{T} \to S_4$. Ein Element der Tetraedergruppe, das alle Ecken festhält, muss mit $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ übereinstimmen. Somit ist der Homomorphismus injektiv.
- Die Gruppe $\mathbb{T}^+$ enthält genau 12 Elemente. Neben $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ sind dies 8 Drehungen (um 120° und 240°) um Achsen durch eine Ecke und eine gegenüberliegende Seite sowie 3 Drehungen (um 180°) um Achsen durch die Mitten gegenüberliegender Kanten.
- Der Homomorphiesatz, angewendet auf die Determinantenabbildung, liefert einen Isomorphismus $\mathbb{T}/\mathbb{T}^+ \cong \{\pm 1\}$. Es gilt also $(\mathbb{T} : \mathbb{T}^+) = 2$ und $|\mathbb{T}| = 2 \cdot |\mathbb{T}^+| = 2 \cdot 12 = 24$. Also ist $\mathbb{T}$ isomorph zu einer 24-elementigen Untergruppe von S_4, und wegen $|S_4| = 24$ folgt daraus $\mathbb{T} \cong S_4$.

Anwendung auf die Platonischen Körper (Forts.)

- Identifiziert man die Ecken des Tetraeders mit $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, dann entsprechen die Elemente von $\mathbb{T}^+$ neben id den 3-Zykeln und den Doppeltranspositionen in S_4. Damit erhält man $\mathbb{T}^+ \cong A_4$.
- Die orientierungserhaltende Symmetriegruppe $\mathbb{W}^+$ des Würfels operiert auf der vierelementigen Menge der Diagonalen, die je zwei gegenüberliegende Ecken des Würfels verbinden. Dadurch erhält man einen Homomorphismus $\psi : \mathbb{W}^+ \to S_4$.
- Eine Drehung, die alle Diagonalen festhält, stimmt mit $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ überein; deshalb ist ψ injektiv. Die Gruppe $\mathbb{W}^+$ besteht aus 24 Elementen. Neben $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ sind dies 8 Drehungen um diese Diagonalen, 6 Drehungen um Achsen durch die Mitten gegenüberliegender Kanten, und 9 Drehungen um Achsen gegenüberliegender Seiten. Daraus kann wie beim Tetraeder geschlossen werden, dass $\mathbb{W}^+$ isomorph zu S_4 ist.

Anwendung auf die Platonischen Körper (Forts.)

- Die volle Symmetriegruppe $\mathbb{W}$ ist ein inneres direktes Produkt von $\mathbb{W}^+$ und der zweielementigen Gruppe erzeugt von der Punktspiegelung am Koordinatenursprung, gegeben durch das Negative $-E_3$ der Einheitsmatrix. Daraus ergibt sich ein Isomorphismus $\mathbb{W} \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Der Ikosaeder enthält fünf verschiedene zueinander kongruente regelmäßige Oktaeder, deren Ecken mit Ecken des Ikosaders übereinstimmen. Die Gruppe des Ikosaeders operiert auf diesen Oktaedern. Dies liefert einen Homomorphismus der orientierungserhaltenden Ikosaedergruppe $\mathbb{I}^+$ nach S_5.

Anwendung auf die Platonischen Körper (Forts.)

- Die Gruppe $\mathbb{I}^+$ besteht aus 60 Elementen, und anhand der Klassengleichung (siehe unten) kann man zeigen, dass $\mathbb{I}^+$ eine einfache Gruppe ist. Daraus kann gefolgert werden, dass φ injektiv ist und das Bild mit der alternierenden Gruppe A_5 übereinstimmt. Es gilt also $\mathbb{I}^+ \cong A_5$.
- Wie beim Würfel zeigt man, dass für die volle Symmetriegruppe $\mathbb{I} \cong A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt.