Überblick § 4: Homomorphismen und Faktorgruppen

- Definition der Gruppenhomomorphismen
- Struktur der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ für eine zyklische Gruppe G
- Definition der Normalteiler ($N \trianglelefteq G$)
- Komplexprodukte von Untergruppen ($NU = \{nu \mid n \in N\ ,\ \ u \in U\}$), innere direkte Produkte
- Definition der Faktorgruppe G/N ($N \trianglelefteq G$)
- Homomorphiesatz $G/N \cong H$, falls $\phi : G \to H$ Epimorphismus und $N = \ker(\phi)$, Isomorphiesätze als Folgerung
- Korrespondenzsatz (Untergruppenstruktur von G/N vs. Untergruppenstruktur von G)

Innere direkte Produkte

Definition (4.23)

Sei G eine Gruppe, und seien U, N Untergruppen von G. Wir bezeichnen G als inneres direktes Produkt von U und N, wenn gilt

- $U \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq G$,
- $G = UN$ und
- $U \cap N = \{e\}$.

Ist lediglich N eine Normalteiler von G, aber nicht notwendigerweise die Untergruppe U, dann spricht man von einem inneren semidirekten Produkt.

Proposition (4.24)

Sei G eine Gruppe und inneres direktes Produkt ihrer Untergruppen U und N. Dann gilt $G \cong U \times N$.

Beweis von Prop 4.24:

Vor.: G ist Gruppe, inneres direktes Produkt von U und N, d.h. $U \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq G$, $G = UN$ und $U \cap N = \{e\}$. z.zg.: $G \cong U \times N$

Beh.: $\phi : U \times N \to G$, $(u, n) \mapsto un$ ist ein Isomorphismus von Gruppen

Nach Lemma 4.20 (i) hat jedes Element aus $G = UN$ eine eindeutige Darstellung der Form un mit $u \in U$, $n \in N$.
Also ist ϕ bijektiv. noch z.zg.: ϕ ist Homomorphismus.

Seien $(u,n), (u',n') \in U \times N$. zu überprüfen:

$\phi((u,n)\cdot(u',n')) = \phi(u,n)\cdot\phi(u',n')$ gleichbedeutend:

$\phi(uu', nn') = \phi(u,n)\,\phi(u',n') \iff uu'nn' = unu'n'$

$\iff u'nn' = nu'n' \iff u'n = nu' \iff u'n(u')^{-1}n^{-1} \overset{!}{=} e$

$N \trianglelefteq G \Rightarrow u'n(u')^{-1} \in N \Rightarrow u'n(u')^{-1}n^{-1} \in N$

$U \trianglelefteq G \Rightarrow n(u')^{-1}n^{-1} \in U \Rightarrow u'n(u')^{-1}n^{-1} \in U$

$\Rightarrow u'n(u')^{-1}n^{-1} \in N \cap U \overset{N\cap U = \{e\}}{\Longrightarrow} u'n(u')^{-1}n^{-1} = e$ $\square$

Wiederholung: Induzierte Abbildungen

Satz (4.25)

Seien X und Y Mengen und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf X.

(i) Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $x, x' \in X$ aus $x \equiv x'$ jeweils $f(x) = f(x')$ gilt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{f} : X/{\equiv} \to Y$ mit $\bar{f}([x]) = f(x)$ für alle $x \in X$.

(ii) Ist $g : X \times X \to Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alls $x, x' \in X$ und $y, y' \in X$ aus $x \equiv x'$ und $y \equiv y'$ jeweils $g(x, y) = g(x', y')$ folgt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{g} : (X/{\equiv}) \times (X/{\equiv}) \to Y$ mit $\bar{g}([x], [y]) = g(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Man nennt $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ die durch f bzw. g induzierte Abbildung.

Eine Verknüpfung auf den Linksnebenklassen

Proposition (4.26)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann gibt es auf der Menge G/N eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $\cdot$ mit der Eigenschaft

$$(gN) \cdot (hN) \quad = \quad (gh)N \qquad \text{für alle} \quad g, h \in G.$$

Satz (4.27)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler. Dann ist die Menge G/N der Linksnebenklassen mit der Verknüpfung $gN \cdot hN = (gh)N$ eine Gruppe, die sogenannte Faktorgruppe von G modulo N. Die Abbildung $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein Epimorphismus von Gruppen, der sog. kanonische Epimorphismus.

wichtiges Beispiel: die Faktorgruppen $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Beweis von Prop. 4.26:

geg.: Gruppe G, $N \trianglelefteq G$

<u>Beh.</u>: Es gibt eine Verknüpfung $\bullet$ auf $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ mit der Eigenschaft $\forall g, h \in G: (gN) \bullet (hN) = ghN$

<u>Ansatz</u>: Wende Satz 4.25 (ii) an auf $X = G$, $Y = G/N$ und die Relation $\equiv_l$ auf G geg. durch $g \equiv_l h \Leftrightarrow h \in gN$

(Erinnerung: Für jedes $g \in G$ ist gN

die Äquivalenzklasse von g bzgl. $\equiv_l$.

Wende Satz 4.25 (ii) an auf die Abb.

$$\phi: G \times G \to G/N, \ (g,h) \mapsto (gh)N$$

Zu überprüfen: Sind $g, g', h, h' \in G$ mit $g \equiv_l g'$ und $h \equiv_l h'$, dann folgt $\phi(g,h) \overset{(*)}{=} \phi(g',h')$. Seien also g, h, g', h' Elemente aus G, die die Vor. erfüllen.

z.zg.: $(*)$, gleichbed.: $(gh)N = (g'h')N$

genügt: $g'h' \in ghN$

$g \equiv_l g' \Rightarrow g' \in gN \quad h \equiv_l h' \Rightarrow h' \in hN$

d

(

=

f

en -

ghN

auf

ation

$\Rightarrow h \in gN$

gN

$\Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \in N$ mit $g' = g n_1,\ h' = h n_2$

z. zg. also $g n_1 h n_2 \in ghN$

$N \trianglelefteq G$, $n_1 h \in Nh \Rightarrow n_1 h \in hN \rightarrow$

$\exists\, n_3 \in N$ mit $n_1 \cdot h = h n_3 \Rightarrow g n_1 h n_2 = g h n_3 n_2$

Dieses Element ist offenbar in ghN enthalten.

Auf Grund des Satzes existiert also eine

Abb. $\overline{\Phi} : G/N \times G/N \rightarrow G/N$ mit

$\overline{\Phi}(gN, hN) = \phi(g, h)\ \forall g, h \in G$

Definiere wir nun eine Verknüpfung $\circ$ auf

G/N durch $(gN) \circ (hN) = \overline{\Phi}(gN, hN)$.

dann folgt $\forall g, h \in G$:

$$(gN) \cdot (hN) = \Phi(gN, hN) = \phi(g, h)$$

$$= (gh)N, \text{ wie gewünscht.} \qquad \square$$

Beweis von Satz 4.27: Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$.

z.zg.: (i) G/N bildet mit der Verknüpfung aus Prop. 4.26 eine Gruppe

(ii) $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein Epimorphism.

zu (i) (1) Assoziativität: Seien $g, h, k \in G$. Dann gilt

$$((gN)\cdot(hN))\cdot(kN) = ((gh)N)\cdot(kN) = ((gh)k)N = (g(hk))N = (gN)\cdot((hk)N)$$

$$= (gN)\cdot((hN)\cdot(kN))$$

(2) Für jedes $g \in G$ gilt $(gN)\cdot N = (gN)\cdot(eN) = (ge)N = gN$ ebenso: $N\cdot(gN) = gN$

Also ist N ein Neutralelement in der Halbgruppe $(G/N, \cdot)$
(Definiere also $e_{G/N} = N$.)

(3) Für jedes $g \in G$ gilt $(gN) \cdot (g^{-1}N) = (gg^{-1})N =$
$eN = N = e_{G/N}$, ebenso $(g^{-1}N) \cdot (gN) = e_{G/N}$.
Also ist gN im Monoid $(G/N, \cdot)$ invertierbar, und das
Inverse ist geg. durch $(gN)^{-1} = g^{-1}N$.

zu (iii) Surjektivität: Sei $\bar{g} \in G/N$. Nach Def von G/N
gilt $\bar{g} = gN$ für ein $g \in G$. $\Rightarrow \pi_N(g) = gN = \bar{g}$.
Homomorphismus-Eig.: Seien $g, h \in G$. Dann gilt
$\pi_N(gh) = (gh)N = gN \cdot hN = \pi_N(g) \cdot \pi_N(h)$ $\square$

Beispiel für eine Faktorgruppe

$G = S_3 = \{ id, (12), (13), (23), (123), (132) \}$

$N = \langle (123) \rangle = \{ id, (123), (132) \}$

$(G : N) = \frac{|G|}{|N|} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow N \trianglelefteq G$

Es gilt $|G/N| = (G : N) = 2$.

Wegen $(12) \notin N$ gilt $(12)N \neq N$.

Es gilt also $G/N = \{ N, (12)N \} =$

$\{ \{ id, (123), (132) \}, \{ (12), (23), (13) \} \}$

Verknüpfungstabelle:

$\circ$	N	$(12)N$
N	N	$(12)N$
$(12)N$	$(12)N$	N

$$(12)N \circ (12)N = ((12)\circ(12))N = \mathrm{id}\,N \underset{\mathrm{id}\in N}{=} N$$

$$N \circ N = \mathrm{id}\,N \circ \mathrm{id}\,N = (\mathrm{id}\circ\mathrm{id})N = \mathrm{id}\,N = N$$

$$N \circ (12)N = \mathrm{id}\,N \circ (12)N = (\mathrm{id}\circ(12))N = (12)N$$

Wegen $N = (123)N$ und $(12)N = (23)N$ kann die Verknüpfungstabelle auch folgendermaßen angegeben werden:

$\circ$	$(123)N$	$(23)N$
$(123)N$	$(123)N$	$(23)N$
$(23)N$	$(23)N$	$(123)N$

$$(123)N \circ (23)N = ((123)\circ(23))N = (12)N = (23)N$$

$(23)\in(12)N$

Der induzierte Homomorphismus

Proposition (4.28)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq \ker(\phi)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{\phi} : G/N \to H$ mit

$$\bar{\phi}(gN) \quad = \quad \phi(g) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Man nennt $\bar{\phi}$ den durch ϕ induzierten Homomorphismus.

Beweis von Prop. 4.28:

geg.: Gruppenhom. $\phi : G \to H$,

$N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq \ker(\phi)$

z.zg.: Es gibt einen Hom. $\Phi : G/N \to H$

mit $\Phi(gN) = \phi(g)$ $\forall g \in G$.

Wende Satz 4.25(i) an auf die Abb. ϕ, und die Äquivalenzrelation $\equiv_l$ auf G geg. durch $g \equiv_l h \iff h \in gN$ für alle $g, h \in G$.

zu überprüfen: Sind $g, h \in G$ mit

$g \equiv_\ell h$, dann folgt $\phi(g) = \phi(h)$.

Seien also g, h mit dieser Eig. vorgeg.

$g \equiv_\ell h \Rightarrow h \in gN \Rightarrow \exists n \in N : h = gn$

$n \in N$, $N \subseteq \ker(\phi) \Rightarrow n \in \ker(\phi) \Rightarrow$

$\phi(n) = e_H \Rightarrow \phi(h) = \phi(gn) = \phi(g)\,\phi(n)$

$= \phi(g) \cdot e_H = \phi(g)$

Auf Grund des Satzes gibt es eine Abbildung

$\overline{\Phi} : G/N \to H$ mit $\overline{\Phi}(gN) = \phi(g)\ \forall g \in G$.

noch zu überprüfen: $\overline{\Phi}$ ist ein Gruppenhom.

Seien $gN, hN \in G/N$ (mit $g, h \in G$).

Dann gilt $\overline{\Phi}((gN)(hN)) = \overline{\Phi}((gh)N)$

Be

Sei

und

indu

Bew.

Dass

(i) Su

mu

(ii) Inje

Se

$$= \phi(gh) = \phi(g)\,\phi(h) = \bar{\phi}(gN)\cdot\bar{\phi}(hN)$$

$\square$

Der Homomorphiesatz für Gruppen

Satz (4.29)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann induziert ϕ einen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : G/\mathrm{ker}(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\phi).$$

Ist der Homomorphismus ϕ surjektiv, dann erhält man also einen Isomorphismus $G/\mathrm{ker}(\phi) \cong H$.

Beweis des Homomorphiesatzes:

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhom. Sei $N = \ker(\phi)$ und $\overline{\Phi} : G/N \to H$ der durch Prop 4.28 geg. induzierte Hom., d.h. $\overline{\Phi}(gN) = \phi(g) \ \forall g \in G$.

<u>Beh.</u> $\overline{\Phi}$ ist ein Isomorphismus zwischen G/N und $\operatorname{im}(\phi)$

Dass $\overline{\Phi}$ ein Hom ist, ist bereits bekannt.

(i) Surjektivität: Sei $h \in \operatorname{im}(\phi) \Rightarrow \exists g \in G$ mit $\phi(g) = h \Rightarrow \overline{\Phi}(gN) = \phi(g) = h$

(ii) Injektivität: zeige $\ker(\overline{\Phi}) \subseteq \{e_{G/N}\}$

Sei $gN \in \ker(\overline{\Phi})$, mit $g \in G$.

$\Rightarrow \Phi(gN) = e_H \Rightarrow \phi(g) = e_H \Rightarrow g \in \ker(\phi)$

$\Rightarrow g \in N \Rightarrow gN = N = e_{G/N}$. $\square$

Anwendungen des Homomorphiesatzes

(1) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann gilt $S_n/A_n \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$.

denn: Betrachte die Abb. $\phi : S_n \to \{\pm 1\}$, $\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$

bekannt: $\forall \sigma, \tau \in S_n$: $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ $\Rightarrow$

ϕ ist ein Hom. außerdem: $\ker(\phi) = A_n$, denn für alle

$\sigma \in S_n$ gilt $\sigma \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$

$\Leftrightarrow \sigma \in A_n$. Außerdem ist ϕ surjektiv, wegen $\phi(\mathrm{id})$

$= \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = +1$, $\phi((12)) = -1$. Also liefert der

Hom.-satz den angeg. Isomorphismus.