Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
15.02.2025

Algebra und Zahlentheorie I

(Lehramt Gymnasium, neue Studienordnung)

Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____

Aufgabe 1. (6+2+2 Punkte)

Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung 36, $g \in G$ ein Element mit $G = \langle g \rangle$, und es seien U, V die Untergruppen von G definiert durch $U = \langle g^4 \rangle$ und $V = \langle g^9 \rangle$.

(a) Begründen Sie, dass U und V Normalteiler von G sind, und bestimmen Sie die Ordnungen von U, V, G/U und G/V.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements g^2U der Faktorgruppe G/U.

(c) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements g^7V der Faktorgruppe G/V.

Bitte begründen Sie jeweils Ihre Ergebnisse.

Name: ____________________

Aufgabe 2. (2+3+5 Punkte)

Sei G eine abelsche Gruppe, und sei $\phi : G\times G \to G$ die Abbildung definiert durch $\phi(g,h) = g^{-1}h$ für alle $(g,h) \in G \times G$.

(a) Zeigen Sie, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Weisen Sie nach, dass ϕ surjektiv ist.

(c) Sei $D = \{(g,g) \mid g \in G\}$. Zeigen Sie, dass D ein Normalteiler von $G \times G$ ist, und dass ein Isomorphismus $(G \times G)/D \cong G$ von Gruppen existiert.

Name: ____

Aufgabe 3. (4+3+3 Punkte)

(a) Geben Sie ein $r \in \mathbb{N}$ und Gruppen $G_1, ..., G_r$ an, so dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 36 zu genau einer dieser Gruppen G_j mit $1 \leq j \leq r$ isomorph ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(b) Begründen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nicht zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ isomorph ist.

(c) Wie in der Vorlesung bezeichnet S_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ die symmetrische Gruppe mit der Ordnung $n!$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ sei D_n die $2n$-elementige Diedergruppe. Zeigen Sie, dass $S_3 \times S_3$ und $D_9 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht abelsche, nicht zueinander isomorphe Gruppen der Ordnung 36 sind.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (4+3+3 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2028. (Es ist $2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13^2$.)

(a) Beweisen Sie mit Hilfe der Sylowsätze, dass G einen abelschen Normalteiler N der Ordnung 169 besitzt.

(b) Zeigen Sie: Besitzt die Faktorgruppe G/N einen Normalteiler der Ordnung 3 oder 4, dann ist G auflösbar.

(c) Setzen wir nun voraus, dass G/N keinen Normalteiler der Ordnung 3 besitzt. Zeigen Sie, dass es in G/N dann genau 8 Elemente der Ordnung 3 gibt.

Name: ____

Aufgabe 5. (4+4+2 Punkte)

Sei $R = \left\{ \frac{a}{15^n} \mid a \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

(a) Überprüfen Sie, dass R ein Teilring von $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{3}, \frac{1}{5}]$ gilt.

(c) Begründen Sie, dass R unendlich viele Einheiten besitzt.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (7+3 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$, und es sei $N : R \to \mathbb{N}_0$ die Normfunktion gegeben durch $N(a+b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$ für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass R ein euklidischer Ring ist, mit $N|_{R\setminus\{0\}}$ als Höhenfunktion.

(a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Zahlen Primelemente im Ring R sind:
$1 + \sqrt{-2}$, 5, 6 und 11

(b) Entscheiden Sie, ob das Hauptideal (5) in R ein Primideal bzw. sogar ein maximales Ideal ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung jeweils mit Hilfe geeigneter Sätze aus der Vorlesung.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (4+4+2 Punkte)

Aus Aufgabe 4 ist bereits bekannt, dass die Zahl 2028 die Primfaktorzerlegung $2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13^2$ besitzt.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Sätze, dass die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/2028\mathbb{Z})^\times$ zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ isomorph ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/2028\mathbb{Z})^\times$ ein Element der Ordnung 156 besitzt, und dass es in $(\mathbb{Z}/2028\mathbb{Z})^\times$ keine Elemente größerer Ordnung gibt.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 und die Anzahl der Elemente der Ordnung 13 in $(\mathbb{Z}/2028\mathbb{Z})^\times$. Hier ist *kein* Nachweis erforderlich.

Name: ____________________

Aufgabe 8. (4+4+2 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Zahl, die die Gleichung $\alpha^5 = 4\alpha + 2$ erfüllt.

(a) Bestimmen Sie den Erweiterungsgrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ (mit Nachweis).

(b) Bestimmen Sie die beiden Erweiterungsgrade $[\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{-3})]$ (ebenfalls mit Nachweis).

(c) Begründen Sie, dass kein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\phi : \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) \to \mathbb{R}$ existiert.