



Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
14.04.2025

Algebra und Zahlentheorie I

(Lehramt Gymnasium, neue Studienordnung)

Nachschreibklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Hinweise:

- (a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.
- (b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.
- (c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- (d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.
- (e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.
- (f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- (g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (3+4+3 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Wir betrachten in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ die beiden Untergruppen

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p \right\} \quad \text{und} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

- (a) Weisen Sie nach, dass N ein Normalteiler von G ist.
- (b) Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe G und die Ordnung der Faktorgruppe G/N .
- (c) Sei nun $p = 7$. Zeigen Sie, dass in G/N die Elemente

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} N \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} N \quad \text{übereinstimmen.}$$

Name: _____

Aufgabe 2. (4+3+3 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
- (b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $(1\ 2\ 5)(2\ 4)$ in der symmetrischen Gruppe S_5 .
- (c) Existiert eine Gruppe, in der außer dem Neutralelement genau 5 Elemente der Ordnung 6 und genau ein Element der Ordnung 2 existieren, und keine weitere Elemente? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Name: _____

Aufgabe 3. (4+4+2 Punkte)

- (a) Geben Sie ein $r \in \mathbb{N}$ und Gruppen $G_1, \dots, G_r$ an, so dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 54 zu genau einer dieser Gruppen G_j mit $1 \leq j \leq r$ isomorph ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.
- (b) Begründen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$ nicht zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ isomorph ist.
- (c) Geben Sie eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 54 an.

Name: _____

Aufgabe 4. (4+3+3 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 100.

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe der Sylowsätze, dass G einen abelschen Normalteiler N der Ordnung 25 besitzt.
- (b) Begründen Sie, dass G auflösbar ist.
- (c) Setzen wir nun außerdem voraus, dass G genau eine Untergruppe P der Ordnung 4 besitzt. Begründen Sie, dass G isomorph zu $P \times N$ ist.

Name: _____

Aufgabe 5. (3+4+3 Punkte)

- (a) Weisen Sie nach, dass durch die Abbildung $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}^2, f \mapsto (f(0), f(1))$ ein Ringhomomorphismus gegeben ist.
- (b) Sei $g = x(x - 1)$. Zeigen Sie, dass das Hauptideal (g) im Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ mit dem Kern von ϕ übereinstimmt.
- (c) Beweisen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Ringe, dass $\mathbb{Q}^2$ als Ring zum Faktorring $\mathbb{Q}[x]/(g)$ isomorph ist.

Name: _____

Aufgabe 6. (4+3+3 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $37u + 61v = 1$.
- (b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv 2 \pmod{37}$ und $a \equiv 3 \pmod{61}$.
- (c) Bestimmen Sie das Inverse von $37 + 61\mathbb{Z}$ in der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^\times$.

Name: _____

Aufgabe 7. (5+2+3 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie ein $r \in \mathbb{N}$ und zyklische Gruppen $C_1, \dots, C_r$, so dass die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times$ isomorph zu $C_1 \times \dots \times C_r$ ist. (Es ist $1120 = 32 \cdot 5 \cdot 7$.)
- (b) Geben Sie die Ordnung von $(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times$ an und begründen Sie, dass die Gruppe nicht zyklisch ist.
- (c) Geben Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in $(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times$ an.
Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

Name: _____

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

Sei $\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{7}}$.

- (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
- (b) Bestimmen Sie die Erweiterungsgrade $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(i)]$ (jeweils mit Nachweis).

In Teil (a) denken Sie bitte daran, die Irreduzibilität des Polynoms nachzuweisen.