

Aufgabe H19T3A5 (12 Punkte)

Es seien $p \geq 3$ eine Primzahl und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p -te Einheitswurzel.

- (a) Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Polynom $x^{a+1} - 1$ ein Teiler des Polynoms $x^{2a} - x^{a+1} - x^{a-1} + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$ ist und bestimmen Sie den Quotienten.
- (b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})|\mathbb{Q}$ galoissch ist und dass $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})|\mathbb{Q})$ zyklisch von Ordnung $\frac{1}{2}(p-1)$ ist.

Hinweis/Kommentar:

zu (a) Hier lässt sich der Quotient leicht erraten: Der Leitterm muss x^{a-1} und der konstante Term gleich -1 sein. Man rechnet nun einfach nach, dass das richtige Produkt herauskommt.

zu (b) Dieser Teil scheint keinen inhaltlichen Bezug zu Teil (a) zu haben. Verwenden Sie das aus der Vorlesung bekannte Resultat $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.