Aufgabe H19T3A4 (12 Punkte)

Es bezeichne p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ einen Körper mit p Elementen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \in \mathbb{F}_p[x]$ irreduzibel über $\mathbb{F}_p$ vom Grad $\operatorname{grad}(g) = m$, so ist die Teilbarkeitsrelation $g \mid (x^{p^m} - x)$ erfüllt.

(b) Genau dann ist $f \in \mathbb{F}_p[x]$ irreduzibel über $\mathbb{F}_p$, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq \frac{1}{2}\operatorname{grad}(f)$ gilt, dass $\operatorname{ggT}(f, x^{p^m} - x) = 1$ ist.

Hinweis/Kommentar:

zu (a) Betrachten Sie eine Nullstelle α von g in einem algebraischen Abschluss. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_p(\alpha) = \mathbb{F}_{p^m}$ gilt. Welche Beziehung besteht zwischen $\mathbb{F}_{p^m}$ und dem Polynom $x^{p^m} - x$?

zu (b) Für die Richtung „$\Leftarrow$“ verwenden Sie, dass das Polynom f, falls es reduzibel ist, einen irreduziblen Faktor vom Grad $\leq \frac{1}{2}\operatorname{grad}(f)$ besitzt. Verwenden Sie dann das Ergebnis von Aufgabenteil (a).