**Aufgabe H19T3A3** (12 Punkte)

Sei $G$ eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Falls eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit Index $(G : H) = k \in \mathbb{N}$ existiert, so existiert auch ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq H$, so dass die Teilbarkeitsrelationen $k \mid (G : N)$ und $(G : N) \mid k!$ erfüllt sind.
*Hinweis:* Operation der Gruppe $G$ auf der Menge der Linksnebenklassen von $H$ in $G$ durch Linksmultiplikation

(b) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 108 geben kann.

*Hinweis/Kommentar:*

zu (a) Für Teil (a) erinnern wir daran, dass jeder Operation einer Gruppe $G$ auf einer Menge $X$ ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Per}(X)$ zugeordnet werden kann. Damit sollte klar ein, wie das Fakultätszeichen ! zu Stande kommt. Verwenden Sie, dass Kerne von Homomorphismen Normalteiler sind. Die Relation $k \mid (G : N)$ folgt aus der Inklusion $N \subseteq H$ (wie ?).

zu (b) Hier ist vorgesehen, dass man das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) verwendet. Ist $G$ eine beliebige Gruppe der Ordnung 108, dann gibt es in $G$ immer eine Untergruppe $H$ der Ordnung 27 (warum ?).