Aufgabe H19T3A3 (12 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Falls eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit Index $(G:H) = k \in \mathbb{N}$ existiert, so existiert auch ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq H$, so dass die Teilbarkeitsrelationen $k \mid (G:N)$ und $(G:N) \mid k!$ erfüllt sind.
Hinweis: Operation der Gruppe G auf der Menge der Linksnebenklassen von H in G durch Linksmultiplikation

(b) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 108 geben kann.

Lösung:

zu (a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine Operation $\cdot : G \times G/H \to G/H$ der Gruppe G auf der Menge G/H der der Linksnebenklassen existiert, die durch $g \cdot (g_1 H) = (gg_1)H$ für alle $g, g_1 \in G$ gegeben ist. Dieser Operation kann ein Homomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Per}(G/H)$ definiert durch $\phi(g)(g_1 H) = g \cdot (g_1 H) = (gg_1)H$ für alle $g, g_1 \in G$ zugeordnet werden. Als Kern eines Homomorphismus ist $N = \ker(\phi)$ ein Normalteiler von G. Für jedes $n \in N$ gilt $\phi(n) = \mathrm{id}_{G/H}$, also

$$nH \quad = \quad (ne_G)H \quad = \quad n \cdot (e_G H) \quad = \quad n \cdot H \quad = \quad \phi(n)(H) \quad = \quad \mathrm{id}_{G/H}(H) \quad = \quad H$$

und somit $n \in H$. Damit ist $N \subseteq H$ nachgewiesen. Wegen

$$(G:N) \quad = \quad \frac{|G|}{|N|} \quad = \quad \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|H|}{|N|} \quad = \quad (G:H) \cdot (H:N) \quad = \quad k \cdot (H:N)$$

ist k ein Teiler von $(G:N)$. Auf Grund des Homorphiesatzes für Gruppen gilt außerden $G/N \cong \mathrm{im}(\phi)$, also $(G:N) = |G/N| = |\mathrm{im}(\phi)|$. Weil $\mathrm{im}(\phi)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Per}(G/H)$ ist, ist $(G:N) = |\mathrm{im}(\phi)|$ ein Teiler von $|\mathrm{Per}(G/H)|$, und wegen $|G/H| = (G:H) = k$ gilt $|\mathrm{Per}(G/H)| = k!$. Damit ist insgesamt auch $(G:N) \mid k!$ nachgewiesen.

zu (b) Sei G eine Gruppe der Ordnung $108 = 4 \cdot 27 = 2^2 \cdot 3^3$ und H eine 3-Sylowgruppe von G; aus der Vorlesung ist bekannt, dass zu jeder Primzahl p mindestens eine p-Sylowgruppe in G existiert. Nun ist $|H| = 27$ (nach Definition der 3-Sylowgruppen) und somit $(G:H) = \frac{108}{27} = 4$. Wie in Teil (a) gezeigt wurde, gibt es wegen $4! = 24$ einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $4 \mid (G:N)$ und $(G:N) \mid 24$. Insbesondere gilt $\{e_G\} \subsetneq N \subsetneq G$, denn im Fall $N = G$ wäre $(G:N) = 1$ (was $4 \mid (G:N)$ widersprechen würde), und im Fall $N = \{e_G\}$ wäre $(G:N) = |G| = 108$ (im Widerspruch zu $(G:N) \mid 24$). Die Existenz eines nichttrivialen Normalteilers zeigt, dass die Gruppe G nicht einfach ist.