Aufgabe H19T3A2 (12 Punkte)

Sei H eine Untergruppe der (nicht notwendig endlichen) Gruppe G von endlichem Index $(G : H) = n \in \mathbb{N}$.

(a) Man zeige, dass es für alle $g \in G$ ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq n$ und $g^j \in H$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie die Nebenklassen $g^i H$, $0 \leq i \leq n$.

(b) Man zeige an einem Beispiel, dass in (a) nicht zusätzlich gefordert werden kann, dass j ein Teiler von n ist.

Hinweis/Kommentar:

In Teil (a) wurde der entscheidende Hinweis schon gegeben. (Es gibt n Nebenklassen, aber $n + 1$ ganze Zahlen i mit $0 \leq i \leq n$.) Was bedeutet die Gleichung $g^i H = g^j H$ für die Elemente g^i und g^j?

Für Teil (b) wählen Sie das Gegenbeispiel in einer möglichst kleinen Gruppe. Um zu zeigen, dass Aussagen, die in beliebigen abelschen Gruppen richtig sind, in nicht-abelschen Gruppen im Allgemeinen nicht mehr gelten (so wie das auch hier der Fall ist), genügt es häufig bereits, die symmetrische Gruppe S_3 zu betrachten. Es ist übrigens eine gute Zusatzübung, sich zu überlegen, warum man bei einer abelschen Gruppe G (oder allgemeiner, unter der Voraussetzung $H \trianglelefteq G$) immer einen Teiler j von n mit $g^j \in H$ finden kann.