Aufgabe H19T3A2 (12 Punkte)

Sei H eine Untergruppe der (nicht notwendig endlichen) Gruppe G von endlichem Index $(G : H) = n \in \mathbb{N}$.

(a) Man zeige, dass es für alle $g \in G$ ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq n$ und $g^j \in H$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie die Nebenklassen $g^i H$, $0 \leq i \leq n$.

(b) Man zeige an einem Beispiel, dass in (a) nicht zusätzlich gefordert werden kann, dass j ein Teiler von n ist.

Lösung:

zu (a) Wegen $n = (G : H)$ besteht die Menge G/H der Linksnebenklassen von H aus n Elementen. Da es andererseits $n + 1$ ganze Zahlen i mit $0 \leq i \leq n$ gibt, muss es $i, k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq i < k \leq n$ und $g^i H = g^k H$ geben. Es folgt $g^k \in g^i H$, also $g^k = g^i h$ für ein $h \in H$. Setzen wir $j = k - i$, dann gilt also $g^j = g^{k-i} = (g^i)^{-1} g^k = h \in H$. Wegen $0 \leq i < k \leq n$ ist außerdem $j = k - i \geq 1$, insbesondere also $j \in \mathbb{N}$, und $k - i \leq n - 0 = n$.

zu (b) Sei zum Beispiel $G = S_3$, $g = (1\ 3)$ und $H = \langle (1\ 2) \rangle = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$. Dann gilt $(G : H) = \frac{|G|}{|H|} = \frac{|S_3|}{\mathrm{ord}((1\ 2))} = \frac{6}{2} = 3$ nach dem Satz von Lagrange. Die einzigen Teiler von 3 in $\mathbb{N}$ sind 1 und 3, es gilt aber $g^1 = (1\ 3) \notin H$ und $g^3 = (1\ 3)^3 = (1\ 3) \notin H$.