Aufgabe H19T3A1 (12 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{ggT}(a, bc)$ teilt das Produkt $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c)$.

(b) $\mathrm{ggT}(a, bc)$ kann verschieden sein von $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c)$.

(c) $\mathrm{ggT}(a, bc) = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c)$, falls b und c teilerfremd sind.

Lösung:

Offenbar wurde in der Aufgabenstellung vergessen, für die Zahlen a, b, c eine geeignete Einschränkung anzugeben. Gilt nämlich $a = b = c = 0$, dann sind sämtliche ggT's nicht definiert. Gilt $a = 0$ und zugleich $bc = 0$, hat man dasselbe Problem. Der Übersichtlichkeit wegen gehen wir hier zunächst davon aus, dass $abc \neq 0$ vorausgesetzt ist. Am Ende der Lösung diskutieren wir, inwieweit diese Bedingung in den einzelnen Aufgabenteilen gelockert werden kann.

zu (a) Sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen. Weil $\mathbb{Z}$ ein faktorieller Ring ist, besitzt jede ganze Zahl $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine eindeutig Darstellung der Form $d = \varepsilon \prod_{p \in P} p^{v_p(d)}$ mit $v_p(d) \in \mathbb{N}_0$ für alle $p \in P$, $v_p(d) = 0$ für alle bis auf endlich viele $p \in P$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ (denn die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}$ ist durch $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ gegeben). Aus der Vorlesung ist außerdem bekannt, dass für $d, e \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Zahl d genau dann ein Teiler von e ist, wenn in der eindeutigen Produktdarstellung $v_p(d) \leq v_p(e)$ für alle $p \in P$ erfüllt ist. Außerdem gilt $v_p(de) = v_p(d) + v_p(e)$ und $v_p(\mathrm{ggT}(d, e)) = \min\{v_p(d), v_p(e)\}$ für alle $p \in P$.

Wenden wir dies hier an, so erhalten wir für jede Primzahl p die Gleichungen $v_p(bc) = v_p(b) + v_p(c)$ und $v_p(\mathrm{ggT}(a, bc)) = \min\{v_p(a), v_p(bc)\} = \min\{v_p(a), v_p(b) + v_p(c)\}$. Ebenso gilt $v_p(\mathrm{ggT}(a, b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$, $v_p(\mathrm{ggT}(a, c)) = \min\{v_p(a), v_p(c)\}$ und $v_p(\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\} + \min\{v_p(a), v_p(c)\}$ für alle $p \in P$. Somit ist $\mathrm{ggT}(a, bc)$ genau dann ein Teiler von $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c)$, wenn für alle $p \in P$ die Ungleichung $\min\{v_p(a), v_p(b) + v_p(c)\} \leq \min\{v_p(a), v_p(b)\} + \min\{v_p(a), v_p(c)\}$ erfüllt ist.

Nehmen wir an, dass die Ungleichung für ein $p \in P$ nicht gilt. Dann muss sowohl $v_p(a) > \min\{v_p(a), v_p(b)\} + \min\{v_p(a), v_p(c)\}$ als auch $v_p(b) + v_p(c) > \min\{v_p(a), v_p(b)\} + \min\{v_p(a), v_p(c)\}$ gelten. Aus der ersten Ungleichung folgt, dass weder $\min\{v_p(a), v_p(b)\}$ noch $\min\{v_p(a), v_p(c)\}$ mit $v_p(a)$ übereinstimmt; es gilt also $\min\{v_p(a), v_p(b)\} = v_p(b)$, $\min\{v_p(a), v_p(c)\} = v_p(c)$ und damit $v_p(a) > v_p(b) + v_p(c)$. Die zweite Ungleichung liefert nun den Widerspruch $v_p(b) + v_p(c) > v_p(b) + v_p(c)$. Also gilt $\min\{v_p(a), v_p(b) + v_p(c)\} \leq \min\{v_p(a), v_p(b)\} + \min\{v_p(a), v_p(c)\}$ tatsächlich für alle $p \in P$.

zu (b) Aus Teil (a) ist ersichtlich, dass a, b und c so gewählt werden müssen, dass $\min\{v_p(a), v_p(b) + v_p(c)\} < \min\{v_p(a), v_p(b)\} + \min\{v_p(a), v_p(c)\}$ für zumindest eine Primzahl p gilt. Dies erreicht man zum Beispiel, indem man $a = 2$ und $b = c = 4$ setzt. Es gilt dann $\mathrm{ggT}(a, bc) = \mathrm{ggT}(2, 16) = 2$, aber $\mathrm{ggT}(a, b)\mathrm{ggT}(a, c) = \mathrm{ggT}(2, 4)\mathrm{ggT}(2, 4) = 2 \cdot 2 = 4$.

zu (c) Zwei natürliche Zahlen stimmen genau dann überein, wenn sie sich gegenseitig teilen. Deshalb ist die Gleichung $\mathrm{ggT}(a, bc) = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c)$ äquivalent zu $v_p(\mathrm{ggT}(a, bc)) = v_p(\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c))$ für alle $p \in P$, und wie in Teil (a) gezeigt, ist dies wiederum mit

$$\min\{v_p(a), v_p(b) + v_p(c)\} \quad = \quad \min\{v_p(a), v_p(b)\} + \min\{v_p(a), v_p(c)\} \quad \forall\, p \in P$$

gleichbedeutend. Die Voraussetzung $\mathrm{ggT}(b, c) = 1$ bedeutet, dass b und c keinen gemeinsamen Primteiler besitzen. Es gilt also $v_p(b) = 0$ oder $v_p(c) = 0$ für alle Primzahlen p. Im Fall $v_p(b) = 0$ ist die hat die linke Seite der angegebenen Gleichung den Wert $\min\{v_p(a), v_p(c)\}$ und die rechte den Wert $\min\{v_p(a), 0\} + \min\{v_p(a), v_p(c)\} = 0 + \min\{v_p(a), v_p(c)\} = \min\{v_p(a), v_p(c)\}$. Genauso sieht man, dass auch im Fall $v_p(c) = 0$ beide Seiten übereinstimmen.

Nachtrag:
Ist $a = 0$ und $bc \neq 0$, dann sind die Aussagen von Teil (a) und (c) ebenfalls richtig, denn in diesem Fall gilt $\mathrm{ggT}(a, bc) = |bc|$ und $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c) = |b| \cdot |c| = |bc|$. Teil (a) gilt auch im Fall $a \neq 0$ und $bc = 0$. Denn dann gilt einerseits $\mathrm{ggT}(a, bc) = \mathrm{ggT}(a, 0) = |a|$. Andererseits gilt im Fall $b = 0$ die Gleichung $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c) = |a| \cdot \mathrm{ggT}(a, c)$, was ein Vielfaches von $|a|$ ist. Genauso sieht man, dass die Teilerbeziehung auch im Fall $c = 0$ gültig bleibt. Ebenso bleibt (c) für $a \neq 0$ und $bc = 0$ gültig. Setzen wir o.B.d.A. voraus, dass $b = 0$ ist. Dann muss $|c| = 1$ sein, denn andernfalls wären b und c nicht teilerfremd. Die linke Seite der Gleichung hat dann wiederum den Wert $|a|$, und für die rechte Seite gilt ebenfalls $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c) = \mathrm{ggT}(a, 0) \cdot \mathrm{ggT}(a, c) = |a| \cdot 1 = |a|$. Bei der Lösung von Aufgabenteil (b) spielt es keine Rolle, ob man für a, b, c den Wert 0 ausschließt oder nicht.