Aufgabe H19T2A5 (12 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$, seien $a \in K$ und $f = x^p - x - a \in K[x]$. Zeigen Sie:

(a) Sind L ein Erweiterungskörper von K und $b \in L$ eine Nullstelle von f, dann ist auch $b + 1$ eine Nullstelle von f.

(b) Entweder hat f eine Nullstelle in K, oder f ist irreduzibel.

(c) Ist f irreduzibel, dann ist die Galoisgruppe von f eine zyklische Gruppe der Ordnung p.

Hinweis/Kommentar:

Teil (a) ist eine einfache Anwendung der Rechenregel „Freshman's Dream", also der Gleichung $(x+y)^p = x^p + y^p$ in Ringen der Charakteristik p. Teil (b) ist dagegen deutlich schwieriger: Man muss zeigen, dass f keinen irreduziblen Faktor g mit $1 < \mathrm{grad}(g) < \mathrm{grad}(f)$ besitzt. Aus dem Ergebnis von Teil (a) kann leicht geschlossen werden, dass die Nullstellenmenge von f in einem algebraischen Abschluss K^{alg} die Form $\{\alpha, \alpha + 1, ..., \alpha + (p-1)\}$ hat, wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass α eine Nullstelle unseres Faktors g ist. Wegen $\mathrm{grad}(g) > 1$ muss g eine weitere Nullstelle der Form $\alpha + \ell$ haben, mit $\ell \in \{1, ..., p-1\}$. Zeigen Sie nun mit Hilfe des *Fortsetzungssatzes*, dass auch $\alpha + 2\ell$, $\alpha + 3\ell$,... Nullstellen von g sein müssen. Wieviele Nullstellen hat g also insgesamt?

Für Teil (c) genügt es festzustellen, dass die Galoisgruppe von f die Ordnung p hat. Dafür wiederum genügt es festzustellen, dass f wegen Teil (a) bereits nach Adjunktion einer einzigen Nullstelle an K in Linearfaktoren zerfällt. (Wahrscheinlich wäre es für die Bearbeitung günstiger gewesen, die Aufgabenteile (b) und (c) in umgekehrter Reihenfolge zu stellen. Oder es gibt für (b) einen einfacheren Lösungsansatz, den ich bisher übersehe.)